Devoirs et mes conférences
de Poincaré.

—

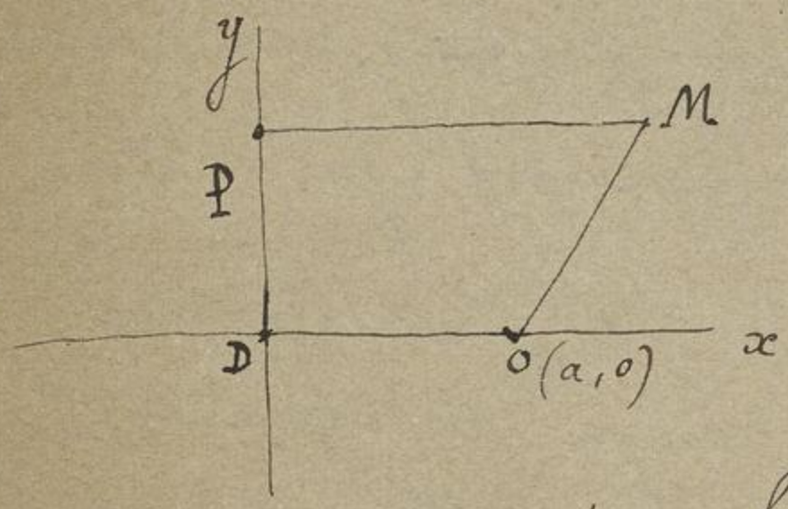
—

Autographes de H. Poincaré

———

E. Pomey.

On donne dans un plan une droite fixe D et un point fixe O. Construire la courbe qui est lieu des points M tels que le produit $MO \cdot MP = K^2$. Construire aussi la tangente en un point M de cette courbe. Quand on fait varier K^2, D et O restant fixes, le point d'inflexion de la courbe décrit une courbe dont on demande l'équation.



Prenons la droite D pour axe des y, et la perpendiculaire abaissée du point O pour axe des x. Soient (a et 0) les coord. du point O, x et y les coordonnées du point M. ~~On a~~

L'équation du lieu du point M est

$$x\sqrt{(x-a)^2+y^2} = K^2,$$

~~on, en élevant au carré~~ en supposant toutefois le point M situé à droite de oy. Pour les points M situés à gauche, on aurait

$$-x\sqrt{(x-a)^2+y^2} = K^2.$$

Ces deux équations peuvent se réunir en une seule, qu'on obtiendra en élevant

l'une d'elles au carré ; on a ainsi

(1) $x^2[(x-a)^2+y^2] = K^4$,

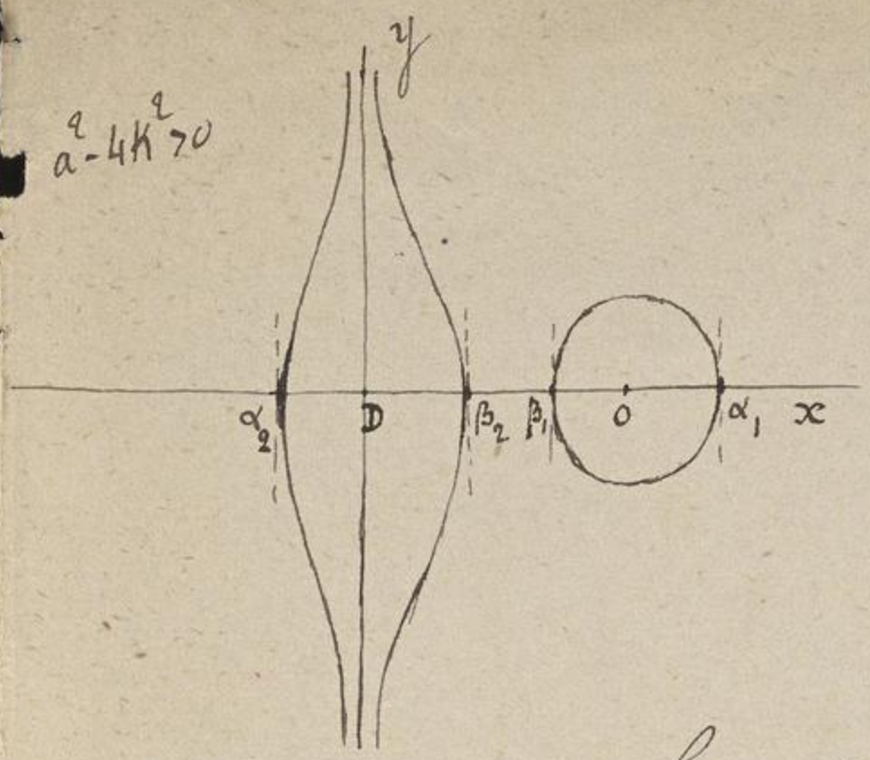
ou (1 bis) $x^2y^2 = K^4 - x^2(x-a)^2$

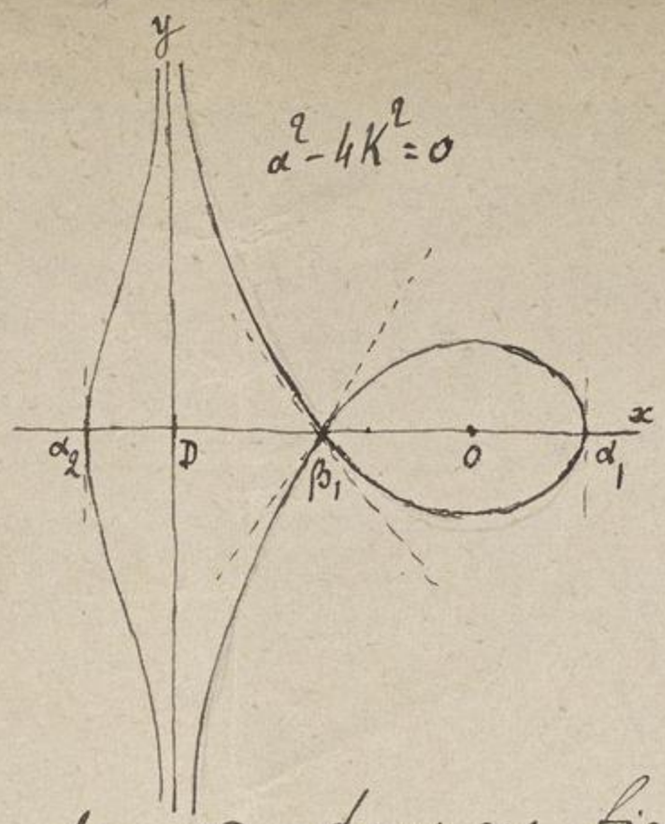
ou enfin (2) $x^2y^2 = [K^2 - x(x-a)][K^2 + x(x-a)]$

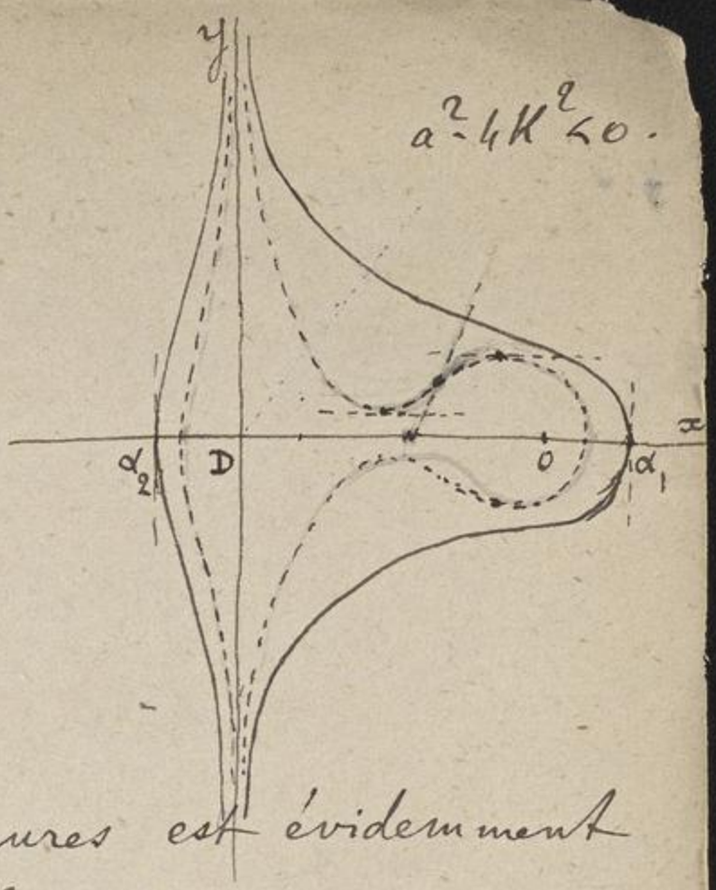
Les racines du trinome $K^2 - x(x-a) = -x^2+ax+K^2$ sont toujours réelles, attendu que le 1er et le dernier terme sont de signes contraires ; pour ce même motif l'une α_1 est positive, l'autre α_2 négative ; et la positive est plus grande que a, puisque leur somme est égale à a. Quant à l'autre facteur, ses racines ne sont réelles que lorsque $a^2-4K^2 \geqslant 0$, et alors elles sont toutes deux positives et inférieures à a. De plus, nous remarquerons que lorsque x passe par une des racines $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, le second membre de (2) change de signe, et que par suite si y était réel dans un intervalle, il devient imaginaire dans l'intervalle voisin et vice versa ; or pour x=a, y est réel et égal $\bar{a}+\frac{K^2}{a}$; d'ailleurs y devient infini pour x = 0 ; enfin, la courbe est symétrique par rapport à ox. De ces remarques il résulte clairement que suivant qu'on aura

$a^2-4K^2 > 0$, $a^2-4K^2 = 0$, $a^2-4K^2 < 0$

on aura les trois formes de courbe suivantes :







Le milieu de OD dans ces figures est évidemment le milieu de $\alpha_2\alpha_1$ et de $\beta_2\beta_1$.

Dans la 1ère figure les tangentes en $\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \alpha_1$ sont verticales ; ~~attendu~~ en effet l'axe des x coupe la courbe en quatre points ; or ~~ce~~ sont précisément les points $\alpha_2, \beta_2, \beta_1, \alpha_1$. Ces points sont donc simples, et comme la parallèle à oy coupe en deux points confondus (par suite de la symétrie), c'est la tangente. — Même raisonnement dans le 2e cas pour α_2 et α_1. Quant au point double β_1, les tangentes ~~ont pour équation~~ s'obtiennent en égalant à zéro l'ensemble des termes de moindre degré dans l'équation transformée par le ~~chan~~ transport de l'origine en β_1, c.à.d. $y = \pm\sqrt{2}\,x$. —

Dans le 3ème cas, β_2 et β_1 sont imaginaires, donc α_1 et α_2 sont simples, et les tangentes y sont encore verticales. Dans ce cas, il faut remarquer

Bien, vous voulez dire que si l'on avait un Bier

que l'ordonnée peut présenter un maximum et un minimum séparés par le point d'inflexion.

En effet, l'équation $y' = 0$ est, après réductions,

$$K^4 + x^3(x-a) = 0 \quad , \text{ dont la dérivée est}$$

$$3x^2(x-a) + x^3 = 0 \quad \text{qui a pour racines } 0^{(\text{double})} \text{ et } \frac{3a}{4}.$$

Substituant alors

$-\infty$		0		$\frac{3a}{4}$		$+\infty$
dans $y' = 0$, on a les signes $+$		$+$		$+\left(K^4 - \frac{3^3}{4^4}a^4\right)$		$+$.

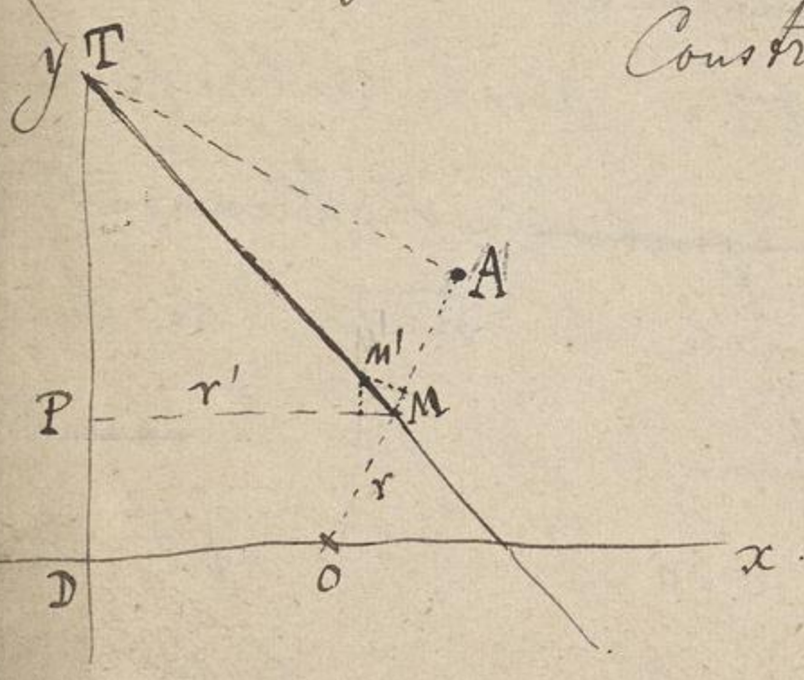
Donc on aura deux racines ou aucune, suivant que

Bien

$$K^4 - \frac{3^3 a^4}{4^4} < 0 \quad \text{ou} \quad K^4 - \frac{3^3 a^4}{4^4} > 0 \; ; \text{ et ces}$$

deux racines seront d'ailleurs inférieures à a, puisque la substitution de a donne le signe $+$.

Suivant qu'on ~~sera dans le 1er ou le 2e cas~~ aura la 1ère ou la 2ème inégalité, on aura la forme en pointillé ou en traits pleins. —



Construire en un point M la tangente.

En posant $OM = r$, $MP = r'$,

l'équation de la courbe est $rr' = K^2$.

D'où $\frac{dr}{r} = -\frac{dr'}{r'}$.

~~Or MA / AT~~ ~~Je prolonge OM~~ $MA = OM$

Je prends sur le prolongement de OM,

j'élève en A la perpend. AT à OA.

TM est la tangente.

En effet, quand on passe du point M au point M' infiniment voisin sur la droite MT, les accroissements ~~dr et dr'~~ de r et de r' sont proport. à MA et MP, et de signes contraires ; donc pour ce point on a

$$\frac{dr}{r} = -\frac{dr'}{r'}$$

, comme pour le point de la courbe infiniment voisin de M ; ces points sont donc infiniment voisins du second ordre et MM' est la tang.

Cherchons le lieu des points d'inflexion quand K^2 varie. Les points d'inflexion sont donnés $y'' = 0$. Dérivons l'équation sous sa forme (1 bis),

$$2xy^2 + 2x^2yy' = -2x(x-a)^2 - 2x^2(x-a),$$

ou, après divisé par $2x$,

$$(3) \quad y^2 + xyy' = -(x-a)(2x-a).$$

Dérivons encore cette équation, en faisant $y'' = 0$,

$$2yy' + yy' + xy'^2 = -(2x-a) - 2(x-a) = -4x + 3a,$$

ou $$(4) \quad 3yy' + xy'^2 + 4x - 3a = 0.$$

Eliminant y' au moyen de (3), et ordonnant par rapport à y, on a

$$2y^4 - (2x^2 - a^2)y^2 - (x-a)^2(2x-a)^2 = 0.$$

C'est le lieu des points d'inflexion. — Or cette équation est bicarrée en y ; ~~resolv~~ ses racines en y^2

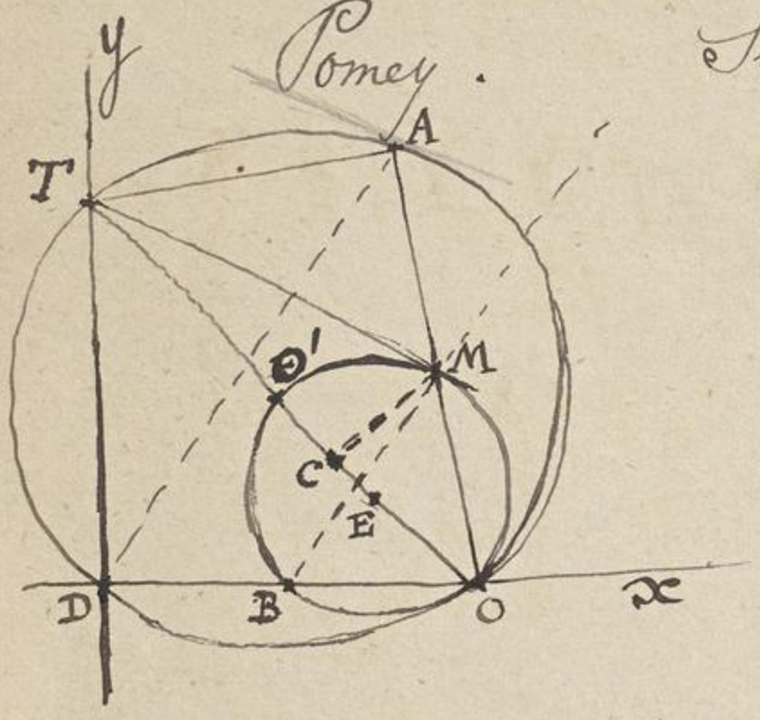
sont $-(x-a)^2$ et $\frac{(2x-a)^2}{2}$. Elle peut donc s'écrire $\left[y^2+(x-a)^2\right]\left[2y^2-(2x-a)^2\right]=0$ et se décompose en deux : $y^2+(x-a)^2=0$ représentant le point cercle O (qui correspond à $k=0$) et puis

$$\text{et} \quad y=\pm\sqrt{2}\left(x-\frac{a}{2}\right),$$

équations de deux droites passant par le point $\left(\frac{a}{2},0\right)$.

Ce résultat peut se démontrer géométriquement.

La méthode suivante est de mon frère Jean-Baptiste Pomey.



Soit M un point d'inflexion. ~~Considérons~~ Le point M se déplaçant infiniment peu sur la courbe, le point T, où la tangente MT rencontre Dy, varie d'un infiniment petit du second ordre, et la position correspondante du point A doit être infiniment voisine du second ordre du cercle OAT, et la tangente au lieu du point A doit être tangente en A au cercle OAT. Mais son lieu est homothétique du lieu de M, puisque MA = OM ; donc cette tangente est parallèle à MT, et par suite MT est tangente en M au cercle OM homothétique du cercle OAT.

L'angle $\widehat{ATO}$ est alors indépendant de la grandeur de OM et de sa ~~position~~ direction : car la connaissance de

~~si attaché que~~

la ligne TO suffit pour déterminer un cercle dont TAO, dont il est le diamètre, le cercle OM la moitié qui lui est tangent en O et la droite TM tangente à ce dernier cercle, donc aussi les lignes OMA et TA. L'angle ATO est donc constant quand TO varie, puisque TO est le # seul paramètre linéaire et que les angles doivent par conséquent en être indépendants. — Il en résulte que l'angle ODA inscrit dans le même segment de cercle est aussi constant, et que par suite le point M est situé sur la droite BM menée parallèlement à DA par le milieu de DO.

Il est facile de voir que le coeffic angul. de cette droite est $\sqrt{2}$. En effet, abaissons sur OT la perpendiculaire MC, et soit E le centre du cercle BOM. On a $\widehat{OBM} = \widehat{ODA} = \widehat{OTA} = \widehat{CMO}$ et $tg\ \widehat{CMO} = \frac{OC}{CM}$. Or, en appelant R le rayon du cercle, on a $\frac{2}{2R} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{4R}$, les points O, C, O', T étant harmoniques ; d'où on tire $OC = \frac{4R}{3}$. D'autre part, $\overline{CM}^2 = CE \cdot CT$ dans le triangle rectangle EMT ; or on a $\frac{2}{CT} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}$, d'où $CT = \frac{8R}{3}$. On a aussi $3R \cdot CE = R^2$, d'où $CE = \frac{R}{3}$. Alors on a

Bien — vous pouvez dire aussi que la figure OMTA reste constamment semblable à elle même. Or si un point d'une figure qui reste toujours semblable à elle même décrit un certain lieu tous les autres points décrivent des lieux semblables au premier. Or T décrit une droite donc il en est de même de M la droite est d'ailleurs aisée à construire. Cette méth. peut être utile dans un gd. nombre de cas analogues. ——

Vous pouviez prévoir que le lieu passerait par le pt double car un pt double fait toujours partie du lieu des points d'infl. Car il annule le hessien.

Voir plus

$\overline{CM}^2 = \frac{8R^2}{9}$ et $CM = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$. Donc $\frac{OC}{CM} = \frac{\frac{4R}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$,

$tg\,\widehat{OBM} = \sqrt{2}$. —

On a une fonction z de deux variables x et y; on ~~a~~ considère aussi trois fonctions Z, X, Y de x et y définies par $X = ax+by+cz$, $Y = a'x+b'y+c'z$, $Z = a''x+b''y+c''z$, et l'on suppose que le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ est égal à l'unité.

Calculer $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$,

et nous emploierons les lettres P, Q, R, S, T pour désigner les dérivées correspondantes de Z par rapport aux deux variables X et Y.

On voit immédiatement qu'on peut considérer Z comme fonction de x et de y, ou bien comme fonction de X et Y qui sont eux-mêmes fonctions de x et y. On a dès lors les deux équations suivantes

L'introduction de $\frac{dX}{dx}$ etc, allonge sensiblement les calculs.

$$(1)\quad \frac{\partial Z}{\partial x} = P\frac{\partial X}{\partial x} + Q\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$(2)\quad \frac{\partial Z}{\partial y} = P\frac{\partial X}{\partial y} + Q\frac{\partial Y}{\partial y}\,,$$

et, en dérivant les deux membres de ces équations successivement par rapport à x et y,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \left(R\frac{\partial X}{\partial x} + S\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{\partial X}{\partial x} + P\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \left(S\frac{\partial X}{\partial x} + T\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{\partial Y}{\partial x} + Q\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad ※$$

$$\text{ou } (3)\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = R\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2S\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + T\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\,,$$

$$\text{puis}\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} = \left(R\frac{\partial X}{\partial x} + S\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{\partial X}{\partial y} + P\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y} + \left(T\frac{\partial Y}{\partial x} + S\frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{\partial Y}{\partial y} + Q\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}$$

$$\text{ou } (4)\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} = R\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + S\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + T\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + P\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y} + Q\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}\,,$$

$$\text{enfin } (5)\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = R\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + 2S\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} + T\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + P\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + Q\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\,.$$

Enfin, en prenant les dérivées partielles successives de X, Y, Z par rapport à x et y au moyen des équations

$$X = ax + by + cz$$
$$Y = a'x + b'y + c'z$$
$$Z = a''x + b''y + c''z\,,$$

où l'on considère Z comme fonction de x et y, on aura

※ On suppose ici que $\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y\partial X}$, et on désigne ces 2 quant. égales par S.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = a + cp \quad , \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = b + cq \quad ,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = a' + c'p \quad , \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = b' + c'q \quad ,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = a'' + c''p \quad , \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = b'' + c''q \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = cr \quad , \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = cs \quad , \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = ct \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = c'r \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} = c's \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = c't \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = c''r \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = c''s \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = c''t \quad .$$

Substituant ces valeurs dans les équations (1), (2), (3), (4), (5), il viendra

$$(6) \qquad (a+cp)P + (a'+c'p)Q = a'' + c''p$$

$$(7) \qquad (b+cq)P + (b'+c'q)Q = b'' + c''q \quad .$$

$$(8) \qquad (a+cp)^2 R + 2(a+cp)(a'+c'p)S + (a'+c'p)^2 T = (c'' - Pc - Qc')r$$

$$(9) \qquad (a+cp)(b+cq)R + [(a+cp)(b'+c'q) + (b+cq)(a'+c'p)]S + (a'+c'p)(b'+c'q)T = (c'' - Pc - Qc')s$$

$$(10) \qquad (b+cq)^2 R + 2(b+cq)(b'+c'q)S + (b'+c'q)^2 T = (c'' - Pc - Qc')t \quad .$$

Les équations (6) et (7) donnent

$$P = \frac{a''b' - b''a' + (a''c' - c''a')q + (c''b' - b''c')p}{ab' - ba' + (ac' - ca')q + (cb' - bc')p}$$

$$Q = \frac{ab'' - ba'' + (ac'' - ca'')q + (cb'' - bc'')p}{ab' - ba' + (ac' - ca')q + (cb' - bc')p}$$

~~Or dans la suite de ce calcul~~

ou bien, en désignant par $A, A', A'', B, B', B'',$ C, C', C'' les déterminants mineurs correspondant aux éléments a, a', a'', etc. du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},$$ on aura

$$P = -\frac{Ap+Bq-C}{A''p+B''q-C''}, \qquad Q = -\frac{A'p+B'q-C'}{A''p+B''q-C''}.$$

Le second membre de (8) devient alors

$$\left(c'' + \frac{Ap+Bq-C}{A''p+B''q-C''}c + \frac{A'p+B'q-C'}{A''p+B''q-C''}c'\right) r$$

ou $$\frac{(Ac+A'c'+A''c'')p + (Bc+B'c'+B''c'')q - (Cc+C'c'+C''c'')}{A''p+B''q-C''} r$$

Or, d'après la théorie des déterminants, on a

$Ac+A'c'+A''c'' = 0$, $Bc+B'c'+B''c'' = 0$,

et enfin d'après l'hypothèse $Cc+C'c'+C''c''=1$.

Le second membre de (8) se réduit donc à

$$-\frac{r}{A''p+B''q-C''},$$ et ceux de (9) et (10) sont

$$-\frac{s}{A''p+B''q-C''}$$ et $$-\frac{t}{A''p+B''q-C''}.$$

Pour abréger, désignons ces trois quantités par ρ,

σ et τ, et enfin posons $a+cp=\alpha$, $a'+c'p=\alpha'$,
$b+cq=\beta$ et $b'+c'q=\beta'$.

Les valeurs de R, S, T seront, comme on sait,
des fractions dont le dénominateur sera le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\alpha' & \alpha'^2 \\ \alpha\beta & \alpha\beta'+\beta\alpha' & \alpha'\beta' \\ \beta^2 & 2\beta\beta' & \beta'^2 \end{vmatrix}$$

et dont le numérateur s'obtiendra en remplaçant dans ce déterminant les coefficients de l'inconnue que l'on considère par les seconds membres ρ, σ, τ.

Calculons D en le développant par rapport aux éléments de la ligne du milieu ; il vient

$$D=\alpha\beta(2\alpha'^2\beta\beta'-2\beta'^2\alpha\alpha')+(\alpha\beta'+\beta\alpha')(\alpha^2\beta'^2-\beta^2\alpha'^2)-\alpha'\beta'(2\alpha^2\beta\beta'-2\beta^2\alpha\alpha')$$

$$=(\alpha\beta'-\beta\alpha')\left[-4\alpha\alpha'\beta\beta'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')^2\right]$$

$$=(\alpha\beta'-\beta\alpha')^3.$$

Le numérateur de R sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} \rho & 2\alpha\alpha' & \alpha'^2 \\ \sigma & \alpha\beta'+\beta\alpha' & \alpha'\beta' \\ \tau & 2\beta\beta' & \beta'^2 \end{vmatrix}.$$

Or on voit que les mineurs correspondant à ρ, σ, τ contiennent $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ en facteur. On aura

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\left[\beta'^2 \cdot p - 2\alpha'\beta' \cdot q + \alpha'^2 \cdot r\right] .$$

Si maintenant l'on remarque qu'on a

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = A''p + B''q - C'' \quad , \text{ on voit que l'on aura}$$

$$R = - \frac{(b'+c'q)^2 r - 2(a'+c'p)(b'+c'q)s + (a'+c'p)^2 t}{(A''p + B''q - C'')^3} .$$

On trouverait de même

$$S = - \frac{(b+cq)(b'+c'q)r - [(a+cp)(b'+c'q) - (a'+c'p)(b+cq)]s + (a+cp)(a'+c'p)t}{(A''p + B''q - C'')^3}$$

$$T = - \frac{(b+cq)^2 r - 2(a+cp)(b+cq)s + (a+cp)t}{(A''p + B''q - C'')^3} .$$

Et dans ces formules $A''p + B''q - C''$ est égal à

$$(cb' - bc')p + (ac' - ca')q + ab' - ba' .$$

On donne deux fonctions z_1 et z_2 de trois variables u_1, u_2, u_3, qui sont elles-mêmes fonctions de deux variables indépendantes x_1 et x_2.

On donne $A = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_2, u_3)}$, $B = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_3, u_1)}$, $C = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_1, u_2)}$,

$A' = \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2)}$, $B' = \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(x_1, x_2)}$, $C' = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)}$.

On demande de calculer $X = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(x_1, x_2)}$ en fonction de A, B, C, et de A', B', C'.

On a, en dérivant z_1 et z_2 successivement par rapport à x_1 et x_2 au moyen du théorème de la dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial z_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = \frac{\partial z_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_1}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial z_1}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_1} = \frac{\partial z_2}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_2} = \frac{\partial z_2}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_2}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial z_2}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}.$$

Posons $\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = a$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = a'$, $\frac{\partial z_1}{\partial u_2} = b$, $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = b'$,

$\frac{\partial z_1}{\partial u_3} = c$, $\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = c'$, $\frac{\partial z_2}{\partial u_1} = d$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = d'$,

$\frac{\partial z_2}{\partial u_2} = e$, $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = e'$, $\frac{\partial z_2}{\partial u_3} = f$, $\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = f'$,

On aura alors

~~$A = bc - ef$~~, ~~$B = ca' - ae'$~~, ~~$C = ac' - ca'$~~

~~$A' = df' - fd'$~~, ~~$B' = fb' - bf'$~~, ~~$C' = bd' - db'$~~.

$A = bf - ec$, $B = cd - af$, $C = ae - bd$

$A' = b'f' - e'c'$, $B = c'd' - a'f'$, $C = a'e' - b'd'$.

et les équations deviennent

(1) $\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = aa' + bb' + cc'$

(2) $\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = ad' + be' + cf'$

(3) $\frac{\partial z_2}{\partial x_1} = da' + eb' + fc'$

(4) $\frac{\partial z_2}{\partial x_2} = dd' + ee' + ff'$

Le déterminant X s'obtiendra en multipliant (1) et (4) ensemble, et retranchant le produit de (2) par (3). On a ainsi

$$X = (aa' + bb' + cc')(dd' + ee' + ff') - (ad' + be' + cf')(da' + eb' + fc')$$

On peut mettre en évidence chacune des quantités A, B, C, A', B', C'. On a en effet

$$X = (bf - ec)\, b'f' + (cd - af)\, c'd' + (ae - bd)\, a'e'$$
$$-(bf - ec)\, e'c' - (cd - af)\, a'f' - (ae - bd)\, b'd'$$
$$= A(b'f' - e'c') + B(c'd' - a'f') + C(a'e' - b'd')$$

$$X = AA' + BB' + CC'. \quad \text{— Exact}$$

Vous pouviez trouver ce résultat avec pro̸ns de calculs

Remarques sur le lieu des points d'infl.

Si en general l'Eqn generale d'une courbe est

$$f(x, y) = k$$

L'Eqn du lieu des points d'infl. est

$$\frac{df^2}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dxdy} + \frac{df^2}{dy^2}\frac{d^2f}{dx^2} = 0.$$

Supposons que pour $K=0$, $f(x,y)$ ait un point double à l'origine de telle sorte que

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \underbrace{\text{---}}_{\text{termes de degré} > 2}$$

le lieu des points d'infl. s'écrira:

$$0 = (ac-b^2)(ax^2+2bxy+cy^2) + \text{---}$$

de sorte que si une des courbes présente un pt double, le lieu des pts d'infl. admettra ce point comme pt double et y aura les mêmes tg. que la courbe elle-même, de sorte qu'un pt double compte pour 6 pts d'infl. confondus. Si le pt double est de rebroussement. de sorte que

$$f(x,y) = ay^2 + 2bx^3 + \text{---}$$

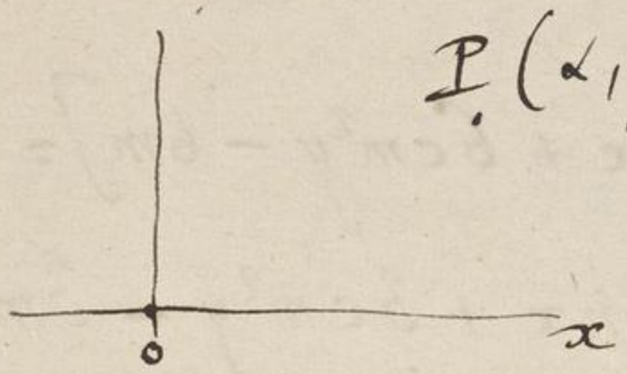
on a: pour le lieu des pts d'infl, un point de rebroussement; il y a deux branches qui se touchent, il en sera de même pour le lieu des pts d'infl. etc. Dans le cas qui nous occupe

Le lieu est du 6^{e} ordre; or quand $K=0$; la courbe se réduit à 4 droites

$$x^2+y^2=0 \qquad (y-a)^2=0$$

dont deux sont confondues. Ces 4 droites doivent donc faire partie du lieu. ~~Le lieu restant est donc du 2^{d}~~ parce que tous les points d'une droite sont d'inflexion. Le lieu restant est donc du 2^{d} ordre. Mais d'après ce qu'on a vu plus haut, il doit offrir un pt double en β_1 et y être tg. à la courbe. Il doit donc se réduire à deux droites et aux deux tg. en β_1

Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées par un point extérieur aux différentes coniques qui ont en un point O un contact du 3ème ordre avec une courbe donnée.



ox tang en O à la courbe
oy normale.
P (α, β) le point donné.

Les coniques tangentes à l'orig à ox sont

$x^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0$.

Ecriv. que y', y'', y''' ont les valeurs données 0, mais au point O, celles qui conviennent à la courbe donnée. Différent. 3 fois

$2x + 2by + 2bxy' + 2cyy' + 2ey' = 0$

$2 + 2by' + 2by' + 2bxy'' + 2cy'^2 + 2cyy'' + 2ey'' = 0$

$4by'' + 2by'' + 2bxy''' + 4cy'y'' + 2cy'y'' + 2cyy''' + 2ey''' = 0$

au point O, ces éq. donnent

$0 = 0$, $1 + 2em = 0$, $3bm + cn = 0$

D'où $e = -\frac{1}{2m}$, $b = -\frac{cn}{3m} = -\frac{-\frac{1}{2m} \cdot n}{3m} = \frac{n}{3m^2}$

L'équat. devient

$x^2 + 2\frac{n}{3m^2}xy + cy^2 - \frac{2}{m}y = 0$

~~$\varphi(x,y)$~~

ou $\varphi(x,y) = 3m^2x^2 + 2nxy + 3cm^2y^2 - 6my = 0$

La normale en (x,y) est

$$(X-x)\frac{d\varphi}{dx}+(Y-y)\frac{d\varphi}{dy}=0.$$

Elle passe en $P(\alpha,\beta)$, donc on a

$$(\alpha-x)\frac{d\varphi}{dx}+(\beta-y)\frac{d\varphi}{dy}=0,$$

c.à.d. $$(\alpha-x)[6m^2x+2ny]+(\beta-y)[2nx+6cm^2y-6m]=0$$

ou $$(\alpha-x)[3m^2x+ny]+(\beta-y)[nx+3cm^2y-3m]=0.$$

Il faut éliminer c entre cette équat et celle de la courbe. L'équat. de la courbe donne

$$3cm^2y=\frac{6my-3m^2x^2-2nxy}{y},$$

portons cette valeur dans l'équat précédente il vient

$$y(\alpha-x)[3m^2x+ny]+(\beta-y)[nxy-3my+6my-3m^2x^2-2nxy]=0$$

ou $$y(\alpha-x)[3m^2x+ny]+(\beta-y)[-3m^2x^2-nxy+3my]=0$$

ou $$y(\alpha-x)[3m^2x+ny]-(\beta-y)[3m^2x+ny]x+3my(\beta-y)=0$$

ou $$[y(\alpha-x)-x(\beta-y)](3m^2x+ny)+3my(\beta-y)=0$$

ou $$(\alpha y-\beta x)(3m^2x+ny)+3my(\beta-y)=0$$

Conique, qui passe par I et par O : elle est tangente en O à Ox.

Ordonnons :

$$-3\beta m^2 x^2 + (-\beta n + 3\alpha m^2)xy + (n\alpha - 3m)y^2 + 3\beta m y = 0$$

Genre $(-\beta n + 3\alpha m^2)^2 + 4.3\beta m^2(n\alpha - 3m)$

$$\beta^2 n^2 + 9\alpha^2 m^4 - 6\alpha\beta n m^2 + 12\alpha\beta n m^2 - 36\beta m^3$$

$$\beta^2 n^2 + 9\alpha^2 m^4 + 6\alpha\beta n m^2 - 36\beta m^3$$

Si $(\beta n + 3\alpha m^2)^2 - 36\beta m^3 > 0$ Hyp.

$= 0$ Parab.

< 0 Ellipse

Remarque Si $\beta = 0$, on a

$$\alpha y(3m^2 x + ny) - 3my^2 = 0$$

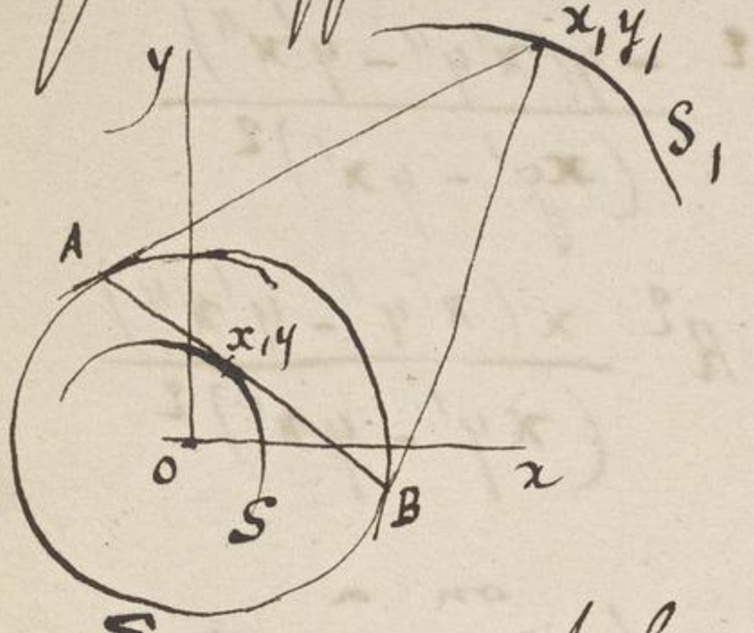
ou $y = 0$ et

$$\alpha(3m^2 x + ny) - 3my = 0.$$

équat d'une droite.

Donc quand le point P est sur la tang commune en O, les points de contact sont en ligne droite.

Construire le centre de courbure d'une courbe quand on connaît celui de sa transformée par polaires réciproques par rapport à un cercle



Soit Σ un cercle dont le centre est en O. S et S_1 deux courbes transformée l'une de l'autre par polaires réciproques.

La polaire d'un point x_1, y_1 de S_1 est la tangente en un point x, y de S.

Polaire de x_1, y_1 par rapport au cercle Σ de rayon R est

$$x_1 X + y_1 Y + R^2 = 0 .$$

La tang en (x, y) à la courbe S est

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} \quad \text{ou} \quad Xy' - Yx' + yx' - xy' = 0 .$$

Identif ces 2 équat

$$(1) \qquad \frac{x_1}{y'} = \frac{y_1}{-x'} = \frac{R^2}{-y'x + yx'} .$$

Soient ρ et ρ_1 les ray de courb de S et S_1 aux points (x, y) et (x_1, y_1).

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \quad , \quad \rho_1 = \frac{(x_1'^2 + y_1'^2)^{3/2}}{x_1'y_1'' - y_1'x_1''} .$$

~~Calcu~~ Sous avoir la relat entre ρ et ρ_1, calculons x_1 y_1 x_1' y_1' x_1'' y_1'' en fonct de ~~x, y, x', y'~~

$x_1, y_1, x', y', x'', y''$. On a

$$x_1 = R^2 \frac{y'}{xy' - yx'} \qquad y_1 = R^2 \frac{-x'}{xy' - yx'}$$

$$x_1' = R^2 \frac{y''(xy' - yx') - y'(xy'' - yx'')}{(xy' - yx')^2} = R^2 \frac{-y(x'y'' - y'x'')}{(xy' - yx')^2}$$

$$y_1' = R^2 \frac{-x''(xy' - yx') + x'(xy'' - yx'')}{(xy' - yx')^2} = R^2 \frac{x(x'y'' - y'x'')}{(xy' - yx')^2}$$

Posons $\dfrac{x'y'' - y'x''}{(xy' - yx')^2} = A$, on a

$$x_1' = -R^2 Ay \qquad y_1' = R^2 Ax$$

$$x_1'' = -R^2(A'y + Ay') \qquad y_1'' = R^2(A'x + Ax').$$

D'où $x_1'y_1'' - y_1'x_1'' = R^4 Ay(A'x + Ax') - R^4 Ax(A'y + Ay') = R^4 A^2 (xy' - yx')$

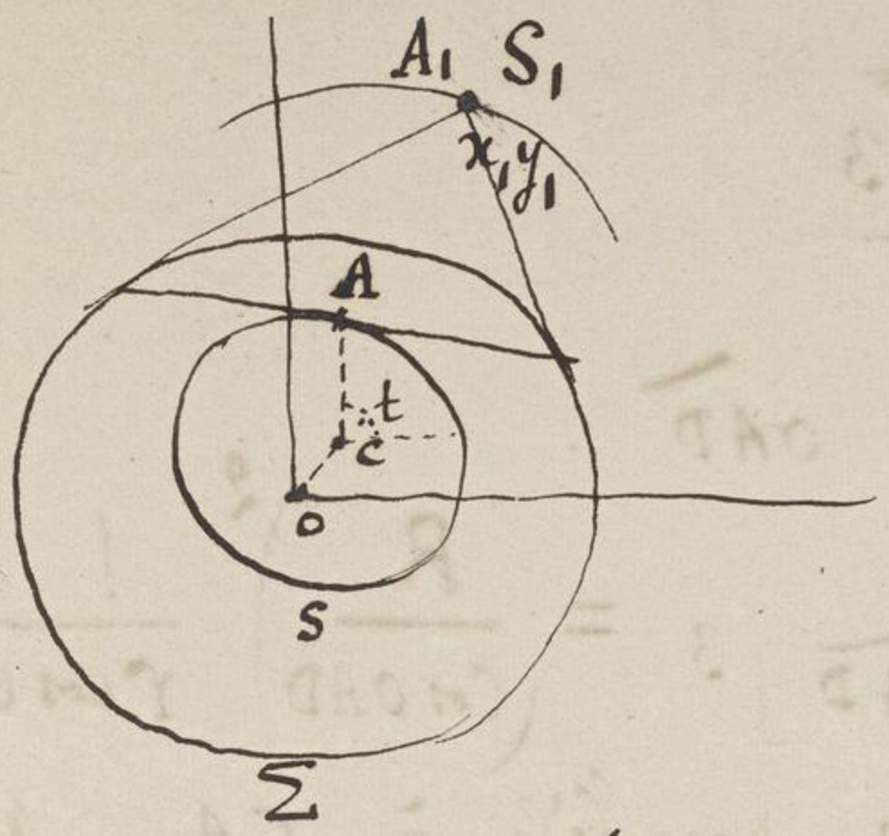
Sa courbure

$$\rho_1 = \frac{R^6 A^3 (x^2 + y^2)^{3/2}}{R^4 A^2 (xy' - yx')} = R^2 A \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{xy' - yx'} = R^2 \cdot \frac{x'y'' - y'x''}{(xy' - yx')^3} (x^2 + y^2)^{3/2}$$

D'où $\rho\rho_1 = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \cdot R^2 \cdot \dfrac{x'y'' - y'x''}{(xy' - yx')^3} (x^2 + y^2)^{3/2}$

c.à.d. $\rho\rho_1 = R^2 \left[\dfrac{\sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}}{xy' - yx'} \right]^3$

Applicat - Centre de courbure d'une conique considérée comme transformée par polaires réciproques d'un cercle



Dans ce cas, S est un cercle de rayon r ($\rho = r$) et de centre $C(a,b)$

On a pour ce cercle

$x - a = r\cos t$

$y - b = r\sin t$

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + r^2 + 2r(a\cos t + b\sin t)$$

$$x' = -r\sin t \quad , \quad y' = r\cos t \quad , \quad x'^2 + y'^2 = r^2$$

Donc $$\rho_1 = R^2 \left[\frac{r\sqrt{a^2+b^2+r^2+2r(a\cos t + b\sin t)}}{a\cos t + b\sin t + r} \right]^3$$

[car $xy' - yx' = (a + r\cos t)r\cos t + (b + r\sin t)r\sin t$

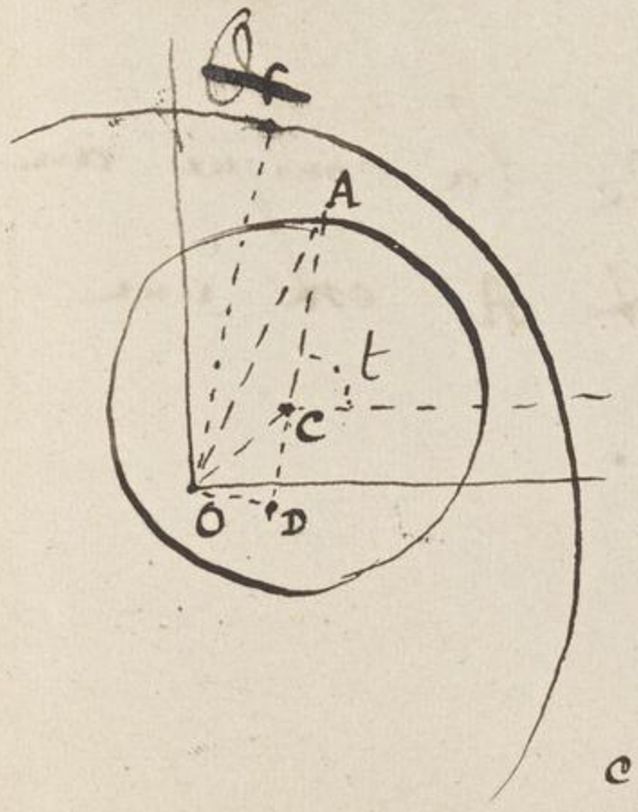
$= (a\cos t + b\sin t + r)r$].

Mais a et b étant les coord de C, $a\cos t + b\sin t$ est la proj. du chemin des coord. ou, ce qui revient au même, de OC sur CA, c'est donc CD.

Par suite $a\cos t + b\sin t + r = DA$.

Quant à la quant sous le radical, c'est $\overline{OC}^2 + \overline{CA}^2 + 2\,CA.CD = \overline{OA}^2$,

donc $\sqrt{\quad} = OA$.



Par suite

$$r\rho_1 = R^2 \left(\frac{OA}{DA}\right)^3$$

Mais $DA = OA \cos \widehat{OAD}$.

Donc $$\rho_1 = \frac{R^2}{r}\cdot\frac{1}{[\cos \widehat{OAD}]^3} = \left(\frac{R}{\cos OAD}\right)^2 \cdot \frac{1}{r \cos OAD}$$

Par O, menons OB parallèle à CA, puis la tang. BE à la circonf Σ, jusqu'à sa rencontre en E avec OA prolongé ; on a

$$OB = R = OE \cos \widehat{BOE} = OE \cos \widehat{OAD}$$

d'où $$\frac{R}{\cos OAD} = OE.$$

Puis projetons C sur OA en F, on a

$$AF = r \cos OAD.$$

Donc $$\rho_1 = \frac{\overline{OE}^2}{AF}.$$

Ainsi le ray. de courbure de la conique au point A_1 correspondant au point A est une 3ème proport à AF et OE.

Calculer le rayon de courbure de la courbe

$$x(x^2+by^2) = cx^2 + dy^2 .$$

au point où elle coupe l'axe des x

(au sommet, non au point double).

Soit $\varphi(x,y) =$ ~~0 le 1er membre~~ l'équat de la courbe On a

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 .$$

Le point considéré est un sommet sur ox

La tang en ce point est verticale : on a donc

$\frac{dy}{dx} = \infty$. Donc si $\frac{d\varphi}{dx}$ est fini, ce qui

a lieu en général et ici en particulier,

il faut $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, d'après (1). Mais alors,

(2) montre que $\frac{dy}{dx^2}$ est infini également

lorsque les dérivées du second ordre de φ sont

finies, comme cela a lieu ici. La formule

ordinaire $\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ devient donc illusoire

On pourrait en chercher la vraie valeur.

Mais il est avantageux de la transformer dans

la suivante (Bertrand I, Calcul Diff.)

$$(1)\quad \rho = \frac{\left[1+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}$$

Calculons les quantités qui y entrent.

$\frac{d\varphi}{dx}=0$ l'équat peut s'écrire

$$x^3+6xy^2-cx^2-dy^2=0$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=3x^2+by^2-2cx\ ,\qquad \frac{d\varphi}{dy}=2bxy-2dy$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=6x-2c\ ,\qquad \frac{d^2\varphi}{dy^2}=2bx-2d$$

$$\frac{d^2\varphi}{dxdy}=2by\ .$$

La formule (1) donne toujours ρ aux points où $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont infinis.

$\frac{d\varphi}{dy}=0$. Il reste $\rho=\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^3}{\frac{\partial^2\varphi}{dy^2}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}=$

$$\rho=\left(\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d^2\varphi}{dy^2}}\right)_{\substack{x=c\\y=0}}=\frac{\frac{1}{2}c^2}{2bc-2d}=\frac{c^2}{2(bc-d)}\ .$$

La formule donnera en général immédiatement le rayon de courbure en un sommet sur ox. —

Appliquons la formule $\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$.

Dérivons l'équation deux fois :

$$3x^2 + by^2 + 2bxyy' - 2cx - 2dyy' = 0$$

$$6x + 2byy' + 2byy' + 2bxy'^2 + 2bxyy'' - 2c - 2dy'^2 - 2dyy'' = 0$$

ou $3x + 2byy' + bxy'^2 + bxyy'' - c - dy'^2 - dyy'' = 0$

La 1ère donne

$$y' = \frac{2cx - 3x^2 - by^2}{2y(bx - d)}$$

$$y'' = \frac{c + dy'^2 - 3x - 2byy' - bxy'^2}{y(bx - d)}$$

Avant de substt ces val dans la formule qui donne ρ, on peut ~~les~~ y faire $x = c$, et même aussi $y = 0$ mais seulement dans leur numérateur afin de ne pas introduire dès le début les valeurs infinies. On a ainsi

~~$y' = \frac{+by^2}{2y(bc-d)} = \frac{-by}{\dots}$~~ $y' = \frac{-c^2}{2y(bc-d)}$

$$y'' = \frac{-2c + (d-bc)y'^2}{y(bc-d)} = \frac{-2c - \frac{c^4}{4y^2(bc-d)}}{y(bc-d)} =$$

$$y'' = \frac{-8cy^2(bc-d) - c^4}{4y^3(bc-d)^2}$$

et, en faisant $y = 0$ au numérateur

$$y'' = \frac{-c^4}{4y^3(bc-d)^2}.$$

Donc

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \frac{c^4}{4y^2(bc-d)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{c^4}{4y^3(bc-d)^2}}$$

$$\rho = \pm \frac{\left[4y^2(bc-d)^2 + c^4\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[2y(bc-d)\right]^3} \cdot \frac{4y^3(bc-d)^2}{c^4}$$

$$\rho = \pm \left[\frac{c^2}{2y(bc-d)}\right]^3 \cdot \frac{4y^3(bc-d)^2}{c^4}$$

$$\rho = \pm \frac{(c^2)^3 \; 4y^3(bc-d)^2}{8y^3(bc-d)^3 \; c^4} = \pm \frac{c^2}{2(bc-d)}$$

(8)

Poney.

1re Question

Trouver le maximum et le minimum de l'expression : $u = x^2+y^2+z^2+t^2$, où x, y, z, t sont des variables liées par les relations

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2=1$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t=0$$

Discuter pour savoir si ce maximum & ce minimum existent.

Le signe Σ indiquant des sommes de termes analogues en x, y, z, t j'écrirai en abrégeant :

$$u = \Sigma x^2$$
$$1 = \Sigma a x^2$$
$$0 = \Sigma \alpha x$$

Les valeurs des x variables convenant à un max. ou minimum donnent $du=0$ ou :

$$\Sigma x\,dx = 0$$

On a aussi $\Sigma a x\,dx = 0$

$$\Sigma \alpha\,dx = 0$$

D'où en appelant λ et μ 2 indéterminées :

$$\Sigma (x + \lambda a x + \mu\alpha)\,dx = 0$$

Je détermine λ et μ, par les conditions :

$$(1+a\lambda)x + \mu\alpha = 0$$
$$(1+b\lambda)y + \mu\beta = 0$$

considérant pour le moment z et t comme les variables indépendantes en fonction desquelles s'expriment x et y par $1=\Sigma a x^2$ & $0=\Sigma \alpha x$ il vient, en annulant les coefficients de dz et dt,

les équations suivantes :

$$(1+\lambda c)z + \mu y = 0$$
$$(1+\lambda d)t + \mu \delta = 0$$

On tire des 4 équations en λ, μ les valeurs de x, y, z, t et ~~supp~~ reportant dans $\Sigma \alpha x = 0$ il vient, après suppression du facteur commun μ, la condition :

$$\sum \frac{\alpha^2}{1+a\lambda} = 0$$

équation déterminant λ.

Or des mêmes équations, par addition après multiplication par les facteurs respectifs x, y, z, t on tire :

$$\sum \{(1+\lambda a)x^2 + \mu \alpha x\} = 0$$

D'où $u + \lambda = 0$ d'après $\Sigma x^2 = u$ $\Sigma a x^2 = 1$ $\Sigma \alpha x = 0$

Donc l'équation qui donne le maximum ou minimum de u est l'équation

$$\sum \frac{\alpha^2}{1-au} = 0$$

qui sous forme entière est du 3ème degré.

Elle a ses 3 racines réelles. Supposons

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{d}$$

Posons $u = \frac{1}{v}$ L'équation

$$\sum \frac{\alpha^2}{v-a} = 0$$

a toutes ses racines réelles, car sa dérivée $-\sum \frac{\alpha^2}{(v-a)^2}$ étant constamment négative, cette fonction, qui est continue

Dans les intervalles de a à b, de b à c, de c à d et infinie pour ces valeurs limites, étant constamment décroissante dans ces 3 intervalles, doit passer 3 fois par zéro ; cela prouve que u a trois racines réelles l'une inférieure entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, l'autre entre $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$, et une supérieure entre $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$. Ces 3 valeurs peuvent correspondre à des maxima ou minima : la condition est que d^2u ne change pas de signe. Or on a : $\frac{1}{2} d^2u = \Sigma(dx^2 + x d^2x)$

On a aussi : $\Sigma(ax\, d^2x + a\, dx^2) = 0$

$$\Sigma \alpha\, d^2x = 0$$

Ajoutons après multiplication par λ et μ respectivement des 2 dernières équations il vient :

$$\frac{1}{2} d^2u = \Sigma\left\{(1+\lambda a)\, dx^2 + \left(x(1+a\lambda) + \mu\alpha\right) d^2x\right\}$$

mais on a : $x(1+a\lambda) + \mu\alpha = 0$ etc...

Donc :

$$\frac{1}{2} d^2u = \Sigma(1+\lambda a)\, dx^2 = \Sigma(1-au)\, dx^2$$

Mais dz et dt s'expriment en fonction de dx et dy. Considérons dx et dy comme les variables indépendantes, il viendra une expression de la forme :

$$\frac{1}{2} d^2u = A\, dx^2 + A' dy^2 + 2B\, dx\, dy$$

les variations dx, dy étant arbitraires et infiniment petites. On a donc :

$$\frac{1}{2} d^2u = \frac{1}{A}\left(A dx + B dy\right)^2 + \left(A' - \frac{B^2}{A}\right) dy^2$$

Donc d^2u conservera le même signe si $AA' - B^2 > 0$ et cela prouve que A et A' doivent être de même signe. Si $dy = 0$ d^2u a le signe de A donc si A est positif il y aura un minimum puisque la variation de u est positive ; si A et A' sont négatifs il y aura un maximum, pour la raison inverse.

Reste à calculer A A' & B. Or on a :

$$ax\,dx + by\,dy + cz\,dz + d\,t\,dt = 0$$
$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz + \delta\,dt = 0$$

~~ou u désignant le minimum envisagé~~,

$$\sum \frac{a\alpha}{1 - au}\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \sum \frac{\alpha^2}{1 - au}\,dx = 0$$

Posons $\frac{\alpha\,dx}{1 - au} = d_1 x$ etc... il vient :

$$a\,d_1 x + b\,d_1 y + c\,d_1 z + d\,d_1 t = 0$$
$$\alpha\,d_1 x + \beta\,d_1 y + \gamma\,d_1 z + \delta\,d_1 t = 0$$

Dou : $$d_1 t = \frac{(\gamma a - c\alpha)\,d_1 x + (\gamma b + \beta c)\,d_1 y}{\gamma d - \delta c}$$

D'où l'on tire :

$$-(\gamma dt - \delta cz)\,dt = (\gamma ax - \alpha cz)\,dx + (\gamma by - \beta cz)\,dy$$
$$-(\delta cz - \gamma dt)\,dz = (\delta ax - \alpha dt)\,dz + (\delta by - \beta dt)\,dy$$

Or on a pour rapt des valeurs proportionnelles à $\frac{\alpha}{1-au}$, $\frac{\beta}{1-bu}$ etc

Donc il vient:

$$-dt = \frac{\alpha(a-c)(1-du)}{\delta(d-c)(1-au)}dx + \frac{\beta(b-c)(1-du)}{\delta(d-c)(1-bu)}dy$$

$$-dz = \frac{\alpha(a-d)(1-cu)}{\gamma(c-d)(1-au)}dx + \frac{\beta(b-d)(1-cu)}{\gamma(c-d)(1-bu)}dy$$

Faisant abstraction du facteur $\frac{1}{\delta^4\gamma^4(d-c)^4(1-au)^2(1-bu)^2}$

On obtient:

$$\left\{(1-au)^3\gamma^2\delta^2(d-c)^2+(1-cu)^3\alpha^2\delta^2(a-d)^2+(1-du)^3\alpha^2\gamma^2(a-c)^2\right\}\times$$

$$\left\{(1-bu)^3\gamma^2\delta^2(d-c)^2+(1-cu)^3\beta^2\delta^2(b-d)^2+(1-du)^3\beta^2\gamma^2(b-c)^2\right\}\Phi -$$

$$\Phi - \left\{(a-c)(b-c)(1-du)^2+(a-d)(b-d)(1-cu)^2\right\}\alpha^2\beta^2 > 0 \quad \text{pour} \quad AA'-B^2>0.$$

Bien, en approfondissant la discussion, vous devez trouver:

1° que l'on n'aurait pour x y z t des valeurs telles que si $u>0$.

2° que si on a 3 racines positives la plus petite est un min. la plus grande un max. la moyenne n'est ni un min. ni un max.

3° que si on a 2 racines positives la plus petite est un min., la plus grande n'est ni un min. ni un max.

4° que si on a 1 seule racine positive elle est un min.

Condition pour que les trajectoires orthogonales
des courbes $f(x,y)=c$ tournent leur concavité
vers les y positifs :

On a $f'_x\,dx+f'_y\,dy=0$

D'où y' étant le coefficient angulaire des
trajectoires orthogonales :

$$f'_x y' - f'_y = 0$$

C'est leur équation différentielle.

On a par différentiation :

$$(f''_{x^2}+f''_{xy}y')y' - (f''_{xy}+f''_{y^2}y') + f'_x y'' = 0$$

$$(f''_{x^2}f'_x + f''_{xy}f'_y)f'_y - (f''_{xy}*f'_x + f''_{y^2}f'_y)f'_x + f'^3_x y'' = 0$$

ou en l'écrivant :

$$\begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{x^2} & f'_x \\ f''_{y^2} & f''_{xy} & f'_y \\ -f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix} f'_x = f'^4_x y'' > 0$$

$$\begin{vmatrix} \beta''_{xy} & \beta''_{x^2} & \beta'_x \\ \beta''_{y^2} & (-\beta''_{xy}) & \beta'_y \\ \beta'_x & \beta'_y & 0 \end{vmatrix}$$

car y'' est positif, si la concavité est
tournée vers les y positifs ; donc la
condition est :

$$f'_x \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{x^2} & f'_x \\ f''_{y^2} & f''_{xy} & f'_y \\ -f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Vous pouviez donner à votre déterminant une forme plus symétrique et l'écrivant :

Bien peut-être y avait il avantage dans ce cas à changer de variable, en posant par exemple $x = \rho \cos\omega$ $y = \rho \sin\omega$ les calculs étaient un peu simplifiés.

Calculer les maximum & minimum de

$$z = \frac{e^{-x^2} + x^2 + y^2}{e^{-y^2} + x^2 + y^2} = \frac{N}{D}$$

on a : $z'_x = \dfrac{(-2x e^{-x^2} + 2x)(e^{-y^2} + x^2 + y^2) - 2x(e^{-x^2} + x^2 + y^2)}{(e^{-y^2} + x^2 + y^2)^2}$

$$z'_y = \frac{2y(e^{-y^2} + x^2 + y^2) - (e^{-x^2} + x^2 + y^2)(-2y e^{-y^2} + 2y)}{(e^{-y^2} + x^2 + y^2)^2}$$

$$z'_x = \frac{2x}{D^2} \cdot \left((1 - e^{-x^2}) D - N\right)$$

$$z'_y = \frac{2y}{D^2} \left(-(1 - e^{-y^2}) N - D\right)$$

Pour un minimum ou maximum on a :

$$x = 0 \begin{cases} y = 0 \text{ ou} \\ z = -(1 - e^{-y^2})^{-1} = \dfrac{1 + y^2}{e^{-y^2} + y^2} \end{cases}$$

$$\text{ou } z = \alpha 1 - e^{-x^2} \begin{cases} y = 0 \text{ ou} \\ z = -(1 - e^{-y^2})^{-1} \end{cases}$$

1ère solution $x = y = 0$. On a $z = 1$

$$z = \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \varepsilon + x^2 + y^2}{1 - y^2 + \frac{y^4}{2} + \varepsilon_1 + x^2 + y^2} = 1 + y^2 - x^2 + \dots$$

Donc $z - 1 = y^2 - x^2 + \dots$

Par suite $z = 1$ n'est pas un maximum ou un minimum.

2e solution. L'équation $-(1 - e^{-y^2})^{-1} = \dfrac{1 + y^2}{e^{-y^2} + y^2}$ a une racine ~~celle~~ positive ~~unique~~ ~~trouvée~~ ~~$\alpha > 1$~~. ou e^{-y^2} $e^{-y^2} + y^2$

on a alors $z = -(1 - e^{-y^2})^{-1}$

La 3e solution se ramène à la seconde en changeant z en $\frac{1}{z}$.

4e hypothèse. Ona:

$$(1-e^{-x^2}) = -(1-e^{-y^2})^{-1}$$

$$(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}) - 1 = 0$$

Posons $e^{-x^2} = u$ $e^{-y^2} = v$

ona $uv - u - v = 0$

et $(1-u)(v+x^2+y^2) = u + x^2 + y^2$

ou $v + x^2 + y^2 - uv - ux^2 - uy^2 = u + x^2 + y^2$

ou $uv + u - v + ux^2 + uy^2 = 0$

ou $u + v + u - v + ux^2 + uy^2 = 0$

ou $2u + ux^2 + uy^2 = 0$

ou $u = 0$ et $2 + x^2 + y^2 = 0$

ou $e^{-x^2} = 0$ $e^{x^2} = \infty$ x infini

De même y est infini

La fonction est alors voisine de $\frac{e^{-x^2}}{e^{-y^2}}$

ou de $e^{y^2-x^2}$ valeur

indéterminée pour x et y infinis.

Il ne peut donc y avoir de maximum ou de minimum que dans les 2 cas précédents et si dans l'un on a un maximum dans l'autre on a un minimum.

Dans le cas où l'on a $x = 0$ $z_1 = \frac{1+y^2}{1+e^{-y^2}}$

On a $z - z_1$ une valeur principale qui est aussi celle de $z - \frac{1+y^2}{1+y^2+e^{-y^2}}$ car x est infiniment petit. Alors $z - z_1 = \frac{1}{A^2}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + x^2 + y^2 - 1 - y^2\right) > 0$ donc minim

Maximum et minimum de $F = \frac{e^{-x^2+x^2+y^2}}{e^{-y^2+x^2+y^2}}$.

On change de variables : on prend pour nouvelles variables $x^2+y^2=\rho^2$ et l'angle ω de ce rayon vect avec ox ; on a $x = \sqrt{\rho}\cos\omega$, $y = \sqrt{\rho}\sin\omega$.

Mais remarque : Suppose que il y ait maximum ou minimum ~~pour~~ correspondant aux val ρ et ω, pour ~~cela~~ il faut ~~que~~ la fonct $F_1(\rho,\omega)$, qui est la transformée de F par la substitution, la fonct F sera-t-elle maxim ou min pour les val correspond de $\frac{x}{\sqrt{\rho}}$ et $\frac{y}{\sqrt{\rho}}$?

Pour répondre à cela, remarquons qu'on a

$$\frac{dF_1}{d\rho} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\rho}$$

$$\frac{dF_1}{d\omega} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega} + \frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{d\omega}.$$

Or le max. ou min de $F_1(\rho,\omega)$ exige $\frac{dF_1}{d\rho}=0$, $\frac{dF_1}{d\omega}=0$.

Pour qu'on ait en même temps $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, il faut $\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dy}{d\rho} \\ \frac{dx}{d\omega} & \frac{dy}{d\omega} \end{vmatrix} \gtrless 0$. Or ce déterminant est

$\frac{1}{2}(\cos^2\omega + \sin^2\omega) \gtrless 0$. Donc, etc.

Cherchons les max. et min. Posons $F_1 = \frac{X}{Y}$; on a

$$dF_1 = \frac{dF}{d\rho}d\rho + \frac{dF}{d\varphi}d\varphi = \frac{\left(Y\frac{dX}{d\rho} - X\frac{dY}{d\rho}\right)d\rho + \left(Y\frac{dX}{d\varphi} - X\frac{dY}{d\varphi}\right)d\varphi}{Y^2}$$

$=0$

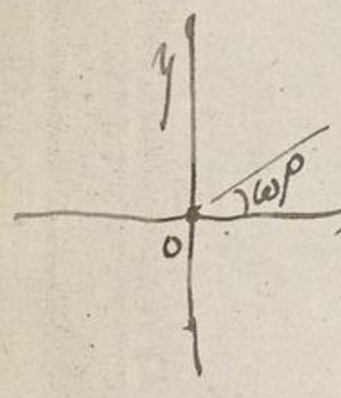
quels que soient dx et dy — Donc

$$\frac{X}{Y} = \frac{\frac{dX}{d\rho}}{\frac{dY}{d\rho}} = \frac{\frac{dX}{d\varphi}}{\frac{dY}{d\varphi}}$$, ce qui donne

$$F_1 = \frac{X}{Y} = \frac{e^{-\rho\cos^2\omega} + \rho^2}{e^{-\rho\sin^2\omega} + \rho} = \frac{e^{-\rho\cos^2\omega}\cdot(-\cos^2\omega)+1}{e^{-\rho\sin^2\omega}(-\sin^2\omega)+1} = \frac{e^{-\rho\cos^2\omega}\cdot 2\rho\sin\omega\cos\omega}{e^{-\rho\sin^2\omega}\cdot(-2\rho\sin\omega\cos\omega)}$$

(Remarq: qu'on ne peut supprimer les fact communs sans ~~Or $F_1 = \frac{X}{Y}$ ne change pas quand on change ω en $-\omega$~~ ~~supprimer de solut~~ ~~ou ω en $\pi - \omega$~~ On suppose ρ positif ($x^2+y^2=\rho$).

La fract $\frac{e^{-\rho\cos^2\omega} + \rho}{e^{-\rho\sin^2\omega} + \rho}$ est toujours > 0.



La dern fract toujours < 0, à moins que $\sin\omega$ ou $\cos\omega$ ne soit nul. On ne peut donc par avoir égalité entre ces 2 fract, c.à.d. qu'il ne peut y avoir ni maximum ni minimum, si ce n'est pour $\sin\omega = 0$ ou $\cos\omega$, c.à.d. pour un point situé sur l'un des axes ox ou oy. — On peut montrer ce résultat directement : remarquons tout d'abord qu'on peut faire varier ω seulem dans le 1er quadrant, car $F_1 = \frac{e^{-\rho\cos^2\omega} + \rho}{e^{-\rho\sin^2\omega} + \rho}$ ne change pas

quand on change ω en $-\omega$, ni quand on le change en $\pi - \omega$. La fract proposée a touj. ses 2 termes positifs, le numér. croît touj. quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et le dénom. décroît, donc la fract croît constamment. Elle n'a donc ni maximum ni minimum. — Dans le cas où $\sin\omega\cos\omega = 0$, on a $\sin\omega = 0$ ou $\cos\omega = 0$

Soit $\cos\omega = 0$,

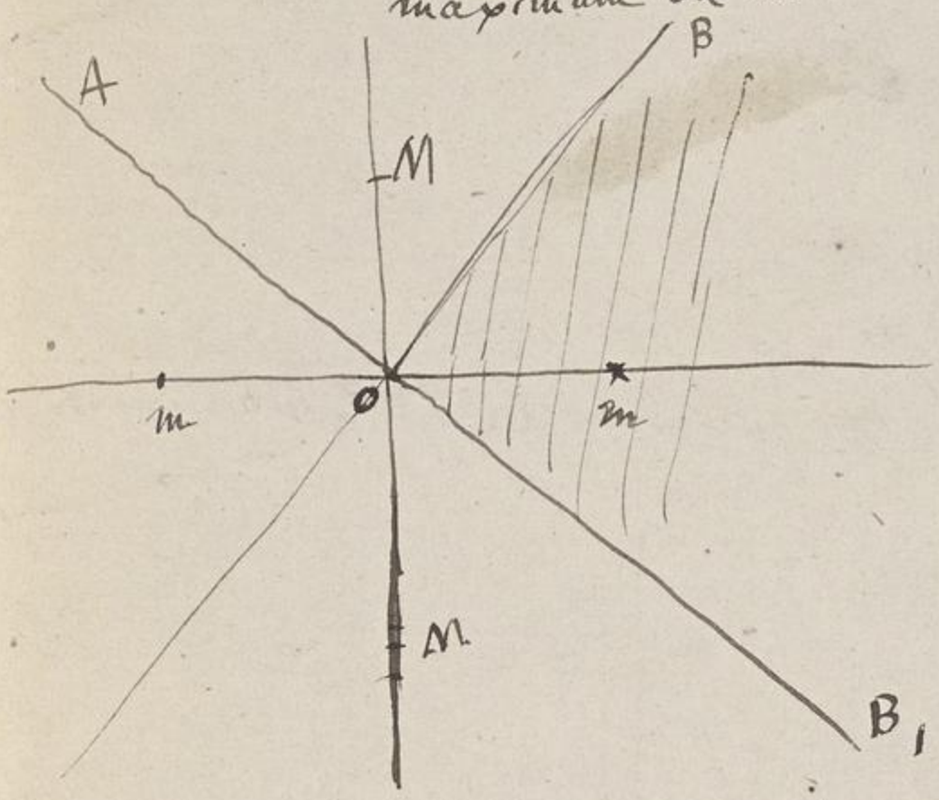
$$\frac{e^{-\rho} + \rho}{1 + \rho} = \frac{-e^{-\rho} + 1}{1} = \frac{1 + \rho}{2 + \rho}, \text{ d'où}$$

$$e^{-\rho}(2 + \rho) - 1 = 0$$

Cette équat. donne $e^{\rho} = 2 + \rho$. A-t-elle des rac. positives en ρ ? Car n'oublions pas que ρ est positif ; appliq. le théor. de Rolle, l'éq. dérivée est $e^{\rho} - 1 = 0$, $\rho = 0$ est rac. de cette éq. ; substituons 0 et $+\infty$ dans $e^{\rho} - 2 - \rho = 0$

on a $+$ $+$

Donc une rac. réelle dans l'intervalle. Il y a donc maximum ou minimum pour cette valeur. Pour $\cos\omega = 0$, on aurait la même équat. Voyons si cette val. correspond à un max. ou un minimum ?



Repren $F = \frac{e^{-x^2} + x^2 + y^2}{e^{-y^2} + x^2 + y^2}$

Pour des val. ρ très voisines de zéro, $x^2 + y^2$ est très voisin de 0, F tend vers $\frac{e^{-x^2}}{e^{-y^2}} = e^{y^2 - x^2}$

Egalant cette fract à 2, on a une surf. Pour $x = y = 0$, on a $z = 1$. Prenons pour plan des xy le plan tg à l'origine, il coupe la surf. suiv. 2 droites réelles, les bissectrices des angles des axes. — Pour $x = y = 0$, $z = 1$ la fonct est 1 ; pour $x \neq y$ inf., elle tend vers 1, $\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$. Pour $y < x$, c.à.d. dans l'angle haché BOB_1, $z < 1$. Pour $y = x$, c.à.d. pour points situés sur bissectr., $z = 1$. Ainsi la fonction part

de la valeur 1, devient moindre que 1, et redevient
égale à 1, mais elle est toujours restée positive.

Donc elle a eu un minimum dans l'angle haché
minima qui correspond à $\sin\omega = 0$, c.à.d. sur ox, c'est la racine de $e^p = 2+p$
De même dans l'angle opposé par le sommet.

Dans l'angle AOB, elle a au contraire un
maximum, de même dans l'opposé au sommet; la valeur
de p est égale à la précédente, c'est la racine de $e^p = 2+p$.

Points d'une courbe pour lesquels le cercle osculateur
a un contact du 2e ordre (sommets de la courbe).

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$$

$$\begin{cases} 2xx'+2yy'+\alpha x'+\beta y' = 0 \\ 2xx''+2yy''+2x'^2+2y'^2+\alpha x''+\beta y'' = 0 \\ 6x'x''+6y'y''+2xx'''+2yy'''+\alpha x'''+\beta y''' = 0 \end{cases}$$

Elim α, β, γ. γ n'entre que dans la 1ère. Supprimons-la.

$$\begin{vmatrix} xx'+yy' & x' & y' \\ xx''+yy''+x'^2+y'^2 & x'' & y'' \\ 3(x'x''+y'y'')+xx'''+yy''' & x''' & y''' \end{vmatrix} = 0 \quad , \text{ ou}$$

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 0 & x' & y' \\ x'^2+y'^2 & x'' & y'' \\ 3(x'x''+y'y'') & x''' & y''' \end{vmatrix} = 0 .$$

Applicat à l'Ellipse. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

$x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$

$x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\sin t$

$x''' = +a\sin t$, $y''' = -b\cos t$

On a
$$\begin{vmatrix} 0 & -a\sin t & b\cos t \\ a^2+b^2 & -a\cos t & -b\sin t \\ 3(a^2-b^2)\sin t\cos t & a\sin t & -b\cos t \end{vmatrix} = 0$$

ajoutons la 1ère et la 2e ligne :

$$\begin{vmatrix} 3(a^2-b^2)\sin t\cos t & 0 & 0 \\ a^2+b^2 & -a\cos t & -b\sin t \\ 3(a^2-b^2)\sin t\cos t & a\sin t & -b\cos t \end{vmatrix} = 3(a^2-b^2)ab\sin t\cos t = 0$$

ce qui donne $t=0$ ou $t=\frac{\pi}{2}$; on obtient bien ainsi les sommets de l'ellipse.

Cherch. les points pour lesq. le rayon de ~~mini~~ courbure est minimum ou maximum.

$$R = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''} = \frac{X^m}{Y}.$$

Pour avoir le minim de $\frac{X^m}{Y}$, on pose

$$\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''} = \frac{X^m}{Y} = \frac{m X^{m-1}\frac{dX}{dt}}{\frac{dY}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}2(x'x''+y'y'')}{x'y'''-y'x'''}$$

X ou bien on peut dire; on a $\frac{mX'}{X} = \frac{Y'}{Y}$! ou

$\frac{3(x'x''+y'y'')}{x'^2+y'^2} = \frac{x'y'''-y'x'''}{x'y''-y'x''}$

D'où, en div. par $x'^2+y'^2$ qui ne peut être nul que pour $x'=0$, $y'=0$, c.à.d. en un point singulier, on a

$$(x'^2+y'^2)(x'y'''-y'x''') - (x'y''-y'x'')[3\cdot(x'x''+y'y'')] = 0$$

Or c'est précisément l'équat (1) développée.

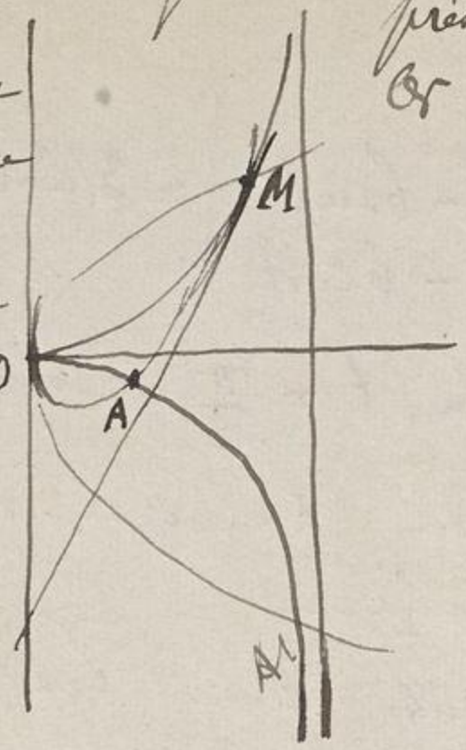
Donc les points cherchés sont les sommets.

Les sommets d'une courbe sont aussi les points pour lesquels la développée a un point de rebroussement. Cela résulte géométriquement de ce que les points de maxim ~~ou de minim du rayon de courbure~~ répondent généralement à des points de rebroussement de la développée.

La développée d'une courbe ne peut avoir son rayon de courbure infini que pour un point de rebroussement de la courbe donnée.

Remarque

* Pour que ce fait se présentât, il faudrait que le rayon de courbure passât par un maxim. ou un minimum, ou bien que le cercle osculat ait un contact du 3e ordre en un certain point de la courbe.



Développée de la cissoïde. Cette développée ne présente pas de point de rebroussement. *

Or cissoïde est $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$

La déval. est le lieu des centres de courbure. Cherchons par le cercle $x^2+y^2 = \alpha x + \beta y + \gamma$.

La cissoïde peut s'écrire

$$x(y^2+x^2) = ay^2.$$

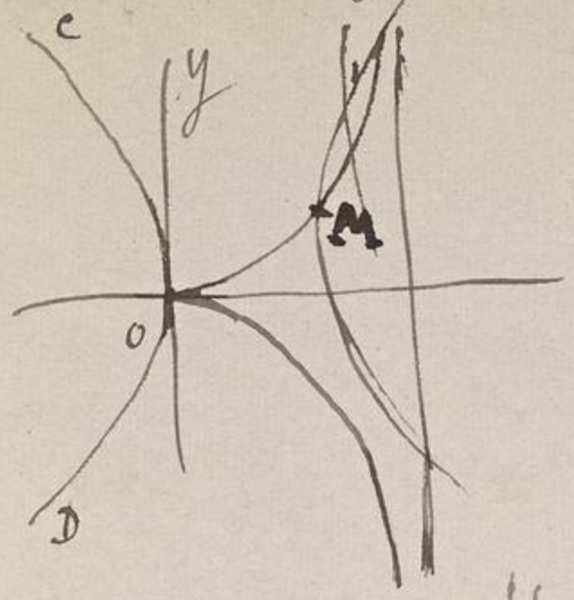
~~Pour l'interser de ces 2 courbes on a du 6ème degré.~~
~~mais il y a 2 points à l'infini, et 4 à dist finie.~~

Substit x^2+y^2. On a

$x(\alpha x+\beta y+\gamma) = ay^2$, conique qui passe par l'origine. Et par les points communs à la cissoïde et au cercle). Or la cissoïde ne peut avoir avec le cercle en M (ou ce qui revient au même avec la conique) un contact du 3e ordre, c.à.d. les 4 points à dist finie confondus en un seul.

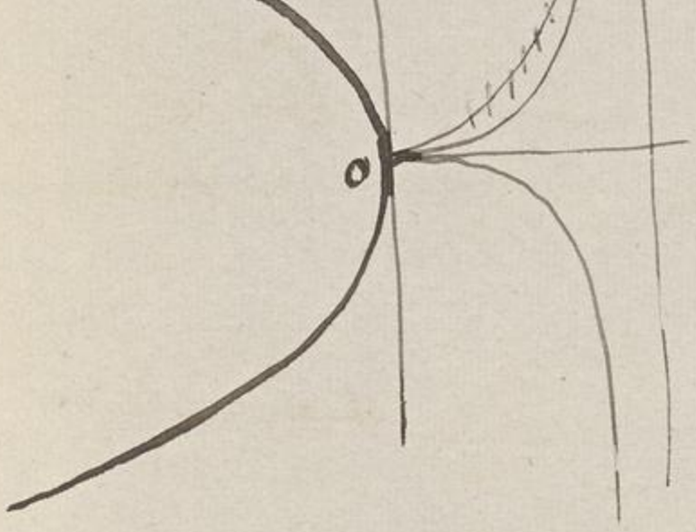
Car ces points sont sur la conique et sur la cissoïde; or l'inters de ces courbes est du 6e degré; mais la conique est tang à oy et à la tang en M; supp que ce soit une ellipse, elle va forcément couper en un point A sur la branche inférieure; puis en O elle a 2 points d'intersect avec la cissoïde. Nous avons dit d'ailleurs que l'intersect du 6e degré. Donc en M, il ne peut y en avoir que 3.

Si c'est une hyperbole, supp que ce soit une même branche qui passe en O et M, alors 2 points en O, un en A', un en M.



Si ce sont 2 branches distinctes, on a un triple point d'inter en M, et l'autre branche d'hyperb est en COD à gauche de Oy

Donc il ne peut y avoir de Contact avec un cercle, la cissoïde n'a pas de sommets, du 2e ordre c.à.d. que R n'a pas de minimum ni de maximum et la développée n'a pas de point de rebroussement. Elle a une forme générale analogue à une parabole ; elle est tout entière à gauche de oy.



On pourrait étudier sa forme dans le voisinage de O.

La développée n'a d'ailleurs pas de point d'inflexion, l'angle de la normale à la cissoïde avec ox, et par suite l'angle de la tang. à la développée avec ox ne présentant ni maximum ni minimum.

1

Pomey.

Exercices d'Analyse.

Calculer le volume du solide commun à la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ et au cylindre $x^2+y^2=x$. — Calculer aussi la portion de surface du cylindre intérieure à la sphère et la portion de surface de la sphère intérieure au cylindre.

I. Volume du solide commun à $x^2+y^2+z^2=1$ et $x^2+y^2=x$.

Adoptons les coordonnées semi-polaires $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Le volume est donné, comme on sait, par la formule

$$V=\iint z \,\mathrm{mod.}\,D\,.\,du\,dv\ ,$$

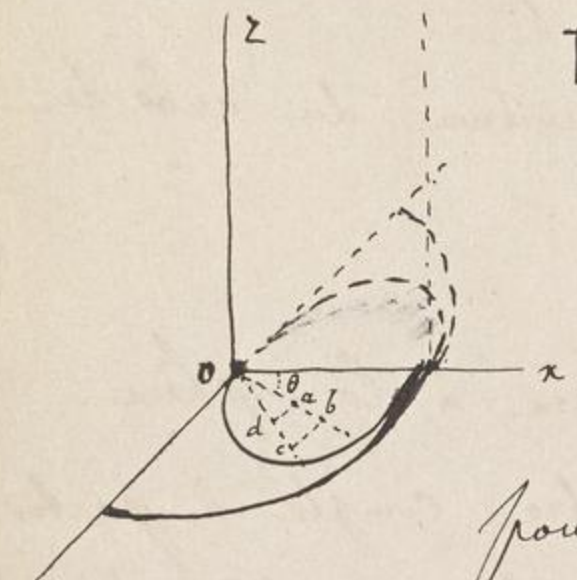
en supposant la surface mise sous la forme

$$x=f(u,v)\ ,\quad y=\varphi(u,v)\ ,\quad z=\psi(u,v)\ ,$$

le champ d'intégration donné par la courbe $F(x,y)=0$, et en appelant $\mathrm{mod}\,D$ le module du Jacobien des fonctions f et φ. Ici le Jacobien est $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}$,

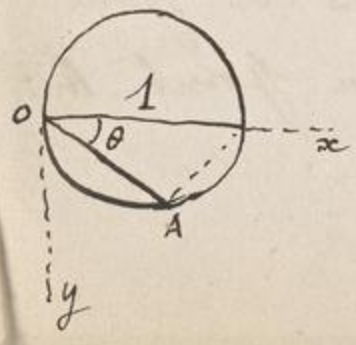
c.à.d. ρ. Appliquant donc la formule précédente, on a

$$V=\iint z\,\rho\,d\rho\,d\theta\ ,$$



ce qui revient à prendre pour élément de volume le prisme de hauteur z et dont la base est le rectangle infiniment petit abcd, qui a pour surface $ab.ad$, c.à.d. $d\rho.\rho d\theta$.

L'équation de la sphère donne $z=\left[1-(x^2+y^2)\right]^{\frac12}=(1-\rho^2)^{\frac12}$, où nous adoptons la détermination positive. En conséquence, on voit que l'on aura



$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} d\theta.\ \rho(1-\rho^2)^{\frac12}\,d\rho\ .$$

L'intégrale indéfinie de $\rho(1-\rho^2)^{\frac12}\rho d\rho$ ~~est~~ ou

de ~~$-\frac{1}{2}$~~ $-\frac{1}{2}\left[-(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\rho\, d\rho\right]$ est évidemment

$-\frac{1}{2}\,\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$, c.à.d. $-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}$, qui, prise entre les limites 0 et $\cos\theta$, donne $\frac{1}{3}(1-\sin^3\theta)$. On a donc

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-\sin^3\theta)\,d\theta = \frac{4}{3}\,\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta .$$

Comme $\sin^3\theta$ est une fonction rationnelle impaire de $\sin\theta$, il suffit de poser $\cos\theta = t$, d'où $\sin^3\theta = (1-t^2)^{\frac{3}{2}}$ et $d\theta = -\,dt\,(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$. On a donc

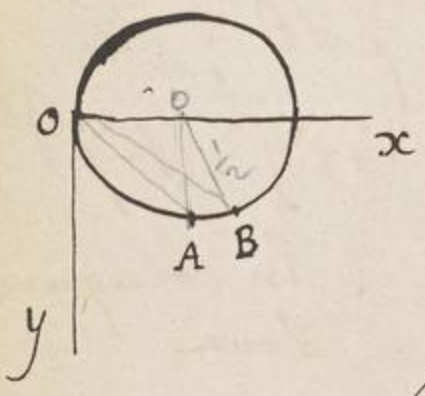
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cdot d\theta = \int_1^0 -(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt\,(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^1 (1-t^2)\,dt$$

$$= \left(t - \frac{t^3}{3}\right)_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} .$$ En résumé, on a

$$V = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} .$$

Si l'on remarque que le volume de la demi-sphère est $\frac{2\pi}{3}$, puisque son rayon a été pris pour unité, il résulte de la formule précédente que la portion du volume de la demi-sphère qui est située à droite du plan zoy ~~a pour~~ ~~valeur~~ $\frac{8}{9} - \frac{2^3}{9}$ et en dehors du cylindre a pour valeur $\frac{8}{9}$ ou $\frac{2^3}{9}$, c.à.d. le neuvième du cube du diamètre de la sphère. ——

II. — Surface du cylindre intérieure à la sphère.



Soit s l'arc de base du cylindre compté à partir du point O jusqu'au point A, et soit AB = ds

L'élément de surface cylindrique qui a pour base AB peut être remplacé, au second ordre près, par le rectangle ~~z.ds~~ qui a pour base AB = ds et pour hauteur le z de la sphère correspondant au point A: ~~ce~~ rectangle qui a pour mesure $z\,ds$.

$ds = \frac{1}{2}\,AOB$
$= \frac{1}{2}(2.d\theta) = d\theta$

2/

Or on a $ds = (dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$, d'autre part l'équation du cercle $x^2+y^2=x$ donne $(2x-1)\,dx + 2y\,dy = 0$

L'élément d'arc ds s'évalue plus avantg. en fonction de l'angle que vous avez appelé θ; vous avez $ds = d\theta$, $Z = \sin\theta$. d'où: $S_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = 4$

ou $(2x-1)\,dx + 2(x-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = 0$, d'où

$$\frac{dx}{2(x-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dy}{1-2x} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{4(x-x^2)+(1-2x)^2}} = \frac{ds}{1}.$$

On a alors, en appelant S_1 la surface totale cherchée,

$$S_1 = 4\int_0^1 \frac{z\,dx}{2(x-x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \text{ or on a } \quad z = \left(1-(x^2+y^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou, puisque x et y satisfont à $x^2+y^2=x$,

$$z = (1-x)^{\frac{1}{2}} \quad ; \text{ il vient donc}$$

$$S_1 = 4\int_0^1 \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = 4\left(x^{\frac{1}{2}}\right)_0^1 = 4,$$

c.à.d. que cette surface est quadruple de celle du carré construit le rayon de la sphère.

Soit maintenant S_2 la portion de surface sphérique intérieure au cylindre. Nous appliquerons la formule connue

$$S_2 = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\; dx\,dy,$$ p et q étant les dérivées partielles de z par rapport à x et y. On voit qu'on aura

$$S_2 = 4\int_0^1 \int_0^{(x-x^2)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{1+p^2+q^2}\; dx\,dy,$$

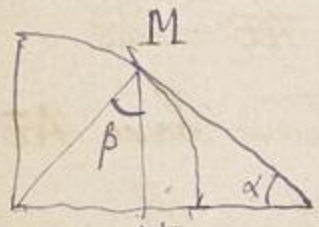
car le contour d'intégration est $x^2+y^2=x$.

Pour la surface S_2 il est aussi préférable d'employer les coordonnées bipolaires. En effet vous trouvez: $\sqrt{1+p^2+q^2} = \sec\alpha = \sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$

Calculons p et q au moyen de $z = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$.

On a $p = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$,

$$q = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y).$$



$\cos\beta = \sin\theta$

D'où $1+p^2+q^2 = \frac{1}{1-x^2-y^2}$. On a donc

$$S_2 = 4\int_0^1 \int_0^{(x-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

d'où $S_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$

d'où $\int_0^{\cos\theta} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int \frac{d\theta\cos^2\theta}{\sin\theta} =$

Or l'intégrale indéfinie de $\frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$ ou de

Je retrouve le calcul à votre 2de page mais

vous pouvez éviter le passage par les coordonnées ordinaires comme on le voit dans la feuille intitulée qui sert de couverture

$\frac{d\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}$ est arc sin $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$, qui, prise entre les limites

0 et $(x-x^2)^{\frac{1}{2}}$, est arc sin $\sqrt{\frac{x-x^2}{1-x^2}}$, c.à.d. arc sin $\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

On a donc $\int_2 \mathbb{N} = 4\int_0^1 dx \text{ arc sin}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$, ou bien

$$\mathcal{S}_2 = 4\int_0^1 \text{arc sin}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} d.(x+1).$$

Intégrons par parties, il vient

$$\int_2 \mathbb{N} = 4\left[(x+1)\text{ arc sin}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 - 4\int (x+1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$= 4.\ 2\frac{\pi}{4} - 4.\frac{1}{2}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\pi - 4\left(x^{\frac{1}{2}}\right)_0^1 = 2\pi - 4$$

Ainsi la surf. sphérique intérieure au cylindre est $2(\pi-2)$

Remarque. Pour évaluer directement l'intégrale $\mathcal{S}_2 = 4\int_0^1\int_0^{(x-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$,

on peut encore adopter les coordonnées semi-polaires

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, ce qui donne

$$\mathcal{S}_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} \frac{d\theta\,\rho\,d\rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ ou bien}$$

$$\mathcal{S}_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} -\frac{-\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta.\left(-\sqrt{1-\rho^2}\right)_0^{\cos\theta}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,(1-\sin\theta) = 4\left(\theta+\cos\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 2(\pi-2).$$

L'intégration est ainsi un peu plus rapide. —

(Problème de Viviani).

3/ Intégrer l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}(x^2-y^2) = 2xy$.

Cette équation est homogène en x et y et peut s'écrire sous la forme

En passant aux coordonnées polaires; on trouve: $\frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Posant $\frac{y}{x} = z$, il vient

$\frac{dy}{dx} = tg\,2\omega$ $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{1-z^2}$. D'où on tire

Or: $y = \rho \sin\omega$
$x = \rho\cos\omega$ $x\frac{dz}{dx} = \frac{z+z^3}{1-z^2}$, et par suite

$\frac{d\rho}{\rho d\omega} = \frac{dx\cos\omega + dy\sin\omega}{-dx\sin\omega + dy\cos\omega}$ $\frac{dx}{x} = \frac{1-z^2}{z+z^3}dz = \frac{dz}{z+z^3} - \frac{z^2dz}{z+z^3}$ /

$= \frac{\cos 2\omega\cos\omega + \sin 2\omega\sin\omega}{\cos\omega\sin 2\omega - \cos 2\omega\sin\omega}$ $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z(1+z^2)} - \frac{z\,dz}{1+z^2}$

$= \frac{\cos(2\omega-\omega)}{\sin(2\omega-\omega)}$

$= \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$. Or $\frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{1+z^2}$. on a donc

$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\cos\omega\,d\omega}{\sin\omega}$ $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} - \frac{2z\,dz}{1+z^2}$.

$L\rho = L\sin\omega + L(K)$ On pourait arriver immédiatement à ce résultat en écrivant

$\rho = K\sin\omega$. $\frac{dx}{x} = \frac{1-z^2}{z(1+z^2)}dz = \frac{(1+z^2)-2z^2}{z(1+z^2)}dz = \left[\frac{1+z^2}{z(1+z^2)} - \frac{2z^2}{z(1+z^2)}\right]dz$

$= \left[\frac{1}{z} - \frac{2z}{1+z^2}\right]dz$).

Intégrons, en désignant par C une constante; il vient

$Lx + C = Lz - L(1+z^2) = L\frac{z}{1+z^2} = L\frac{xy}{x^2+y^2}$,

d'où enfin $L\frac{y}{x^2+y^2} = C$. Cette équation exprime que $\frac{y}{x^2+y^2}$ est une constante $\frac{1}{a}$, et la solution est par conséquent $x^2+y^2-ay = 0$.

L'équation donnée est donc l'équation différentielle des cercles tangents à ox à l'origine. — C'est d'ailleurs

ce que l'on peut vérifier en éliminant a entre l'équation $x^2+y^2-ay=0$ et l'équation obtenue par différentiation, savoir $2x\,dx+2y\,dy-a\,dy=0$. On obtient ainsi l'équation différentielle donnée. —

Calculer l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{t^{2p}\,dt}{1+t^{2n}}$, n étant entier et p étant ~~fractionnaire~~ entier, fractionnaire ou même incommensurable.

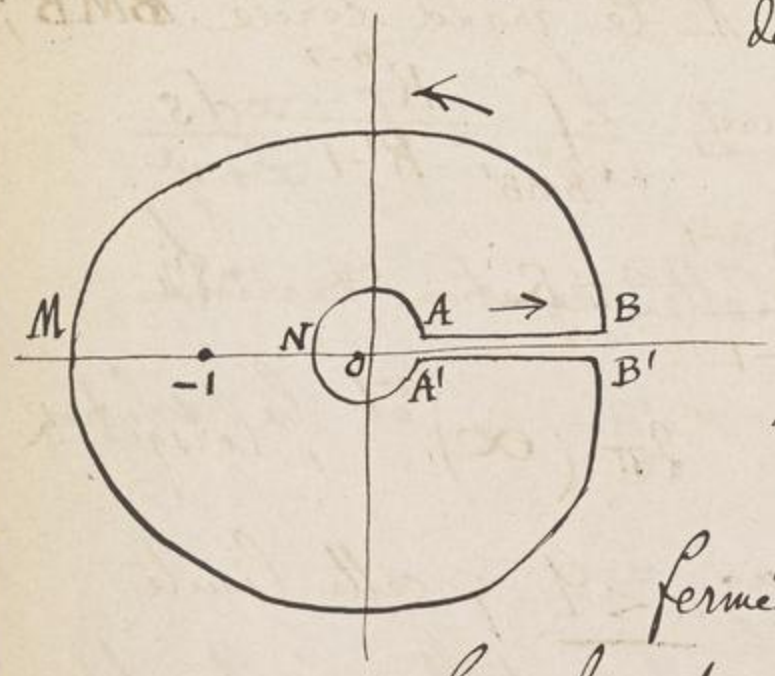
Posons $t^{2n}=x$, d'où $t=x^{\frac{1}{2n}}$, $dt=\frac{1}{2n}x^{\frac{1}{2n}-1}dx$ et $t^{2p}=x^{\frac{2p}{2n}}$. L'intégrale considérée peut s'écrire

$$\frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{2p+1}{2n}-1}\,dx}{1+x}, \text{ ou, en posant } \frac{2p+1}{2n}=a,$$

$$\frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx. \text{ (Les limites sont encore 0 et } \infty, \text{ en supposant } n \text{ entier).}$$

Pour évaluer cette intégrale j'aurai recours au Théorème des résidus. × La fonction envisagée $\frac{z^{a-1}}{1+z}$ présente deux points critiques, l'origine qui est un branchement et le point $z=-1$ qui est un pôle. Nous allons former un contour contenant le pôle sans contenir le point de ramification. A cet effet décrivons de l'origine comme centre deux cercles, l'un avec un rayon infiniment petit r, l'autre avec un rayon infiniment grand R, et considérons le contour fermé obtenu en partant du point A, décrivant AB sur ox, puis le grand cercle BMB', puis B'A' et enfin le petit cercle A'NA. Ce contour fermé ne contient pas le branchement; chacune des branches de la fonction est donc monodrome à son intérieur, et, en désignant par A le résidu correspondant au pôle $z=-1$, on a, d'après le théorème des résidus

× que j'appliquerai à la fonction imaginaire $\frac{z^{a-1}}{1+z}$



$$(1) \qquad \int_G \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i\, A\,,$$

(G est le contour considéré et $\int_G$ l'intégrale le long de ce contour).

Les valeurs de la fonction z^{a-1} sont données par la formule $z^{a-1} = \rho^{a-1} e^{(a-1)i\varphi}$, où ρ désigne le module de z et φ son argument : ce dernier n'est déterminé qu'aux multiples près de 2π. Pour préciser celle des branches de la fonction à laquelle l'intégration se rapporte, nous admettons qu'en parcourant la ligne AB pour la première fois, on ait pris $\varphi = 0$.

Cela posé, sur AB, la valeur de z ou $x+iy$ se réduit à sa partie réelle, et l'on a $\int_{AB} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = \int_r^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$,

où x^{a-1} représente la valeur arithmétique du radical.

Lorsque r tend vers zéro et R vers l'∞, cette intégrale tend vers $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$, que nous représenterons par I.

Lorsqu'on décrira un peu plus tard le chemin inverse $B'A'$, dz aura changé de signe, d'ailleurs z aura pour argument 2π, et alors on aura

$$z^{a-1} = x^{a-1} e^{(a-1)2\pi i},$$

et par suite

$$\int_{B'A'} \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = -\,e^{(a-1)2\pi i} \int_r^R \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = -\,e^{(a-1)2\pi i}\,.\,I\,.$$

Considérons l'intégrale suivant le grand cercle BMB'; son module a pour limite supérieure $\int_{BMB'} \frac{R^{a-1}}{R-1}\,ds$

ou $\frac{R^{a-1}}{R-1}\int_{BMB'} ds$, c.à.d. $\frac{R^{a-1}}{R-1}\,2\pi R$ ou enfin

$2\pi \frac{R^{a-1}}{1-\frac{1}{R}}$, quantité qui tend vers $2\pi(\infty)^{a-1}$, lorsque R tend vers l'∞. En supposant $\underline{a<1}$, cette limite est zéro, et l'intégrale le long du grand cercle est nulle.

Quant à l'intégrale le long du petit cercle, son module a pour limite supérieure $\frac{r^{a-1}}{1-r} 2\pi r$, quantité qui est nulle pour $r=0$, si toutefois l'on suppose $a>0$.

Enfin il reste à calculer le résidu A relatif au pôle $z=-1$

Pour cela, posons $z=-1+h$, alors on a

$$\frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{(-1+h)^{a-1}}{h} = \frac{(-1)^{a-1} + \dots}{h} ;$$

le résidu est, comme on sait, le coefficient du terme en $\frac{1}{h}$ dans ce développement, c'est donc $(-1)^{a-1}$ ou $e^{(a-1)i\pi}$.

On peut encore dire : d'après le théorème des résidus lui-même, le résidu est l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz$, K étant un contour infiniment petit décrit autour du point $z=-1$, et comme d'autre part on a démontré la formule générale $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-a} = f(a)$, en supposant la fonction $f(z)$ finie, continue et monodrome dans le contour d'intégration, on voit que le résidu n'est autre chose que $f(a)$, c.à.d. ici la valeur que prend z^{a-1} pour $z=-1$, ou $(-1)^{a-1} = e^{(a-1)i\pi}$.

En résumé, d'après ce qui précède, l'équation (1) peut s'écrire

$$\int_G = I - e^{(a-1)2\pi i}\, I = 2\pi i\, e^{(a-1)i\pi},$$

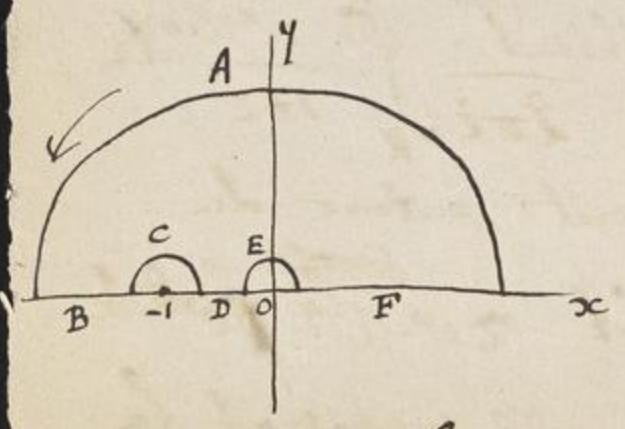
$$\text{d'où} \quad I = \frac{2\pi i\, e^{(a-1)i\pi}}{1 - e^{(a-1)2\pi i}} = \frac{\pi}{\frac{e^{-(a-1)i\pi} - e^{(a-1)i\pi}}{2i}}$$

$$\text{ou} \quad I = \frac{\pi}{-\sin(a-1)\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

~~Remarque~~. Remarque. Pour obtenir le résidu A, il est encore plus simple d'appliquer la formule $A = \frac{f(a)}{\varphi'(a)}$, $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ étant la fonction considérée, formule qui suppose le résidu simple, ce qui a lieu ici. On a ainsi $A = \frac{(-1)^{a-1}}{1}$. *

Remarque — La démonstration précédente suppose essentiellement $0<a<1$. En effet, si a était ~~négatif~~ supérieur à 1, on ~~aurait~~ ne pourrait affirmer que $\int_{BMB'}$ tend vers zéro, et si l'on avait $a<0$, on ne pourrait pas non plus affirmer que $\int_{AINA}$ est nulle.

Ainsi, à l'égard de l'intégrale donnée $\int_0^\infty \frac{t^{2p}\,dt}{1+t^{2n}}$, la formule $\int_0^\infty \frac{t^{2p}\,dt}{1+t^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin\left(\frac{2p+1}{2n}\pi\right)}$ n'est démontrée qu'en supposant $0 < \frac{2p+1}{2n} < 1$.



On peut aussi, pour calculer cette même intégrale définie, faire choix d'un contour ne renfermant à son intérieur aucun point critique de la fonction $\frac{z^{a-1}}{1+z}$. Ainsi intégrons cette fonction suivant le contour ABCDEF, dans lequel A est un demi-cercle de rayon infini R ayant pour centre l'origine, C, E des demi-cercles de rayons infiniment petits γ décrits autour des point -1 et de l'origine comme centre, enfin B, D, F des portions de ox. Comme la fonction est finie, continue et monodrome à l'intérieur de ce contour, l'intégrale sera nulle, quelle que soit celle de ses branches que l'on considère. Nous considérerons, comme plus haut, celle pour laquelle l'argument est compris entre 0 et π. On a donc

$$(1)\qquad \int_A + \int_B + \int_C + \int_D + \int_E + \int_F = 0.$$

Or $\int_A$ est nulle, car son module a pour limite supérieure $\frac{R^{a-1}}{1-\frac{1}{R}}\pi$, quantité dont la limite est zéro, puisqu'on suppose $a<1$.

De même $\int_E$ est nulle, puisque la limite supérieure de son module est $\frac{r^{a-1}}{1-r}\pi r$, et que a est supposé positif.

Lorsque z décrit les chemins B et D, il a un module ρ qui varie et un argument constant égal à π, car le point z vient de décrire le demi-cercle A. On a donc, pour ces 2 chemins, $z = \rho e^{\pi i}$, $dz = e^{\pi i} d\rho$, et

$$\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = \frac{\rho^{a-1} e^{(a-1)\pi i} e^{\pi i}\, d\rho}{1+\rho e^{\pi i}} = e^{a\pi i}\,\frac{\rho^{a-1}\,d\rho}{1+\rho}.$$

D'où $$\int_B + \int_D = e^{a\pi i}\left[\int_R^{1+\rho} \frac{\rho^{a-1}\,d\rho}{1-\rho} + \int_{1-\rho}^{\rho} \frac{\rho^{a-1}\,d\rho}{1-\rho}\right].$$

Appelons L la quantité entre parenthèse (qui est réelle). On a alors

$$\int_B + \int_D = e^{a\pi i} L.$$

Calculons $\int_C$. Posons à cet effet $z = -1 + \rho e^{i\theta}$ d'où $1+z = re^{i\theta}$, $dz = ire^{i\theta}\,d\theta$. Il vient

$$\int_C = \int_\pi^0 \frac{(-1+re^{i\theta})^{a-1}}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,d\theta = \int_\pi^0 \left(e^{\pi i} + re^{i\theta}\right)^{a-1} i\,d\theta,$$

et, comme r est infiniment petit, on a

$$\int_C = -i\int_0^\pi e^{\pi i(a-1)}\,d\theta = i\pi e^{a\pi i}.$$

On a d'ailleurs $\int_F = \int_r^{+\infty} \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}$, et pour $r=0$, on a

$$\int_F = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}.$$

On a donc enfin, d'après l'équation (1),

$$e^{a\pi i}\left(L + i\pi\right) + \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = 0,$$

ou, d'après l'égalité $e^{a\pi i} = \cos a\pi + i \sin a\pi$,

$$(\cos a\pi + i \sin a\pi)(L + i\pi) + \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = 0;$$

cette imaginaire devant être nulle, on a donc

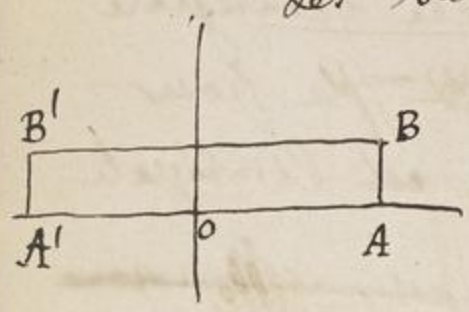
$$L\cos a\pi - \pi \sin a\pi + \int_0^\infty = 0$$
$$L \sin a\pi + \pi \cos a\pi = 0.$$

Eliminant L, on a $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

6/

Pour obtenir cette integrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$, M. Hermite pose tout d'abord $x = e^{x'}$, ce qui conduit à la nouvelle forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax'}}{1+e^{x'}} dx'$, ou, ce qui revient au même $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}$.

Cela posé il applique à la fonction ~~$\frac{e^{az}}{+\pi}$~~ $\frac{e^{az}}{1+e^z}$ le théorème des résidus en l'intégrant le long d'un rectangle dont l'une des bases, située sur ox, a son milieu à l'origine et ses extrémités A et A' à l'∞, ~~La fonction~~ et dont l'autre base est égale à 2π. Ce contour contient le pôle unique de la fonction savoir $z = i\pi$, auquel correspond le résidu $-e^{a\pi i}$.



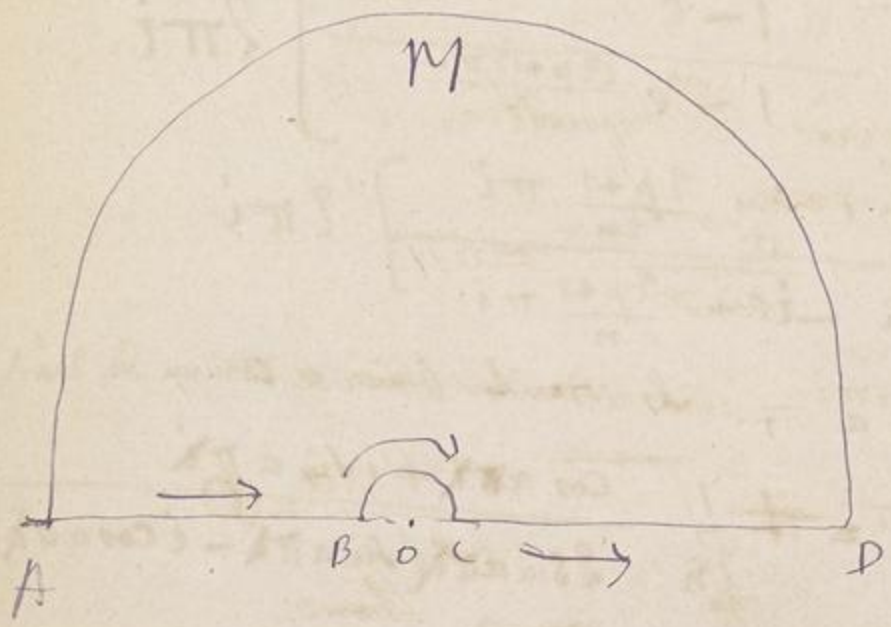
L'integrale suivant A'A# est l'intégrale cherchée, les intégrales $\int_{AB}$ et $\int_{B'A'}$ sont nulles toutes deux ; quant à l'intégrale $\int_{BB'}$, on trouve qu'elle est égale à $-e^{2a\pi i} \int_{A'A}$. On a donc

$$\int_{A'A} - e^{2a\pi i} \int_{A'A} = -2\pi i e^{a\pi i},$$

d'où $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

(Cours de M. Hermite à l'Ecole Polytechnique 1874-1875).

Bien; on peut évidemment multiplier d'une façon presque indéfinie les méthodes d'intégration. Par exemple on peut conserver la variable t et intégrer le long du contour Ω suivant : A B C D M ; on décrit C D avec un argument nul pour t^{2p}.



Soit encore $I = \int_0^\infty \frac{t^{2p} dt}{1+t^{2n}}$

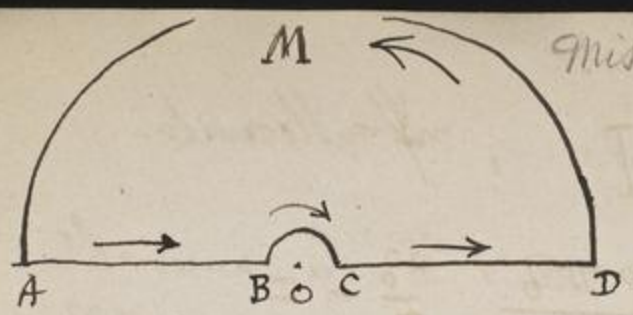
Vous avez

$$I = \int_{CD}$$ ~~$-2pir$~~ ~~$I e$~~

$\int_{AB}$ est égal à I × un facteur facile à calculer

$\int_{DMA} = 0$; quant à l'intégrale totale c'est $2i\pi$ × la somme des résidus ; cette somme est aisée à évaluer car les résidus forment une progression géométrique

Mise en œuvre de la méthode indiquée par M. Poincaré



Décrivons le contour ci-contre en partant du point C, allant de C vers D, puis décrivant le grand cercle DMA, ensuite AB et enfin le petit cercle BC. Et intégrons suivant ce contour la fonction $\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}$, en supposant $\frac{p}{q}$ entier, mais p quelconque. C'est à cause de cette hypothèse de p quelconque, que nous contournons le point 0 qui peut être un point de branchement, et par suite on est obligé de décomposer l'intégrale suivant AD en trois : AB, BC, CD ; car dans cette hypothèse p quelconque le branchement empêche l'intégrale d'avoir la même valeur pour les 2 chemins AB et CD et de poser par conséquent $\int_{AD} = 2\int_{OD}$ (sauf pour p entier). L'intégrale suivant CD est l'intégrale cherchée $I = \int_{CD}$. L'intégrale suivant le grand cercle ~~est nulle pour~~ quand son rayon R est infini, s'obtient en y posant $z = Re^{i\theta}$, ce qui donne $i\int_0^{\pi} \frac{R^{2p+1} e^{(2p+1)i\theta}}{1+R^{2q}e^{2qi\theta}} d\theta$, dont la valeur est zéro, si l'on suppose $2p+1 < 2q$. Evaluons $\int_{AB}$; tout le long de AB on a $t = \rho e^{\pi i}$ en appelant ρ le module de t. D'où $dt = d\rho \cdot e^{\pi i}$, et par suite

$$\int_{AB} = \int_{+\infty}^{0} \frac{\rho^{2p} e^{2p\pi i} \cdot d\rho \cdot e^{\pi i}}{1+\rho^{2n}e^{2n\pi i}} \quad (\text{car } \rho \text{ est} > 0) = -e^{(2p+1)\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\rho^{2p}\, d\rho}{1+\rho^{2n}e^{2n\pi i}},$$

or on suppose n entier, on a donc $e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1$, et par suite

$$\int_{AB} = -e^{(2p+1)\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\rho^{2p}\, d\rho}{1+\rho^{2n}} = -e^{(2p+1)\pi i} I \cdot \left[\begin{array}{l}\text{quand } p \text{ est entier, le coef de I}\\ \text{se réduit à } -(\cos(2p+1)\pi = 1\end{array}\right].$$

La somme des résidus situés à l'intérieur du contour s'obtient aisément (Schlömilch, Vorlesungen 168 ; Houel, Hermite 1874-1875, etc.), on trouve

$$-\frac{e^{\frac{(2p+1)\pi i}{2n}}}{2n} \cdot \frac{1-e^{(2p+1)\pi i}}{1-e^{\frac{(2p+1)\pi i}{n}}}.$$

On a donc

$$I\left(1-e^{(2p+1)\pi i}\right) = \left[-\frac{e^{\frac{(2p+1)\pi i}{2n}}}{2n} \frac{\left(1-e^{(2p+1)\pi i}\right)}{1-e^{\frac{(2p+1)\pi i}{n}}}\right] 2\pi i$$

$$\text{ou} \quad I = \left[-\frac{1}{2n} \frac{\cos\frac{(2p+1)}{2n}\pi i + i \sin\frac{2p+1}{2n}\pi i}{1-\cos\left(\frac{2p+1}{n}\right)\pi i - i\sin\frac{2p+1}{n}\pi i}\right] 2\pi i$$

Posons un instant pour abréger $\frac{2p+1}{2n} = a$, il vient pour la somme des résidus

$$-\frac{1}{2n} \frac{\cos a\pi i + i \sin a\pi i}{2\sin^2 a\pi i - 2i \sin a\pi i \cos a\pi i} = -\frac{1}{2n} \frac{\cos a\pi i + i\sin a\pi i}{2\sin a\pi i(\sin a\pi i - i\cos a\pi i)}$$

$$= -\frac{1}{2n} \frac{i}{2\sin a\pi i}, \text{ et par suite } I = \frac{1}{2n} \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\text{ou enfin} \quad I = \frac{1}{2n} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2p+1}{2n}\pi\right)}.$$

7

Pomey.

1° Remarques sur le problème II

Soient a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 les coord. des 3 sommets de telle sorte que:

$$r_1^2 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = \rho_1$$
$$r_2^2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = \rho_2$$
$$r_3^2 = (x-a_3)^3 + (y-b_3)^2 = \rho_3$$

Soit $V = \sum r^m$
$dV = \sum d(r^m)$
$d^2V = \sum d^2(r^m)$

il vient:

$$d(r^m) = \cancel{(d\rho)}\ d\left(\rho^{\frac{m}{2}}\right) = \frac{m}{2}\rho^{\frac{m}{2}-1}d\rho = m\left[(x-a)\,dx + (y-b)\,dy\right] r^{m-2}$$

$$d^2(r^m) = d^2\left(\rho^{\frac{m}{2}}\right) = \frac{m}{2}\rho^{\frac{m}{2}-1}d^2\rho + \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\rho^{\frac{m}{2}-2}d^2\rho =$$

$$m\left(dx^2+dy^2\right)r^{m-2} + m(m-2)\left[(x-a)\,dx+(y-b)\,dy\right]^2 r^{m-4}$$

Il faut pour que l'on ait un min. que. ~~de soit un~~ $\sum d^2 r^m$ soit nul et $\sum d^2 r^m$ positif. On doit donc avoir:

$$(1)\qquad \sum (x-a)\,r^{m-2} = \sum (y-b)\,r^{m-2} = 0$$

~~Inutile~~ $\sum d$

$$d^2(r^m) = \cancel{dx}\ m\Big[dx^2\left[(x-a)^2(m-1)+(y-b)^2\right] + 2(m-2)\,dx\,dy\,(y-b)(x-a)$$
$$+ dy^2\left[(y-b)^2(m-1)+(x-a)^2\right]\Big]$$

On en posant:

$$\sum (x-a)^2 r^{m-4} = A \qquad \sum (x-a)(y-b)\,r^{m-4} = B \qquad \sum (y-b)^2 r^{m-4} = C$$

nous aurons:

$$d^2V = m\left[dx^2\left[(m-1)A + C\right] + 2(m-2)\,dx\,dy\,B + dy^2\left[(m-1)C + A\right]\right]$$

Or on pourra toujours choisir les axes de telle sorte que $B = 0$. A et C sont essentiellement positif.

Donc si $m \geq 1$; d^2V est toujours positif. Donc les équations (1) suffisent pour qu'il y ait un minimum. Il y en a évidemment un puisque V ne peut être nul. Combien y en a-t-il. Pour cela je m'appuyerai sur le théo. suivant

Soit V une fonction de x et de y, qui n'a qu'une

valeur finie et déterminée pour chaque valeur réelle de la variable, et qui étant toujours positive tend vers 0 ou vers l'infini quand x ou y tendent vers l'infini; soit M le nombre des maxima, μ le nombre des minima, K celui des points pour lesquels $\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = 0$ sans qu'on ait ni max. ni min; on aura:

$$M + \mu = K + 1.$$

Or ici $M = K = 0$ Donc $\mu = 1$.

Soit maintenant $m < 1$; je dis que nous ne pouvons avoir de maximum. En effet s'il y avait un maximum, on aurait:

coëfficient de dx^2 + coëfficient de $dy^2 \leq 0$

Or le premier membre se réduit à

$$m^2(A + C)$$

et est par conséquent essentiellement positif.

Si $0 < m < 1$; les trois sommets A, B, C sont des minima

Si $0 > m$ ce sont des maxima; donc si m est plus petit que 1, on ne peut avoir $K = 0$, il y a toujours au moins deux points pour lesquels on a:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = 0$$ sans que l'on ait ni maximum ni minimum.

On peut se demander si on peut rencontrer un minimum

La discussion serait très complexe; voici ce qu'on peut dire:

1° Si le tri. est équilatéral il y a un minimum et un seul. (en dehors des 3 sommets)

2° Si le tri n'est pas équilatéral et si m est suffisamment voisin de 0, il n'y a pas de minimum (en dehors des 3 sommets)

Problème III

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Soit une surface fermée convexe quelconque; S ω un élément de la surface; ω_x, ω_y, ω_z les projections de cet élément sur les trois plans de coord; ω_z sera considéré comme positif, si l'intérieur de la surface est par rapport à l'élément du côté des z positifs.
Considérons l'intégrale

$$\iint \left(\frac{dV}{dx}\omega_x + \frac{dV}{dy}\omega_y + \frac{dV}{dz}\omega_z \right) = \iint \frac{dV}{dN}\omega$$

$\frac{dV}{dN}$ étant la proj. sur la normale à la surface de la droite dont les proj. sur les 3 axes sont $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$
$\frac{dV}{dN}$ étant positif si la force est dirigée vers l'intérieur de la surface.
On aura:

$$\iint \frac{dV}{dz}\omega_z = \iint \frac{dV}{dz}\,dx\,dy = \iiint \frac{d^2V}{dz^2}\,dx\,dy\,dz$$

ou:

$$\iint \frac{dV}{dN}\omega = \iiint \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \right) dx\,dy\,dz. = 0$$

Or, si on avait un max. ou un min. et si on prenait pour la surface fermée une sphère très petite environnant le max; on aurait:

$$\frac{dV}{dN} > 0 \quad \text{partout}$$

donc:

$\iint \frac{dV}{dN}\omega$ ne pourrait être nul.

E. Pomey.

Exercices d'Analyse.

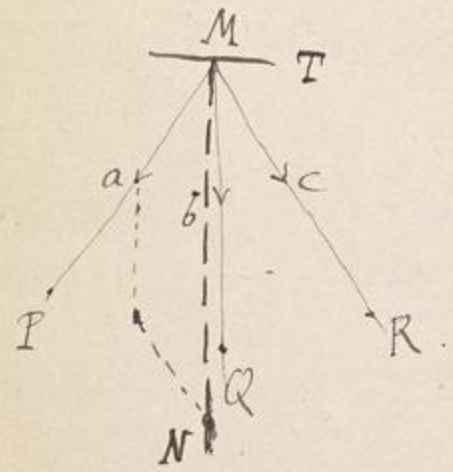
Bien il faudrait remarquer qu'un cas d'indétermination peut se présenter; c'est celui où les trois forces données se font équilibre. Dans ce cas il y a un point double on pourrait y chercher les tangentes mais elles sont imaginaires comme vous le démontrez dans la question suivante:

Construire la tangente au lieu des points M tels que la somme des distances de ces points à trois points donnés soit constante.

La solution se déduit aisément du théorème suivant:

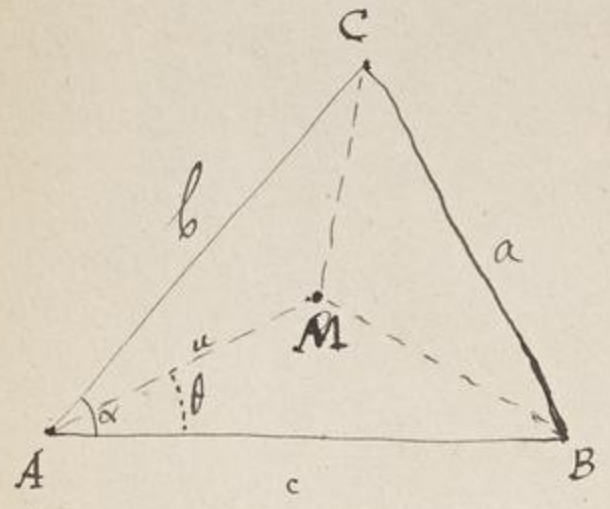
Si $p, q, r, \ldots$ désignent les distances d'un point M à des points fixes $P, Q, R, \ldots$, l'équation $f(p, q, r, \ldots) = 0$ représentera une surface lieu du point M, et la normale à cette surface en M sera la résultante de droites égales à ~~MP, MQ, MR, ...~~ $\frac{df}{dp}, \frac{df}{dq}, \frac{df}{dr}, \ldots$ respectivement portées sur les rayons MP, MQ, MR, ... dans le sens de ces rayons ou en sens inverse, suivant que ces dérivées sont positives ou négatives.

Ici l'on demande la tangente à la courbe décrite dans le plan PQR par un point M tel qu'on ait $p+q+r = C^{te}$. On a donc $f(p, q, r..) = p+q+r - C^{te}$; et par suite la normale à cette courbe est la résultante MN de trois longueurs égales Ma, Mb, Mc prises dans le sens des rayons MP, MQ, MR. La tangente MT est la perpendiculaire à cette droite MN.



On envisage un triangle ABC et un point M à l'intérieur.
On demande de trouver le minimum de la somme

$$S = \overline{MA}^m + \overline{MB}^m + \overline{MC}^m .$$



Désignons par a, b, c les côtés opposés à A, B, C, par α, β, γ les angles A, B, C ; enfin posons $AM = u$ et $\widehat{MAB} = \theta$.

On a alors

$$S = u^m + \left(u^2 + c^2 - 2cu\cos\theta\right)^{\frac{m}{2}} + \left(u^2 + b^2 - 2bu\cos(\alpha-\theta)\right)^{\frac{m}{2}}$$

Les conditions du minimum sont

$$(1)\quad \frac{dS}{du} = mu^{m-1} + \frac{m}{2}\left(u^2+c^2-2cu\cos\theta\right)^{\frac{m}{2}-1}(2u-2c\cos\theta) + \frac{m}{2}\left(u^2+b^2-2bu\cos(\alpha-\theta)\right)^{\frac{m}{2}-1}(2u-2b\cos(\alpha-\theta)) = 0$$

$$(2)\quad \frac{dS}{d\theta} = \frac{m}{2}\left(u^2+c^2-2cu\cos\theta\right)^{\frac{m}{2}-1}\cdot 2cu\sin\theta - \frac{m}{2}\left(u^2+b^2-2bu\cos(\alpha-\theta)\right)^{\frac{m}{2}-1} 2bu\sin(\alpha-\theta) = 0$$

Cette solution est assez compliquée elle ne conduirait pas à une discussion simple.

Posons $\left(u^2+c^2-2cu\cos\theta\right)^{\frac{m}{2}-1} = X$ et $\left(u^2+b^2-2bu\cos(\alpha-\theta)\right)^{\frac{m}{2}-1} = Y$,

les deux équations deviennent, après simplifications,

$$(1bis)\quad u^{m-1} + X(u - c\cos\theta) + Y\left(u - b\cos(\alpha-\theta)\right) = 0$$

$$(2bis)\quad X.c\sin\theta - Y.b\sin(\alpha-\theta) = 0$$

De la seconde on tire $\frac{X}{Y} = \frac{b\sin(\alpha-\theta)}{c\sin\theta}$,

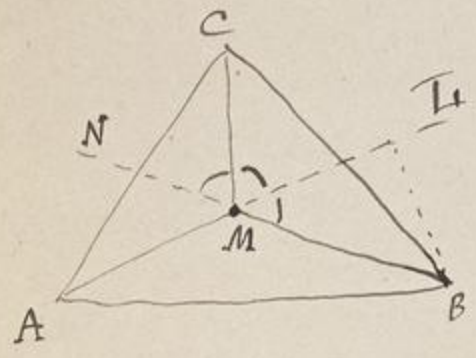
d'où $$\frac{u^2+c^2-2cu\cos\theta}{u^2+b^2-2bu\cos(\alpha-\theta)} = \left(\frac{b\sin(\alpha-\theta)}{c\sin\theta}\right)^{\frac{2}{m-2}},$$

qui, étant ordonnée par rapport à u, donne

$$u^2\left(1 - \left(\frac{b\sin(\alpha-\theta)}{c\sin\theta}\right)^{\frac{2}{m-2}}\right) - 2u\left(c\cos\theta - b\cos(\alpha-\theta)\cdot\left(\frac{b\sin(\alpha-\theta)}{c\sin\theta}\right)^{\frac{2}{m-2}}\right)$$
$$+ c^2 - b^2\left(\frac{b\sin(\alpha-\theta)}{c\sin\theta}\right)^{\frac{2}{m-2}} = 0.$$

On tirera u de cette équation en fonction de θ, et en portant cette valeur dans (1bis), on aura une équation qui fournira θ. Alors θ étant connu, u s'en déduira. Le point M sera donc déterminé.

Dans les cas particuliers où l'on suppose $m = 1$ ou $m = 2$, il vaut mieux traiter la question directement que de chercher à appliquer les formules précédentes.



Posons $AM = u$, $BM = v$, $CM = w$.

La somme S à rendre minimum est

$$S = u + \sqrt{u^2 + c^2 - 2cu\cos\theta} + \sqrt{u^2 + b^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}$$

Par suite les deux équations de condition sont

$$\frac{dS}{du} = 1 + \frac{u - c\cos\theta}{v} + \frac{u - b\cos(\alpha - \theta)}{w} = 0$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{c\sin\theta}{v} - \frac{b\sin(\alpha - \theta)}{w} = 0$$

Prolongeons AM au-delà du point M en ML.

On voit que les deux équations précédentes peuvent s'écrire

$$(1) \qquad 1 - \cos\widehat{BML} - \cos\widehat{CML} = 0$$

$$(2) \qquad \sin\widehat{BML} - \sin\widehat{CML} = 0$$

Multiplions (1) par $\sin BML$ ou $\sin CML$, on a

$$\sin CML = \cos BML \sin CML + \cos CML \sin BML$$

ou $$\sin CML = \sin(BML + CML) = \sin BMC.$$

D'où $BMC = CML$ ou $BMC = 180° - CML$,

mais la 1ère égalité est évidemment impossible, et il reste $BMC = 180° - CML$, c.à.d. ~~BMC~~

$CML = CMN$ en appelant MN le prolongement de BM.

~~Ainsi~~ D'ailleurs d'après (2), on a $BML = CML$,

il en résulte donc $BMC = \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$.

Pour avoir le point M, il suffit donc de décrire sur les côtés du triangle donné des segments capables de l'angle de 120°.

Or pour que les arcs, bases des segments dont il vient d'être question, se coupent réellement, il faut et il suffit que les angles du triangle soient tous trois inférieurs à 120°. Donc, s'il y a dans le triangle un angle supérieur à 120°, les équations du minimum ne feront pas connaître ce dernier, quoiqu'il ait certainement lieu. Mais on peut alors démontrer directement que le point demandé M coïncide alors avec le sommet en question. [Serret, Calc. différ., p. 234].

Supposons maintenant $m = 2$, en conservant d'ailleurs les notations précédentes. On trouve alors pour équations de condition

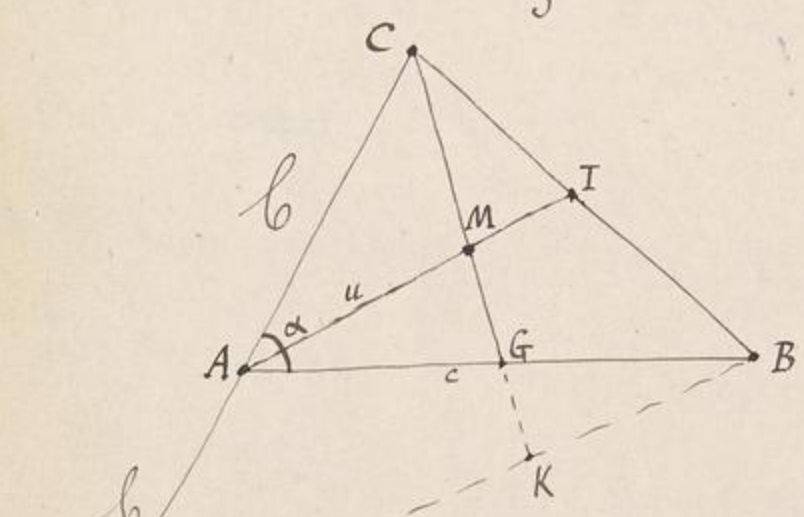
$$3u = c\cos\theta + b\cos(\alpha - \theta)$$
$$0 = c\sin\theta - b\sin(\alpha - \theta),$$

dont la somme des carrés donne

$$u = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$$

et, par analogie,

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta}, \quad w = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}.$$



Or si l'on prolonge CA au-delà de A d'une quantité $AC' = CA = b$, et qu'on joigne BC', puis qu'on prenne le point M à la rencontre des médianes AI, CG, on a

$$\frac{AM}{C'K} = \frac{CA}{CC'} = \frac{1}{2}.$$ D'ailleurs

$$\frac{C'K}{C'B} = \frac{AM}{AI} = \frac{2}{3}; \text{ donc } AM = \frac{C'K}{2} = \frac{C'B}{3}!$$

or, dans C'BA, on a $C'B = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$.

On a donc $AM = u$, de même $BM = v$; $CM = w$.

Le point cherché M coïncide donc avec le centre de gravité du triangle.

Démontrer qu'une fonction $V(x,y,z)$ de trois variables, qui est continue ainsi que toutes ses dérivées, et qui satisfait à $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$ ne peut avoir ni maximum ni minimum.

Les valeurs de x, y, z qui rendent une fonction de trois variables maximum ou minimum se trouvent parmi celles qui rendent les dérivées partielles du premier ordre en x, y, z, nulles, infinies ou discontinues. Ici, l'on suppose la fonction V ainsi que toutes ses dérivées continues; pour avoir les maximum ou minimum, il faudra donc considérer

$$(1) \quad \frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0.$$

Alors on aura

$$d^2V = Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl,$$

où l'on a $A = \frac{d^2V}{dx^2}$, $B = \frac{d^2V}{dy^2}$, $C = \frac{d^2V}{dz^2}$, etc..

Nous supposons que cette quantité d^2V ne soit pas identiquement nulle, et alors, pour que les relations (1) correspondent effectivement à un minimum ou un maximum, il faut que l'on ait constamment

$d^2V > 0$ ou $d^2V < 0$ pour de très-petites valeurs de h, k, l.

Or, si l'on pose

$$G = B - \frac{D^2}{A} \quad \text{et} \quad N = C - \frac{E^2}{A} - \frac{\left(F - \frac{ED}{A}\right)^2}{B - \frac{D^2}{A}},$$

on sait (voir Sturm, Calc. différ. page 183 et suiv.)

que la condition nécessaire et suffisante pour que d^2V ait constamment le même signe, est que A, G, N soient tous trois de même signe.

Mais si l'on ajoute membre à membre les trois inégalités $A>0$, $G>0$, $N>0$, en supposant par exemple ces trois quantités positives, on obtient

$$A+B+C > \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{A} + \frac{\left(F-\frac{ED}{A}\right)^2}{B-\frac{D^2}{A}},$$

inégalité dont le second membre est positif en vertu des conditions $A>0$, $G>0$.

Ainsi, l'existence d'un minimum ou d'un maximum pour V exige que la somme $A+B+C$ (qui n'est autre chose que $\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}$) soit positive ou négative, sans pouvoir être nulle.

La fonction V donnée ne peut donc avoir ni maximum ni minimum, puisqu'elle satisfait à $\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0$.

On suppose que l'on ait $z=F(y)$ et $y=\varphi(x)$, de telle façon que z soit fonction de x. Démontrer que pour avoir $\frac{d^n z}{dx^n}$, il suffit de remplacer t par x dans l'expression

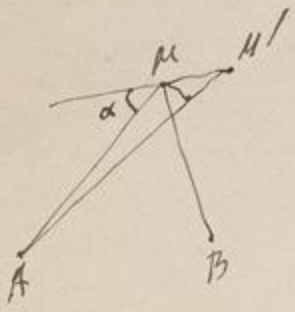
$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p!} \cdot \frac{d^p z}{dy^p} \cdot \frac{d^n\left(\varphi(x)-\varphi(t)\right)^p}{dx^n}$$

Mais qu'arriverait-il si non seulement les dérivées du 1er ordre, mais celles du 2d et du 3e s'annulaient à la fois?

Cette question se trouve entièrement développée dans le Traité de Calcul Différentiel de M Bertrand, page 138 et suiv.

J. B. Pomey

Voici quelques considérations qui se rattachent au premier problème.



1° Si entre les distances r, r_1, r_2 etc d'un point M mobile aux points A, B, C etc fixes existe une relation

$$f(r, r_1, r_2 \ldots) = 0$$

indépendamment de celles qui existent nécessairement entre r r_1, r_2 etc et deux quelconques de ces distances, le polygône dont les côtés sont parallèles à r r_1 r_2 respectivement et dont les longueurs sont $\frac{\partial f}{\partial r}$ $\frac{\partial f}{\partial r_1}$ etc. se ferme ou bien son dernier sommet tombe sur la normale en M au lieu du point M, car dr, dr_1, dr_2 etc sont proportionnels aux cosin. des angles α, β etc que les rayons MA, MB etc font avec l'élément MM' d'arc de courbe, de sorte que la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial r_1} dr_1 + \ldots = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial r} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial r_1} \cos\alpha + \ldots = 0$$

et exprime que la somme des projections de $\frac{\partial f}{\partial r}$ etc sur MM' est nulle, d'où résulte que la résultante $\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial r_1} + \ldots$ est dirigée suivant la normale.

Mais si nous considérons la courbe $r^2 + r_1^2 + r_2^2 = \text{cte}$ et si nous considérons la valeur de la cte, telle qu'un point du lieu vienne au centre de gravité : nous aurons à former la résultante $\bar{r} + \bar{r}_1 + \bar{r}_2$, pour avoir la normale ; or r, r_1, r_2 pour le centre de gravité sont les $\frac{2}{3}$ des médianes correspondantes ; mais un théorème de Géométrie (Hoüel, quantités complexes) apprend que si b b' b'' sont les médianes on a $\bar{b} + \bar{b}' + \bar{b}'' = 0$ Donc on a $\bar{r} + \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 0$ il s'ensuit que le polygône se ferme, que la direction de la normale est indéterminée

Ces courbes $r^2 + r_1^2 + r_2^2$ = constante sont des cercles ayant pour centre le centre de gravité.

mais comme on a une courbe algébrique, la courbe doit se réduire à ce point; donc ce point correspond à un minimum de la cote z; car quel que soit le déplacement imprimé à M il ira sur la courbe entourant ce point et infiniment voisine, la constante ~~devait~~ variant donc toujours dans le même sens.

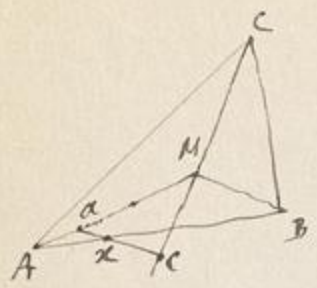
Considérons le cas où l'on a:

$$f(r_1, r_2, r_3) = r_1^m + r_2^m + r_3^m$$

r_1, r_2, r_3 étant des fonctions des coordonnées rectangulaires x et y. On a pour condition du minimum:

$$\begin{cases} r_1^{m-1}\frac{\partial r_1}{\partial x} + r_2^{m-1}\frac{\partial r_2}{\partial x} + r_3^{m-1}\frac{\partial r_3}{\partial x} = 0 \\ r_1^{m-1}\frac{\partial r_1}{\partial y} + r_2^{m-1}\frac{\partial r_2}{\partial y} + r_3^{m-1}\frac{\partial r_3}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ces 2 conditions expriment que les projections de r_1^{m-1}, r_2^{m-1}, r_3^{m-1} sur la direction de $dx = \bar{dx} + \bar{dx_2} + \bar{dx_3}$ MM', et sur la direction perpendiculaire sont nulles, autrement dit que le polygone se ferme; ceci justifie analytiquement les considérations précédentes sur $r^2 + r_1^2 + r_2^2$.



Si nous supposons ~~m=~~ $m = 1$, nous voyons qu'il faut (pouvoir) construire un triangle Ma, ac, cM dont les côtés parallèles à MA, MB, MC, soient égaux car $\frac{\partial f}{\partial r_1} = \frac{\partial f}{\partial r_2} = \frac{\partial f}{\partial r_3} = 1$; or ~~la différence des angles aAB et acB est l'angle xaA~~ ~~ou~~ l'angle xaA extérieur au triangle acM est égal à la somme des angles acM et aMC; mais le triangle acM est équilatéral, donc cette somme est égal à $\frac{2}{3}$ 180° ou 120°. Or ac et MB étant parallèle AMB est égal à Aax et vaut par suite 120°; de sorte que l'on doit pour avoir le point M prendre l'intersection des 3 segments décrits sur les côtés ~~xxx~~ et capables de l'angle de 120°.

Des 2 équations qui donne le minimum

Savoir :

$$m \sum r_1^{m-1} \frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

$$\sum r_1^{m-1} \frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

on a sous considération des équations :

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r_1} \qquad \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{x - x_2}{r_2} \qquad \frac{\partial r_3}{\partial x_3} = \frac{x - x_3}{r_3}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y - y_1}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

les équations suivantes :

$$(x - x_1) r_1^{m-2} + (x - x_2) r_2^{m-2} + (x - x_3) r_3^{m-2} = 0$$

$$= 0$$

$$(y - y_1) r_1^{m-2} + \quad . \quad . \quad . \quad .$$

D'où l'on tire :

$$\frac{r_1^{m-2}}{(x - x_2)(y - y_3) - (x - x_3)(y - y_2)} = \frac{r_2^{m-1}}{(x - x_3)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_3)} = \frac{r_3^{m-1}}{\quad . \quad . \quad . \quad .}$$

ou

$$\frac{r_1^{m-2}}{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{r_2^{m-2}}{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}} = \frac{r_3^{m-2}}{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}}$$

Si nous appelons s_1 s_2 s_3 les ~~triangles~~ surfaces MBC MCA MAB on a :

$$\frac{r_1^{m-2}}{s_1} = \frac{r_2^{m-2}}{s_2} = \frac{r_3^{m-2}}{s_3}$$, propriété intéressante :

D'où $(m-2) \log r_1 - \log s_1 = (m-2) \log r_2 - \log s_2$

ou $(m-2) \log \frac{r_1}{r_2} = \log \frac{s_1}{s_2}$ et de même on a :

$$(m-2) \log \frac{r_2}{r_3} = \log \frac{s_2}{s_3}$$

$$(m-2) \log \frac{r_3}{r_1} = \log \frac{s_3}{s_1}$$

Bien il y a de notables simplifications quand on suppose le triangle équilatéral.

D'où une propriété du lieu des points correspondants aux divers minimums obtenus par la variation de m, savoir celle qu'exprime les égalités :

$$\frac{\log \frac{r_1}{r_2}}{\log \frac{s_1}{s_2}} = \frac{\log \frac{r_2}{r_3}}{\log \frac{s_2}{s_3}} = \frac{\log \frac{r_3}{r_1}}{\log \frac{s_3}{s_1}}$$

et si l'on remplace les r et s par leurs simples valeurs en x, y on a l'équation du lieu

Des équations précédentes on tire :

$$\frac{r_1^{2(m-2)}}{s_1^2} = \frac{r_2^{2(m-2)}}{s_2^2} = \frac{r_3^{2(m-2)}}{s_3^2} = \frac{\{r_1^{2m} + r_2^{2m} + r_3^{2m}\}}{s_1 r_1^2 + s_2 r_2^2 + s_3 r_3^2}$$

$$\frac{r_1^{m-2}}{s_1} = \frac{r_2^{m-2}}{s_2} = \frac{r_3^{m-2}}{s_3} = \frac{r_1^m + r_2^m + r_3^m}{s_1 r_1^2 + s_2 r_2^2 + s_3 r_3^2} = \frac{\Sigma}{r_1^2 s_1 + \dots}$$

Σ étant la somme à calculer :

on en tire :
$$r_1^{2(m-2)} \{ r_1^2 s_1 + \dots \}^2 = s_1^2 \Sigma$$
$$r_2^{2(m-2)} \{ r_1^2 s_1 + \dots \}^2 = s_2^2 \Sigma$$
$$r_3^{2(m-2)} \{ r_1^2 s_1 + \dots \}^2 = s_3^2 \Sigma$$

équations entières de degré $2(m-2) + (2+1)^2 = 2m+2$ en x et en y. L'élimination de x & y donne une équation résultante en Σ, qui déterminera la somme Σ. ~~Cette équation est de degré $2m+$~~

Poncy. 1

Exercices d'analyse

1ère Question.

On donne l'équation

$$\alpha_1 x_1 \frac{dF}{dx_1} + \alpha_2 x_2 \frac{dF}{dx_2} + \alpha_3 x_3 \frac{dF}{dx_3} = 0$$

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ sont des constantes. $x_1\ x_2\ x_3$ des variables indépendantes. Que devient-elle quand on prend pour variables indépendantes:

$z_1 = L x_1 \quad z_2 = L x_2 \quad z_3 = L x_3$? (L. log néperien)

ou par la substitution $\begin{cases} y_1 = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} \\ y_2 = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3} \\ y_3 = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} x_3^{\delta_3} \end{cases}$?

J'ai $\frac{dF}{dz_1} = \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dz_1}$ ou $x_1 \frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dz_1}$

D'où par des relations analogues, on tire:

$$\alpha_1 \frac{dF}{dz_1} + \alpha_2 \frac{dF}{dz_2} + \alpha_3 \frac{dF}{dz_3} = 0$$

On a dans le 2e cas; on

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{dF}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \frac{dF}{dy_3}\frac{dy_3}{dx_1}$$

$$\frac{dF}{dx_2} = \frac{dF}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_2} + \frac{dF}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_2} + \dots$$

$$\frac{dF}{dx_3} = \frac{dF}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_3} + \dots$$

Donc il vient

$$\alpha_1 x_1 \frac{dF}{dx_1} + \alpha_2 x_2 \frac{dF}{dx_2} + \alpha_3 x_3 \frac{dF}{dx_3} =$$

$$\left(\alpha_1 x_1 \frac{dy_1}{dx_1} + \alpha_2 x_2 \frac{dy_1}{dx_2} + \alpha_3 x_3 \frac{dy_1}{dx_3}\right)\frac{dF}{dy_1} + \dots = 0$$

Bien vous pouviez prévoir que vous retrouveriez une équation de même forme car en posant $t_1 = L y_1$ etc. Vous passez de $z_1\ z_2\ z_3$ à t_1, t_2, t_3 par un changement

linéaire de variables.
L'équation avec les variables y sera donc à coëff. constants comme l'éq. avec les variables z. d'où l'on conclut que l'équation avec les variables y est de même forme que l'équation avec les variables x.

Mais on a:

$$\frac{dy_1}{y_1} = \beta_1 \frac{dx_1}{x_1} + \beta_2 \frac{dx_2}{x_2} + \beta_3 \frac{dx_3}{x_3}$$

$$\frac{dy_2}{y_2} = \gamma_1 \frac{dx_1}{x_1} + \dots$$

$$\frac{dy_3}{y_3} = \delta_1 \frac{dx_1}{x_1} + \dots$$

Donc il vient:

$$\alpha_1 x_1 \frac{dy_1}{dx_1} + \alpha_2 x_2 \frac{dy_2}{dx_2} + \alpha_3 x_3 \frac{dy_3}{dx_3} =$$

$$= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) x_1^{\alpha_1} y_1$$

et par suite l'équation proposée devient:

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) y_1 \frac{dF}{dy_1} + (\alpha_1\gamma_1 + \dots) y_2 \frac{dF}{dy_2} + (\alpha_1\delta_1 + \dots) y_3 \frac{dF}{dy_3} = 0$$

de sorte qu'elle se transforme en une analogue à la proposée.

2ème Question.

Sommer la série

$$S = x \sin\varphi + \frac{x^3 \sin 3\varphi}{3} + \frac{x^5 \sin 5\varphi}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi}{2n+1} + \dots$$

Je considère la identité

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \dots + \frac{z^{2n}}{1-z^2}$$

Je multiplie par dz et j'intègre:

il vient.

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^z \frac{z^{2n}\, dz}{1-z^2}$$

On sait que pour φ une

valeur de z ~~inférieure~~ ~~à un~~ dont l'affixe est
à l'intérieur du cercle de rayon 1, la série
$z + \frac{z^3}{3} + \dots$ est convergente, car alors le
reste qui est l'intégrale tend vers zéro
quand n tend vers l'infini.

Si ~~z~~ z avait un module plus grand que
1, le terme général aurait un module
augmentant indéfiniment avec n et la
série serait divergente.

Si z est égal à ± 1 la série est
divergente, car la somme de p termes à
partir du $n^{ième}$ ne tend pas vers zéro
quelque soit p ; en effet, prenons $p = 2n-1$
on a : $\frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{2n+2n-1} > \frac{2n-1}{4n}$

Donc la somme de $2n-1$ termes après le $n^{ième}$
tend vers une quantité à coup sûr supérieure
à $\frac{1}{2}$.

Considérons le cas où z ~~est~~ a un module
inférieur à l'unité : soit $z = x(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Il vient :

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x\cos\varphi+i\sin\varphi}{1-x\cos\varphi-i\sin\varphi} = x\cos\varphi + \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi + \dots$$
$$+ i\left(x\sin\varphi + \frac{x^3}{3}\sin 3\varphi + \dots\right)$$

D'où : $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2} = x\sin\varphi + \frac{x^3}{3}\sin 3\varphi + \dots$

pour x réel. Si x était imaginaire

Bien
mais quelle valeur
faut il prendre
pour $\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}$
cette fonction a
une infinité de valeurs.

on aurait une formule analogue

Vous pouviez arriver immédiatement au résultat par le th. d'Abel en effet ~~quand~~ puisque s est conv. la valeur de s pour $x=1$ est égale à la limite quand x tend vers 1.

Je vais envisager le cas où $x=1$ et la somme de n termes, suivante:

$$s = \sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \dots + \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}$$

La dérivation donne:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \cos\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos(2n+1)\varphi$$

somme de n arcs (cos. de) en progression arithmétique dont le 1er est φ, la raison est 2φ. On a donc:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sin\left(\varphi + \frac{2n-1}{2}\cdot 2\varphi\right) - \sin\left(\varphi - \frac{2\varphi}{2}\right)}{2\sin\frac{2\varphi}{2}} = \frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$$

Pour $\varphi = 0$, $\frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$ tend vers n; si φ est compris entre 0 et π nous pouvons écrire

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}\, d\varphi$$

la fonction sous $\int$ ne devient pas infinie dans le champ d'intégration; $\sin\varphi$ reste compris entre 0 et 1, soit μ une valeur moyenne; on a:

Supposons que φ soit compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; partageons l'intervalle de 0 à φ en plusieurs autres prises entre les limites

0 et $\frac{\pi}{2n}$; $\frac{\pi}{2n}$ et $\frac{2\pi}{2n}$; $\frac{2\pi}{2n}$ et $\frac{3\pi}{2n}$, ... $(r-1)\frac{\pi}{2n}$ et $\frac{r\pi}{2n}$, $\frac{r\pi}{2n}$ et φ; $\frac{r\pi}{n}$ étant le plus grand multiple de

2/

$\frac{\pi}{2n}$ et contena dans φ. . On aura évidemment

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin 2n\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}} + \int_{\frac{2\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} + \cdots + \int_{\frac{(r-1)\pi}{2n}}^{\frac{r\pi}{2n}} + \int_{\frac{r\pi}{2n}}^{\varphi}$$

Les intégrales qui forment le second membre sont alternativement positives et négatives.

Considérons 2 termes consécutifs :

$$\int_{\frac{(p-1)\pi}{2n}}^{\frac{p\pi}{2n}} \text{ et } \int_{\frac{p\pi}{2n}}^{\frac{p+1}{2n}\pi}$$ Posons dans le second $\varphi = \frac{\pi}{2n} + x$ il devient :

$$\int_{\frac{p-1}{2n}\pi}^{\frac{p\pi}{2n}} \frac{\sin 2n\left(\frac{\pi}{2n}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+x\right)}\, dx = -\int_{\frac{p-1}{2n}\pi}^{\frac{p\pi}{2n}} \frac{\sin 2nx}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+x\right)}\, dx$$

$$= -\int_{\frac{p-1}{2n}\pi}^{\frac{p\pi}{2n}} \frac{\sin 2p\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\varphi\right)}\, d\varphi$$ On peut prendre n assez grand pour que $\frac{\pi}{2n}+\varphi$ soit inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Alors le sinus au dénominateur est supérieur dans le second terme à $\sin\varphi$ du premier et cette seconde intégrale est inférieure à la 1ère

Cela posé si nous faisons :

$\int_{\frac{p-1}{2n}\pi}^{\frac{p\pi}{2n}} = \pm u_{p-1}$ On a :

$$\int_0^{\varphi} = u_1 - u_2 + \cdots - u_r + \int_{\frac{r\pi}{2n}}^{\varphi} \frac{\sin 2n\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi$$

Dans u_p posons : $2p\varphi = z$ On a :

$$u_p = \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{\sin z}{\sin\frac{z}{2n}} \cdot \frac{dz}{2n}$$ n augmentant

infiniment en $\sin\frac{z}{2n}$ peut être remplacé par z. Lorsque n augmente indéfiniment on peut être remplacé par

$$\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{\sin z}{z}\,dz$$ car $\frac{z}{2n}$ est infiniment petit.

et l'erreur commise est un infiniment petit de sa valeur.

La somme des p premiers termes peut donc être remplacée par:

$$\int_0^{p\pi} \frac{\sin z}{z}\,dz$$

p augmentant indéfiniment, cette somme diffère aussi peu que l'on veut de $\frac{\pi}{2}$ la somme des termes suivants:

$$\int_{\frac{p}{2n}\pi}^{\frac{p+2}{2n}\pi} + \dots,$$ comme ils sont alternés et qu'ils vont en diminuant est moindre que le premier d'entre eux qui étant égal à

$$\int_{(p+1)\pi}^{(p+2)\pi} \frac{\sin z\,dz}{\sin\frac{z}{2n}\cdot 2n}$$

diffère infiniment peu de

$$\int_{(p+1)\pi}^{(p+2)\pi} \frac{\sin z\,dz}{z}$$

et tend vers zéro lorsque p augmente.

il en est de même du dernier terme

$\int_{\frac{r\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi$ et l'intégrale considérée a pour limite $\frac{\pi}{2}$.

La série $\sin 9 + \ldots$ a donc pour somme $\frac{\pi}{4}$.

Reste à démontrer que l'on a :

$$\lim \int_0^{p\pi} \frac{\sin z}{z}\, dz = \frac{\pi}{2}$$

on a $\frac{\sin z}{z} = \left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)\frac{1}{z}$

$$\int \frac{\sin z}{z}\, dz = \int \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right) dz = z + z^4$$

$$= \lim \int e^{-qz}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \ldots\right) dz \quad \text{pour } q = 0$$

Soit $qz = x$ nous avons à chercher :

$$\lim \int e^{-x}\left(\frac{1}{q} - \frac{x^2}{3!\,q^3} + \frac{x^4}{5!\,q^5} - \ldots\right) dx$$

ou $\lim \Sigma \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int \frac{e^{-x} x^{2n}}{q^{2n+1}}\, dx = \lim \Sigma \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{q^{2n+1}} = \lim \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{q}$

pour $q = 0$ on a $\frac{\pi}{2}$.

3e Question.

Développer par la série de Mac Laurin $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$. Expression de la $n^{ième}$ dérivée.

On a identiquement, en posant :

$$a = \beta \qquad c - \frac{b^2}{a} = \alpha \qquad x + \frac{b}{a} = y$$

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta y^2}}$$

et pour une fonction u quelconque

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}$$

D'où $d^n \dfrac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \dfrac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{\alpha+\beta y^2}}}{dy^n}$

Soit $F(y^2) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha+\beta y^2}}$ Appelons F^n la $n^{ième}$ dérivée de $F(y^2)$ par rapport à la variable indépendante y^2 et $D^n F(y^2)$ la $n^{ième}$ dérivée de $F(y^2)$ par rapport à la variable indépendante y. On obtient par des dérivations successives:

$D^1 F = 2x F'$

$D^2 F = (2x)^2 F'' + 2 F''$

$D^3 F = (2x)^3 F''' + 6(2x) F''$

$D^4 F = (2x)^4 F^{IV} + 12(2x)^2 F''' + 12 F''$

On est induit à penser que les coefficients des dérivées F', F'', F''' etc sont seulement Des puissances de $2x$ multipliées par un coefficient numérique et qu'elles vont en décroissant de 2 unités par rang à partir de $(2x)^m$. Supposons vraie cette loi pour l'ordre m on aurait pour la Dérivée $n^{ième}$

$\ldots + a_i (2x)^{n-2i} F^{n-i} + a_{i+1} (2x)^{n-2i+2} F^{n-i-1} + \ldots$

et le coefficient de F^{n-i-1} sera dans la dérivée suivante

$A_{i+1} (2x)^{n+1-2i} = \{a_i + 2a_{i+1}(n+1-2i+1)\}(2x)^{n-2i+1}$

3/

Si le terme général d'une dérivée est représenté par :

$$a_n^{i+1} (2x)^{n-2i} F'^{n-i}$$

où i indique le rang de F^{n-1} dans la $n^{ième}$ dérivée $D^n F$ ordonnées par rapport aux indices décroissant des dérivées ; on a :

$$a_{n+1}^{i+1} = a_n^{i+1} + 2(n-2i+2)\, a_n^i$$

Soit $a_n^i = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-2i+3)}{1.2\ldots(i-1)}$

on a $a_n^{i+1} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-2i+1)}{1.2\ldots i}$

et $a_{n+1}^{i+1} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-2i+3)(n-2i+2)}{1.2\ldots(i-1)} \left(2 + \dfrac{n-2i+1}{i}\right)$

d'où $a_{n+1}^{i+1} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-2i+2)(n+1)}{1.2\ldots i}$

ou $a_{n+1}^{i+1} = \dfrac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2i+2)}{1.2\ldots i}$

et la formule est générale, si elle convient aux premiers termes. Or on trouve facilement pour $i=1$ $a_n' = \dfrac{n(n-1)}{1}$

Pour $i=2$ on trouve aussi que la formule est vérifiée ; en effet on a :

$$a_{n+1}^3 = a_n^3 + 2.(n-2)(n-1)n$$
$$a_n^3 = a_{n-1}^3 + 2.(n-3)(n-2)(n-1)$$

$$a_4^3 = 0 + 2.1.2.3.$$

$$+2.3.4$$

ou $a^3_{n+1} = 2.(1.2.3 + 3.4.5 + 5.6.7 + \dots + (n-2)(n-1)n)$

ou $4\,a^3_{n+1} = 2.(1.2.3.4 + \overbrace{2.3.4.4 +}\, 3.4.5.4 + \dots)$

$= 2(2.3.4.5 + 3.4.5.4 + \dots)$

$= 2(3.4.5.6 + 4.5.6.4 + \dots)$

$= 2 \times (n+1)n(n-1)(n-2)$

ou $a^3_{n+1} = \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}$

D'où $a^3_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}$

Considérons le cas de $x_i = 3$

$$a^4_{n+1} = a^4_n + 2\,\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2}$$

$$a^4_n = a^4_{n-1} + \frac{2(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2}$$

$$a^4_5 = 0 + 2.\frac{1.2.3.4.5}{1.2}$$

D'où : $a^4_{n+1} = \dfrac{2}{1.2}(1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 + \dots)$

ou $6\,a^4_{n+1} = \dfrac{2}{1.2} \times (n+1)n(n-2)(n-3)(n-4)(n-1)$

D'où $a^4_{n+1} = \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}$

D'où $a^4_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}$

Et ainsi de suite, ce qui prouve par analyse, la formule que nous venons de vérifier par l'induction et le calcul

Nous avons donc :

$$D^n F(x^y) = (2x)^n F^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(2x)^{n-2} F^{n-1} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} F'^{n-2} + etc$$

Calculons donc F'^n on a :

$$F' = \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta y^2}} \qquad F' = (-\tfrac{1}{2})(\alpha+\beta y^2)^{-\frac{3}{2}}\beta$$

$$F'' = +\frac{1.3}{2^2}.(\alpha+\beta y^2)^{-\frac{5}{2}}\beta^2 \quad \text{et d'une façon générale}$$

$$F^n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\beta^n(\alpha+\beta y^2)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

On en tire, en reportant dans la formule précédente :

$$D^n F(x^y) = \frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{\sqrt{(\alpha+\beta y^2)^{2n+1}}}(\beta x)^n \left\{1 - \frac{n(n-1)}{2.(2n-1)}\frac{\alpha+\beta y^2}{\beta y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{\alpha+\beta x^2}{\beta y^2}\right)^2 + \ldots\right\}$$

Faire $x = o$ revient à faire $y = \frac{b}{a}$

on a alors : $\frac{\alpha+\beta y^2}{\beta y^2} = \frac{c - \frac{b^2}{a} + a.\frac{b^2}{a^2}}{\beta a.\frac{b^2}{a^2}} = \frac{ca}{b^2}$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n x^n . \frac{1.3\ldots(2n-1)\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1.2\ldots n\, c^{n+\frac{1}{2}}}\left\{1 - \frac{n(n-1)}{2.(2n-1)}.\frac{ca}{b^2}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}.\left(\frac{ca}{b^2}\right)^2 + \ldots\right\}$$

Si on pose $ca = b^2 - d^2$ on a $\frac{ca}{b^2} = 1 - \left(\frac{d}{b}\right)^2$ et l'on voit que le coefficient de x^n est

égal à b^n multiplié par un polynôme en $\frac{a}{b}$ de degré n ; on voit par là que le coefficient de x^n est homogène, entier, de degré n en a et b.

On considère z comme une variable imaginaire représentée par un point dans un plan, a, b, c, β Const. imagin. (2 points fixes) on considère la fonction $(z-a)(z-b)(z-c)$ et on demande d'étudier la forme des courbes $\mod (z-a)(z-b)(z-c) = C^{te}$ — $\arg.(z-a)(z-b)(z-c) = C^{te}$ —

Le module d'un produit étant égal au produit des modules, le 1er problème revient à l'étude du lieu d'un point dont le produit des distances à 3 points fixes reste constant. On sait construire la normale en un pareil lieu, comme la résultante des dérivées partielles de la fonction des distances qui est constante, après quoi on a à décomposer M au centre de gravité

Bien — Vous voyez que pour construire la normale en un point M du lieu il suffit de prendre sur Ma, Mb, Mc des longueurs ~~MA~~ Ma', Mb', Mc' inversement proportionnelles et de composer M au centre de gravité de Ma, Mb, Mc

de ce triangle
Mais si ce centre
de gravité coïncide
avec M, la normale
est indéterminée
on a alors un point
double; c'est ce qui
arrive quand la dérivée
de $(z-a)(z-b)(z-c)$
est nulle, ce qu'on
pouvait prévoir.
Si le triangle abc est
équilatéral et si
M est au centre de ce
triangle, on a un point
triple, car la dérivée
première et la dérivée
seconde s'annulent toutes deux.

porté ces Dérivées sur les rayons (menés au point mobile) des 3 points fixes respectifs; ici on a $rr'r'' = k$

Donc $\frac{\partial f}{\partial r} = r'r''$ $\frac{\partial f}{\partial r'} = rr''$ $\frac{\partial f}{\partial r''} = rr'$

Donc les composantes ~~sont~~ sont sur les distances aux 3 points fixes sont inversement proportionnelles aux distances mêmes sur lesquelles elles doivent être portées.

Si k est très-petit nous aurons 3 courbes fermées autour de chaque point.

Jamais la courbe n'aura de branches infinies car les distances $rr'r''$ doivent rester finies; en effet si r devenait infini r' ou r'' devrait être nul pour que le produit soit constant et en même temps infini si a, b ~~xx~~, c sont à distance finie, ce qui implique contradiction.

Ces 3 longueurs r r' r'' ne sont pas arbitraires toutes trois.

Si en effet on nomme d_{12} d_{13} d_{23} les longueurs des côtés du triangles abc Donné on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & r \\ 1 & d_{11} & 0 & d_{13} & r' \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & r'' \\ 1 & r & r' & r'' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La courbe est algébriquement du 6e degré
Son équation est, en appelant (a,a') (bb') (cc') les points donnés

$$\{(x-a)^2+(y-a')^2\}\{(x-b)^2+(y-b')^2\}\{(x-c)^2+(z-c')^2\} = K^6$$

Je vais chercher maintenant l'équation de la 2e courbe.

L'argument d'un produit est la somme des arguments. Ici cette somme est constante : soit $\varphi\ \varphi'\ \varphi''$ les arguments. $\varphi+\varphi'+\varphi'' = \text{const}$

$\operatorname{tg}(\varphi+\varphi'+\varphi'') = m$ on a

$$\operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\varphi_1}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_1} \qquad \text{soit } \varphi_1 = \varphi'+\varphi''$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi'+\operatorname{tg}\varphi''}{1-\operatorname{tg}\varphi'\operatorname{tg}\varphi''}$$

$$m = \operatorname{tg}(\varphi+\varphi_2+\varphi'') = \frac{\operatorname{tg}\varphi(1-\operatorname{tg}\varphi'\operatorname{tg}\varphi'')+\operatorname{tg}\varphi'+\operatorname{tg}\varphi''}{1-\operatorname{tg}\varphi'\operatorname{tg}\varphi''-\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\varphi'+\operatorname{tg}\varphi'')}$$

Posons ici $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-a'}{x-a}$ $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{y-b'}{x-b}$
$\operatorname{tg}\varphi'' = \frac{y-c'}{x-c}$, il vient

$$m = \frac{y-a'}{x-a} + \frac{y-b'}{x-b} + \frac{y-c'}{x-c} - \frac{(y-a')(y-b')(y-c')}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$1 - \frac{(y-a')(y-b')}{(x-a)(x-b)} - \frac{(y-b')(y-c')}{(x-b')(x-c)} - \frac{(y-c')(y-a')}{(x-c)(x-a)}$$

$$m\{(x-a)(x-b)(x-c) - (y-a')(y-b')(x-c) - (y-b')(y-c')(x-a) - (y-c')(y-a')(x-b)\}$$
$$= (y-a')(x-b)(x-c) + (y-b')(x-a)(x-c) + (y-c')(x-a)(x-b) - (y-a')(y-b')(y-c')$$

Telle est l'équation sous forme algébrique — Elle est du 3e degré.

Directions asymptotiques:

$$m(x^3 - 3y^2x) = 3yx^2 - y^3$$

Si $m = -1$ ona: $(x-y)^3 = 0$

Si $m = 1$ ona: $x^3 + y^3 - 3xy(x+y) = 0$ ou

$(x+y)\{(x^2 - xy + y^2) - 3xy\} = 0$

$x+y = 0$ et $x = (2 \pm \sqrt{3})y$

Mais je ne vois pas comment discuter régulièrement par l'analytique la forme de ces 2 courbes, ni comment la considération des imaginaires peut en faciliter l'étude.

Vous pouvez remarquer :
1° que les directions asymptotiques d'une même courbe du 3e ordre font entre elles des angles de 60°.
2° que l'une de vos courbes du 3e ordre contient en réalité deux courbes d'égal argument, la courbe d'argument α par ex. et la courbe d'argument $\alpha + \pi$, les arcs qui correspondent à ces diverses valeurs sont séparés par les points a, b, c.
3° qu'en un point double les deux tg à la cassinoïde sont rectangulaires, et que les tg et la courbe d'égal argument en sont les bissectrices.

J. B. Pomey

Voici comment vous pouviez diriger le calcul pour l'équation $rt - s^2 = 0$.

Que signifie-t-elle en effet? que si d^2x et d^2y sont nuls, d^2z est un carré parfait. Or on a:

$$dx = d\rho \cos\omega - \rho d\omega \sin\omega$$
$$dy = d\rho \sin\omega + \rho d\omega \cos\omega$$

d'où:

$$d\rho = dx \cos\omega + dy \sin\omega$$
$$\rho d\omega = -dx \sin\omega + dy \cos\omega$$

Je différ. en remarquant que d^2x et d^2y sont nuls, il vient:

$$d^2\rho = d\omega(-dx \sin\omega + dy \cos\omega)$$
$$\rho d^2\omega + d\rho d\omega = -d\omega(dx \cos\omega + dy \sin\omega)$$

d'où:

$$d^2\rho = \cancel{d\rho d}\rho d\omega^2 \qquad \rho d^2\omega = -d\rho d\omega.$$

Or on a :

$$d^2z = P\,d^2\rho + Q\,d^2\omega + R\,d\rho^2 + 2S\,d\rho\,d\omega + T\,d\omega^2$$

ou

$$d^2z = R\,d\rho^2 + 2\left(S - \frac{Q}{\rho}\right)d\rho\,d\omega + \left(T + P\rho\right)d\omega^2$$

d'où si d^2z est un carré parfait :

$$\left(S - \frac{Q}{\rho}\right)^2 = R\left(T + P\rho\right)$$

En général on a pour un changt de variable quelconque

$$x = \varphi(X, Y) \qquad y = \psi(X, Y)$$

$$d^2x = \frac{dx}{dX}\,d^2X + \frac{dx}{dY}\,d^2Y + \frac{d^2x}{dX^2}\,dX^2 + 2\frac{d^2x}{dX\,dY}\,dX\,dY + \frac{d^2x}{dY^2}\,dY^2$$

$$d^2y = \text{—}$$

$$d^2z = P\,d^2X + Q\,d^2Y + R\,dX^2 + 2S\,dX\,dY + T\,dY^2$$

d'où pour exprimer

$$d^2x = d^2y = d^2z = 0$$

l'équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dX} & \frac{dx}{dY} & \frac{d^2x}{dX^2}\,dX^2 + 2\frac{d^2x}{dX\,dY}\,dX\,dY + \frac{d^2x}{dY^2}\,dY^2 \\ \frac{dy}{dX} & \frac{dy}{dY} & \frac{d^2y}{dX^2}\,dX^2 + 2\frac{d^2y}{dX\,dY}\,dX\,dY + \frac{d^2y}{dY^2}\,dY^2 \\ P & Q & R\,dX^2 + 2S\,dX\,dY + T\,dY^2 \end{vmatrix} = 0$$

Pour que d^2z soit carré parfait, il faut et il suffit que cette éq. ait ses racines égales, c'est à dire que en appelant pour abréger

$$\begin{matrix} P' & Q' & R' & S' & T' \\ P'' & Q'' & R'' & S'' & T'' \end{matrix}$$

les dérivées partielles du 1er et du 2d ordre ~~par rapport~~ de x et de y par rapport à x et y l'éq. cherchée sera:

$$\begin{vmatrix} P & Q & S \\ P' & Q' & S' \\ P'' & Q'' & S'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P & Q & T \\ P' & Q' & T' \\ P'' & Q'' & T'' \end{vmatrix}$$

Méthode générale

pour ~~résoudre les équations~~ séparer les racines des éq. de la forme:

$$f(x, e^x) = 0.$$

On construit la courbe

$$f(x, y) = 0$$

et il s'agit de trouver ses inters. avec $y = e^x$. En suivant la courbe, entre deux racines, il peut l'expression $\frac{y}{e^x}$ doit passer par un maximum ou un minimum. On a donc en ce point:

$$\frac{d\left(ye^{-x}\right)}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{-x}\frac{dy}{dx} - \left(e^{-x}\right)y = 0.$$

ou $y = \frac{dy}{dx}$.

Les points où cela a lieu nous sont donnés algébriquement par l'éq.

$$\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} = 0.$$

Soit maintenant:

$$f(x, \operatorname{tg} x) = 0$$

on construit encore

$$\beta(x, y) = 0$$ dont on cherche

l'intersection avec $y = \operatorname{tg} x$; ~~si on a entre deux inters.~~ Soit z une fonc de x et de y définie par

$$y = \operatorname{tg}(x + z)$$

entre deux inters. z doit passer par un max ou un min. d'où:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(x+z)} = \frac{1}{1+y^2}$$

(9) $= \frac{1}{\cos^2(x+z)} = 1 + \operatorname{tg}^2$

Donc pour séparer les racines, il faut envisager les points de la courbe où l'on a:

$$(1+y^2)\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} = 0.$$

Si on a:

$$f(x, \sin x, \cos x) = 0$$

on met sous la forme:

$$f\left(x, \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = 0.$$

6/

Poney.

Calcul de la série.

$$S = x \sin\varphi + \text{---}$$

Vous trouvez

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin\varphi}{1 - x^2}$$

Soit α la valeur de l'arc tg. qui est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ vous avez:

$$S = \frac{1}{2}(\alpha + K\pi) \qquad K \text{ étant entier.}$$

Mais quelle est la valeur de K! S et α étant des fonctions continues de x et de φ, il en est de même de K. Mais comme c'est un entier, il doit être une constante. Mais pour $x = 0$ $\quad S = \alpha = 0$ d'où $K = 0$

Donc

$$S = \frac{\alpha}{2}.$$

Faisons tendre maintenant x vers 1, φ étant constant nous aurons à la limite la valeur de S pour $x = 1$.

Or pour $x = 1$.

$$\lim \frac{x \sin\varphi}{1 - x^2} = +\infty \qquad \lim \alpha = \frac{\pi}{2} \quad / \quad S = \frac{\pi}{4}$$

si $\sin\varphi > 0$ ou si $0 < \varphi < \pi$

et $\lim \frac{x \sin\varphi}{1 - x^2} = -\infty \qquad \lim \alpha = -\frac{\pi}{2} \qquad S = -\frac{\pi}{4}$

si $\sin\varphi < 0$ ou si $\pi < \varphi < 2\pi$.

Dans vos calculs vous supposez implicitement que φ est dans le premier quadrant.

Forme des courbes d'égal module et d'égal argument

Construisons d'abord les courbes d'égal module.

1° Elles se compose d'un certain nombre de branches fermées, car elles n'ont pas de branches infinies.

2° Les branches fermées ne peuvent présenter de points doubles à tangentes telles que si

(1) dérivée de $(z-a)(z-b)(z-c) = 0$

Il en résulte également que deux branches appartenant à une même cassinoïde ne peuvent se couper ce qui donnerait au moins deux points doubles à tangentes telles et si ; or une même cassinoïde ne peut présenter deux points doubles que si (a' et b' étant les racines de l'équation (1) on a:

$$\text{mod}(a'-a)(a'-b)(a'-c) = \text{mod}(b'-a)(b'-b)(b'-c)$$

ce qui n'a pas lieu en général

Deux branches appartenant à deux cassinoïdes différentes ne peuvent non plus se couper; car le module en chaque point est parfaitement déterminé.

3° Il résulte de là que ces branches fermées s'enveloppent mutuellement sans se couper. A l'intérieur d'une de ces branches fermées on doit donc pouvoir tracer une branche fermée plus petite. Il résulte de là que toute branche fermée doit contenir à son intérieur une courbe fermé infiniment petite, se réduisant à un point. Ce point est alors un point double à tangentes imaginaires. Or on démontre aisément que les seuls points jouissant de cette propriété sont les points a, b, c.

Conclusion. Toute branche fermée de cassinoïde doit contenir à son intérieur au moins un des points a, b, c;

Une cassinoïde se compose donc de 1, 2 ou 3 branches fermées.
Le passage d'une cassinoïde formée de 2 branches à une cassinoïde de 1 ou de 3 branches, ne peut s'effectuer que par une cassinoïde à point double, c'est à dire quand le module de $(z-a)(z-b)(z-c)$ devient égal à
$\mathrm{mod}(a'-a)(a'-b)(a'-c)$ ou à $\mathrm{mod}(b'-a)(b'-b)(b'-c)$
Soit

$$\mathrm{mod}(a'-a)(a'-b)(a'-c) < \mathrm{mod}(b'-a)(b'-b)(b'-c)$$

Quand K est très petit, la cassinoïde a trois branches
Quand K est très grand, elle n'en a qu'une.

Conclusion.

Si $0 < K < \mathrm{mod}(a'-a)(a'-b)(a'-c)$

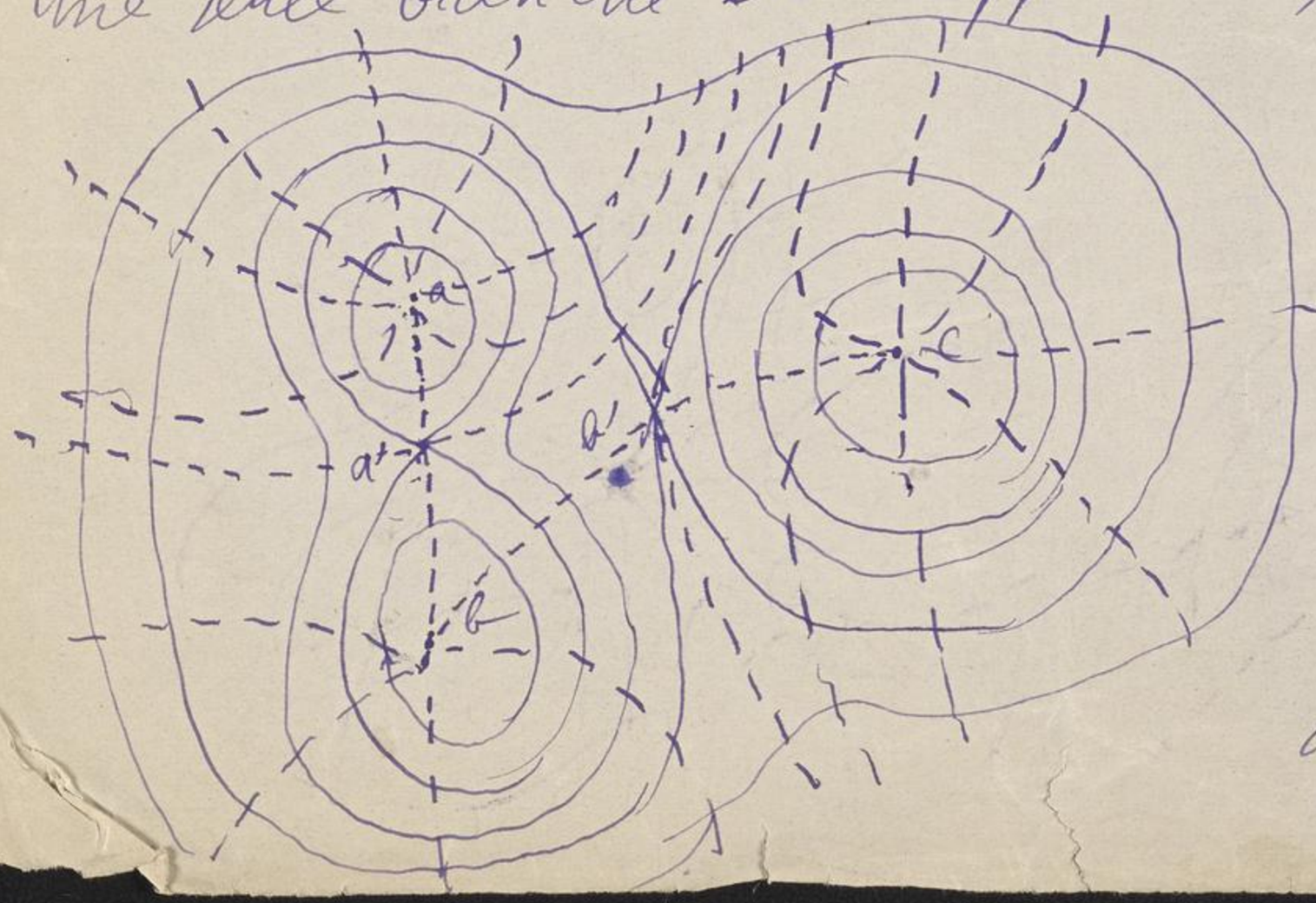
3 branches enveloppant resp. les trois points a, b, c

si $\mathrm{mod}(a'-a)(a'-b)(a'-c) < K < \mathrm{mod}(b'-a)(b'-b)(b'-c)$

2 branches enveloppant l'une les points a et b p. ex. l'autre le point c.

Si $K > \mathrm{mod}(b'-a)(b'-b)(b'-c)$

une seule branche enveloppant a, b, c.

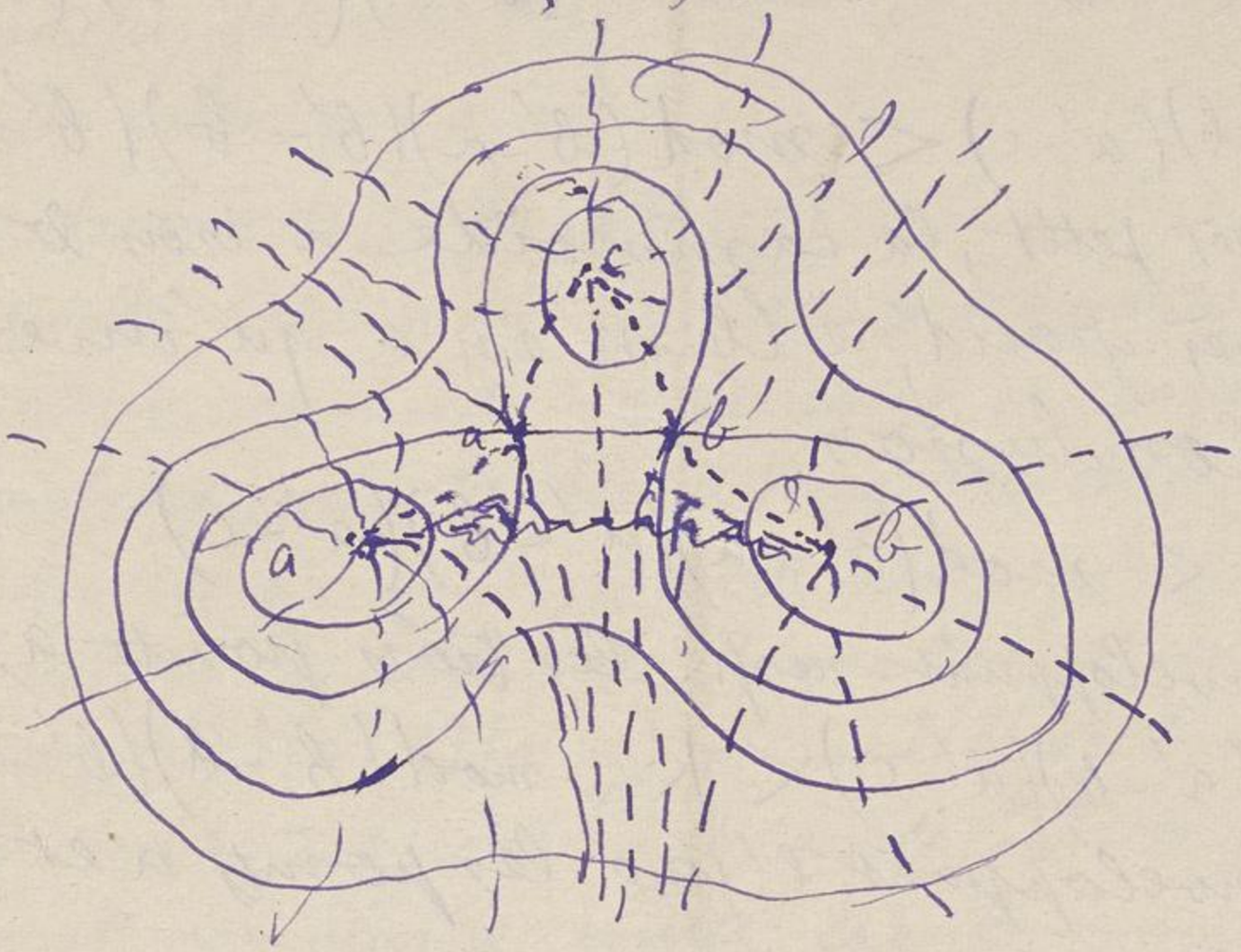


Voici donc l'aspect présenté par le réseau des cassinoïdes. Occupons-nous maintenant des courbes d'égal argument
On les construira aisément en

remarquant qu'elles coupent orthogonalement les cassinoïdes
je les ai dessinées (assez grossièrement) en pointillé
sur la figure. Voici maintenant l'aspect des courbes
dans quelques cas particuliers.

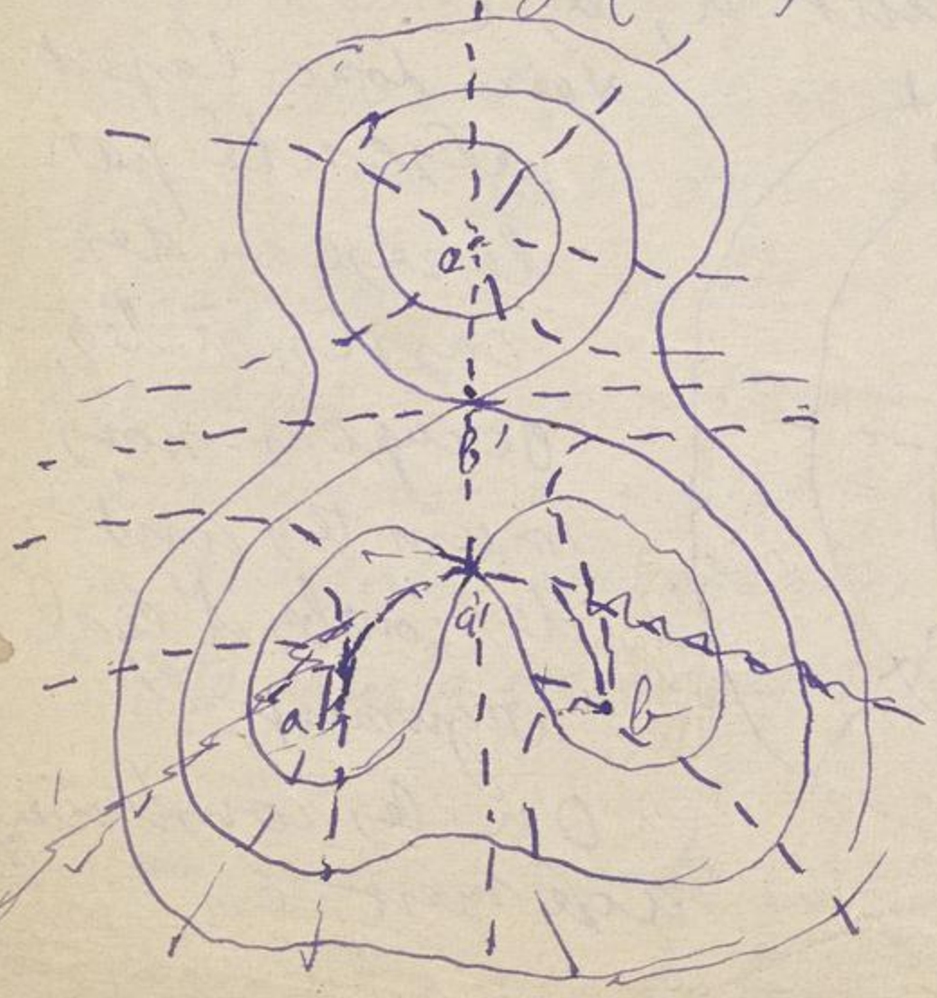
1er cas

$$\text{mod}(a'-a)(a'-b)(a'-c) = \text{mod}(b'-a)(b'-b)(b'-c)$$

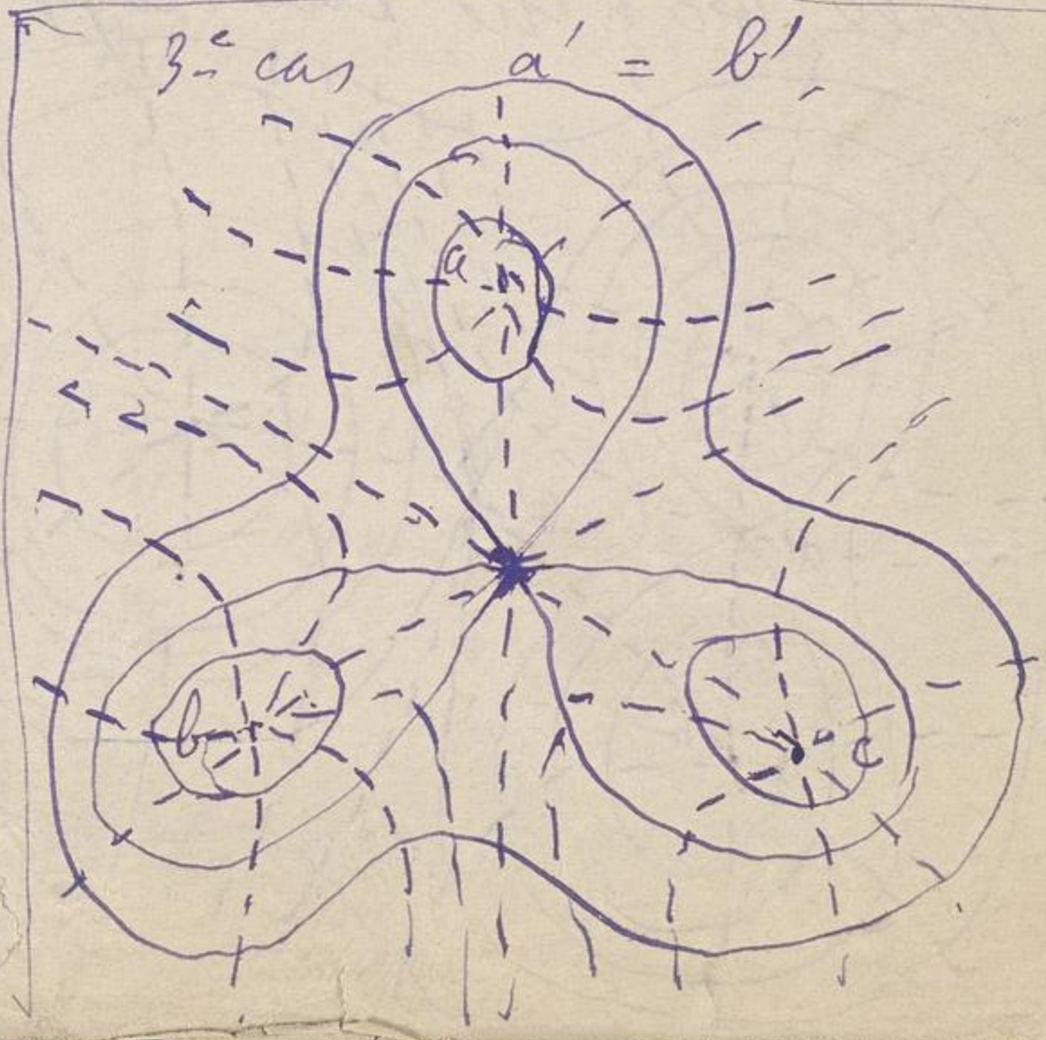


2e cas

$$\arg(a'-a)(a'-b)(a'-c) = \arg(b'-a)$$



3e cas $a' = b'$



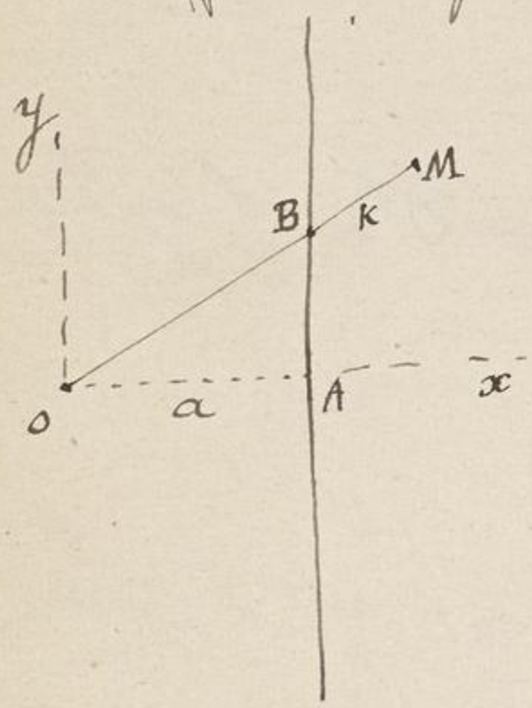
1/

Vous verrez arriver
bientôt un resultat
les coord. polaires mais
n'auriez pas trouvé les
tels que $x+y=0$ etc.
pour n
solution

Pomey.

Analyse.

Trouver le lieu des points d'inflexion des diverses conchoïdes d'une même droite par rapport à un même point.



Prenons pour axe des x la direction OA de la perpendicul. abaissée du point fixe O sur la droite fixe, et pour axe des y la perpend. en O à Ox. Alors on trouve aisément pour équation de la Conchoïde, obtenue en prenant $BM = K$ sur la sécante $OB+$!

$$(x^2+y^2)(x-a)^2 = K^2x^2. \qquad (1)$$

Pour avoir le lieu des points d'inflexion de ~~toutes~~ les conchoïdes (1) où K est variable, ~~il faut~~ on peut former l'équation $y''=0$, puis éliminer K. Mais on peut éliminer K immédiatement, en mettant

(1) sous la forme

$$(1\text{bis}) \qquad \frac{(x^2+y^2)(x-a)^2}{x^2} = K^2 .$$

Car en dérivant cette équation par rapport à x, K disparaît, et l'on a

$$\frac{\left[2x(x-a)^2 + 2(x-a)(x^2+y^2)\right]x^2 - 2x(x^2+y^2)(x-a)^2}{x^4} + \frac{2y(x-a)^2}{x^2}\,y' = 0$$

En chassant les dénomin. et réduisant, il vient

$$(2) \qquad x^3 + ay^2 + x(x-a)\,y\,y' = 0 .$$

~~Dérivons encore cette équation~~ D'où l'on tire

$$(3) \qquad y' = -\frac{x^3+ay^2}{xy(x-a)} .$$

Dérivons (3) et égalons y'' à zéro,

$$\frac{\left(3x^2+2ayy'\right)xy(x-a) - \left(x^3+ay^2\right)\left[y(2x-a)+x(x-a)y'\right]}{x^2y^2(x-a)^2} = 0$$

Chassons le dénominateur $x^2y^2(x-a)^2$

et ordonnons par rapport à y', il vient

$$y'\left[2axy^2(x-a) - x(x-a)\left(x^3+ay^2\right)\right] + 3x^3y(x-a) - y(2x-a)\left(x^3+ay^2\right) = 0$$

ou $y'\left[x(x-a)(ay^2-x^3)\right]y' + 3x^3y(x-a) - y(2x-a)\left(x^3+ay^2\right) = 0$

Remplaçons y' par sa valeur (3), il vient,

après avoir multiplié par y,

$$a^2y^4 - x^6 - 3x^3y^2(x-a) + y^2(2x-a)(x^3+ay^2) = 0,$$

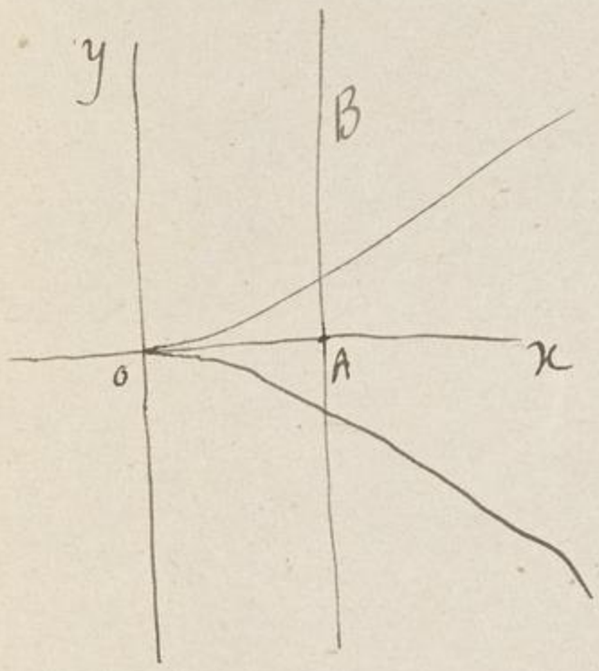
ou, en réduisant et divisant par x,

$$2ay^4 + 2ax^2y^2 - x^3y^2 - x^5 = 0$$

ou enfin $(2ay^2 - x^3)(x^2+y^2) = 0$,

qui se décompose en deux

$$x^2+y^2=0 \qquad 2ay^2 - x^3 = 0.$$



La 1ère représente ~~les points~~ ou plutôt le cercle de rayon 0 qui a pour centre en O ~~circulaires à l'infini~~. La seconde est une courbe du 3ème degré ayant la forme générale ci-contre.

Enfin il faut encore citer comme faisant partie du lieu la droite $x=a$ qu'on obtient deux fois pour $K=0$! ainsi que la droite de l'infini l'axe des y qu'on obtient pour $K=\infty$.

On obtient également les deux droites $x^2+y^2=0$ en faisant $K=0$.

2/

Trouver ce que devient $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$,

lorsqu'on remplace x, y, z par les variables

X, Y, Z définies par les relations

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad , \quad Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \quad , \quad Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

en supposant que α, β, γ, α', β', γ', $\alpha'', \beta'', \gamma'''$

soient les cosinus directeurs de trois droites rectangulaires,

On peut, d'après les relations données, considérer V comme fonction de X, Y, Z; on a donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}$$

ou $$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha \frac{\partial V}{\partial X} + \alpha' \frac{\partial V}{\partial Y} + \alpha'' \frac{\partial V}{\partial Z} .$$

En différentiant cette relation par rapport à x, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \alpha \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$$

$$+ \alpha' \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \cdots\cdots\cdots \right)$$

$$+ \alpha'' \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z \partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \cdots\cdots \right)$$

Mais on a $\frac{\partial X}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial Y}{\partial x} = \alpha'$, $\frac{\partial Z}{\partial x} = \alpha''$;

par suite, en réduisant les termes semblables, on aura

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \alpha'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \alpha''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}$$
$$+ 2\alpha\alpha' \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + 2\alpha'\alpha'' \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} + 2\alpha''\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial Z \partial X}$$

Nous supposons ici, bien entendu, que l'on a $\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial X}$, ce qui suppose que la fonction V et ses dérivées par rapport à X et Y, ou, ce qui revient au même, par rapport à x et y, sont continues.

On aura de même deux autres relations qui se déduiront de (1) en remplaçant x successivement par y et z, et les α par les β et les γ.

En ajoutant ces relations, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \dots\dots$$
$$+ 2(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + \dots\dots$$

Mais, par hypothèse, les axes OX, OY, OZ étant rectangulaires, on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \qquad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 = 1 \qquad \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2 = 1$$
$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' = 0 \qquad \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'' = 0 \qquad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' = 0,$$

Ce dernier cas existe; l'équation $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$ pour un grand volume; c'est celle du potentiel d'attraction newtonienne et c'est aussi celle du potentiel électrique. C'est celle de l'équilibre moléculaire du temperature; c'est celle des mouvements des fluides homogènes incompressibles, quand il y a une fonction des vitesses

et il en résulte

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}.$$

Dérivée $n^{ième}$ de $(x-a)^n(x-b)^n(x-c)^n$.

Posons $u=(x-a)^n$, $v=(x-b)^n$, $w=(x-c)^n$.

On sait qu'on a

$$\frac{d^n(uvw)}{dx^n}=\sum\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha}\frac{d^\beta v}{dx^\beta}\frac{d^\gamma w}{dx^\gamma}$$

où l'on donne à α,β,γ toutes les valeurs entières et positives satisfaisant à $\alpha+\beta+\gamma=n$.

Mais on a ici

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha}=\frac{d^\alpha(x-a)^n}{dx^\alpha}=n(n-1)\cdots(n-\alpha+1)(x-a)^{n-\alpha}$$

$$=\frac{1.2\ldots(n-\alpha)(n-\alpha+1)\ldots(n-1)n}{1.2\ldots(n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}$$

$$=\frac{n!}{(n-\alpha)!}(x-a)^{n-\alpha}$$

on aura donc

$$\frac{d^n(x-a)^n(x-b)^n(x-c)^n}{dx^n}=(n!)^3\sum\frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!}\cdot\frac{n!}{\beta!(n-\beta)!}\cdot\frac{n!}{\gamma!(n-\gamma)!}(x-a)^{n-\alpha}(x-b)^{n-\beta}(x-c)^{n-\gamma}$$

$$=n!\sum C_n^{n-\alpha}C_n^{n-\beta}C_n^{n-\gamma}(x-a)^{n-\alpha}\cdot(x-b)^{n-\beta}(x-c)^{n-\gamma}$$

avec $\alpha+\beta+\gamma=n$.

$C_n^{n-\alpha}$ étant le nombre de combinaisons de n objets $n-\alpha$ à $n-\alpha$.

Vous auriez également calculer les coefficients du polynôme ci-dessus, en remarquant qu'il doit satisfaire à une éq. linéaire du 3e ordre.

Que devient le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^3x}{dt^3} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^3y}{dt^3} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix}$$

où x, y, z sont trois fonctions de t, quand on remplace t par une variable u liée à t par $t = \varphi(u)$; ou, quand on remplace x, y, z par trois fonctions X, Y, Z définies par

$$X = ax+by+cz \quad , \quad Y = a'x+b'y+c'z \quad , \quad Z = a''x+b''y+c''z,$$

ou $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont des constantes. ?

Appelons Δ le déterminant donné.

x, y, z peuvent être considérés comme des fonctions de u, et φ' désignant la dérivée de φ par rapport à u on a

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt}\varphi' \quad , \quad \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dt}\varphi' \quad , \quad \frac{dz}{du} = \frac{dz}{dt}\varphi' \quad ,$$

Dérivons une seconde fois en u ;

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\varphi'^2 \quad , \quad \frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2 \quad , \quad \frac{d^2z}{du^2} = \frac{d^2z}{dt^2}\varphi'^2.$$

Enfin, par une troisième dérivation en u, on a

$$\frac{d^3x}{du^3} = \frac{d^3x}{dt^3}\cdot\varphi'^3 \quad , \quad \frac{d^3y}{du^3} = \frac{d^3y}{dt^3}\varphi'^3 \quad , \quad \frac{d^3z}{du^3} = \frac{d^3z}{dt^3}\varphi'^3.$$

3/

En remplaçant les termes de Δ par leurs valeurs tirées des neuf équations précédentes, Δ devient

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi'} \frac{dx}{du} & \frac{1}{\varphi'^2} \frac{d^2x}{du^2} & \frac{1}{\varphi'^3} \frac{d^3x}{du^3} \\ \frac{1}{\varphi'} \frac{dy}{du} & \frac{1}{\varphi'^2} \frac{d^2y}{du^2} & \frac{1}{\varphi'^3} \frac{d^3y}{du^3} \\ \frac{1}{\varphi'} \frac{dz}{du} & \frac{1}{\varphi'^2} \frac{d^2z}{du^2} & \frac{1}{\varphi'^3} \frac{d^3z}{du^3} \end{vmatrix}$$

ou, en mettant $\frac{1}{\varphi'^6}$ en facteur,

$$\frac{1}{\varphi'^6} \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{d^2x}{du^2} & \frac{d^3x}{du^3} \\ \frac{dy}{du} & \frac{d^2y}{du^2} & \frac{d^3y}{du^3} \\ \frac{dz}{du} & \frac{d^2z}{du^2} & \frac{d^3z}{du^3} \end{vmatrix}$$

déterminant qui ne diffère de Δ qu'en ce que ~~est remplacé~~ chaque dérivée par rapport à t est remplacée par la dérivée correspondante en u. —

Supposons en premier ~~second~~ lieu qu'on substitue à x, y, z les fonctions X, Y, Z linéaires en x, y, z. Prenons les dérivées successives de X, Y, Z par rapport à t.

On a :

$$\frac{dX}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}$$

(1) $$\frac{dY}{dt} = a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dZ}{dt} = a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}.$$

Désignons par D le déterminant

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$, et par $A, A', A'', B, B', B'', C, C', C''$

ses déterm. mineurs de façon que l'on ait

$$D = aA + a'A' + a''A'' = bB + b'B' + b''B'' = cC + c'C' + c''C''.$$

On voit que les équat (1) donneront

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A\frac{dX}{dt} + A'\frac{dY}{dt} + A''\frac{dZ}{dt}}{D}$$, et des valeurs

analogues pour $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$.

Dérivant les équat. (1) en t, on a

(2) $$\frac{d^2X}{dt^2} = a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}$$

et des équat analogues pour $\frac{d^2Y}{dt^2}$ et $\frac{d^2Z}{dt^2}$.

D'où on tirera, de même que plus haut,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{A\frac{d^2X}{dt^2} + A'\frac{d^2Y}{dt^2} + A''\frac{d^2Z}{dt^2}}{D}$$, etc.

Enfin par une troisième dérivation on t, on aura encore trois équations de même forme, d'où on tirera

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{A\frac{d^3X}{dt^3} + A'\frac{d^3Y}{dt^3} + A''\frac{d^3Z}{dt^3}}{D}, \text{ etc.}$$

Substituant toutes ces valeurs dans Δ, on aura

$$\Delta = \frac{1}{D^3}\begin{vmatrix} A\frac{dX}{dt} + A'\frac{dY}{dt} + A''\frac{dZ}{dt} & A\frac{d^2X}{dt^2} + A'\frac{d^2Y}{dt^2} + A''\frac{d^2Z}{dt^2} & A\frac{d^3X}{dt^3} + A'\frac{d^3Y}{dt^3} + A''\frac{d^3Z}{dt^3} \\ B\frac{dX}{dt} + B'\frac{dY}{dt} + B''\frac{dZ}{dt} & B\frac{d^2X}{dt^2} + B'\frac{d^2Y}{dt^2} + B''\frac{d^2Z}{dt^2} & \cdots\cdots \\ C\frac{dX}{dt} + C'\frac{dY}{dt} + C''\frac{dZ}{dt} & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

Exact. Vous arrivez plus aisément au résultat, en écrivant

$$\Delta = \frac{1}{D^3}\begin{vmatrix} \frac{dX}{dt} & \frac{dY}{dt} & \frac{dZ}{dt} \\ \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{vmatrix}$$

ou, d'après la règle du produit de 2 déterminants,

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & & \\ \sim & & \\ \sim & & \end{vmatrix} \qquad \Delta = \frac{1}{D^3}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dX}{dt} & \frac{d^2X}{dt^2} & \frac{d^3X}{dt^3} \\ \frac{dY}{dt} & \frac{d^2Y}{dt^2} & \frac{d^3Y}{dt^3} \\ \frac{dZ}{dt} & \frac{d^2Z}{dt^2} & \frac{d^3Z}{dt^3} \end{vmatrix}$$

$= D\Delta$.

La considération du déterm. des mineurs était ainsi portée.

Mais on sait (Salmon, Algèbre supérieure, page 31) que le déterminant qui a pour éléments les mineurs du déterminant primitif est égal à une puissance de ce déterminant primitif égale à son ordre diminué d'une unité. On a donc $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = D^2$, et

par suite

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3} & \frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial^3 y}{\partial \varepsilon^3} & \frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial \varepsilon^3} & \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \end{vmatrix} \Big| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \end{matrix} \Big| \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Je serais très-heureux que M. Poincaré voulût bien me donner la démonstration du théorème d'Abel sur les séries, dont il m'a parlé dans les notes du précédent devoir, pour le cas où x tend vers x_1 en suivant une courbe quelconque non tangente au cercle de convergence.

Quant à la remarque au sujet du théorème de Bertrand concernant la convergence de $a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots$, je ne l'ai pas bien comprise. Ainsi je ne vois pas pourquoi, en supposant que $\mod(a_0 - a_1) + \mod(a_1 - a_2) + \dots + \mod(a_{n-1} - a_n) + \dots$ soit convergente et ait pour somme S, il en résulte

$$\mod\left(a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi\right) < \frac{2S}{\mod(1 - e^{i\varphi})},$$

ni pourquoi cette inégalité entraîne la suivante

$$\mod\left(a_{n+1} \cos(n+1)\varphi + \dots + a_{n+p} \cos(n+p)\varphi\right) < \frac{2R_n}{\mod(1 - e^{i\varphi})},$$

où R_n est le reste de la série S.

H

Que devient le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^3x}{dt^3} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^3y}{dt^3} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix}$$

où x, y, z sont trois fonctions de t, quand on remplace t par une variable u liée à t par $t = \varphi(u)$. ?

D'après la règle de la dérivation des fonctions de fonction, on aura

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt}\varphi'$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\varphi'^2 + \frac{dx}{dt}\varphi''$$

$$\frac{d^3x}{du^3} = \frac{d^3x}{dt^3}\varphi'^3 + 3\varphi'\varphi''\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\varphi''$$

Et l'on aurait des relations analogues relativement à y et z. Dans ces relations φ' et φ'' sont les deux premières dérivées de φ en u.

Cela posé, appelons Δ le déterminant donné et D le déterminant composé par rapport à u comme Δ l'est par rapport à t. ~~On a~~

Ecrivons, pour la symétrie, les valeurs de

$\frac{dx}{du}$ et $\frac{d^2x}{du^2}$ sous la forme

$$\varphi' \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 0 \cdot \frac{d^3x}{dt^3}$$

$$\varphi'' \frac{dx}{dt} + \varphi'^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 0 \cdot \frac{d^3x}{dt^3} \quad .$$

On aura

$$D = \begin{vmatrix} \varphi' \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 0 \cdot \frac{d^3x}{dt^3} & \varphi' \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 0 \cdot \frac{d^3y}{dt^3} & \varphi' \frac{dz}{dt} + 0 \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + 0 \cdot \frac{d^3z}{dt^3} \\ \varphi'' \frac{dx}{dt} + \varphi'^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 0 \cdot \frac{d^3x}{dt^3} & \varphi'' \frac{dy}{dt} + \varphi'^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 0 \cdot \frac{d^3y}{dt^3} & \varphi'' \frac{dz}{dt} + \varphi'^2 \frac{d^2z}{dt^2} + 0 \cdot \frac{d^3z}{dt^3} \\ \varphi''' \frac{dx}{dt} + 3\varphi'\varphi'' \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi'^3 \frac{d^3x}{dt^3} & \varphi''' \frac{dy}{dt} + 3\varphi'\varphi'' \frac{d^2y}{dt^2} + \varphi'^3 \frac{d^3y}{dt^3} & \varphi''' \frac{dz}{dt} + 3\varphi'\varphi'' \frac{d^2z}{dt^2} + \varphi'^3 \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix}$$

On voit que ce déterminant est le produit de 2 autres, et l'on a

$$D = \begin{vmatrix} \varphi' & 0 & 0 \\ \varphi'' & \varphi'^2 & 0 \\ \varphi''' & 3\varphi'\varphi'' & \varphi'^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^3x}{dt^3} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^3y}{dt^3} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix} ,$$

ou $D = \varphi'^6 \cdot \Delta$. D' où

$$\Delta = \frac{D}{\varphi'^6} .$$

Si l'on veut transformer Δ en substituant à x, y, z les fonctions X, Y, Z définies par $X = ax+by+cz$, etc., on peut opérer plus rapidement que je ne l'ai fait plus haut, et sans avoir à résoudre trois systèmes qui, étant composés de la même manière, se résolvent aussi de la même manière, mais qu'on n'en est pas moins obligé de former.

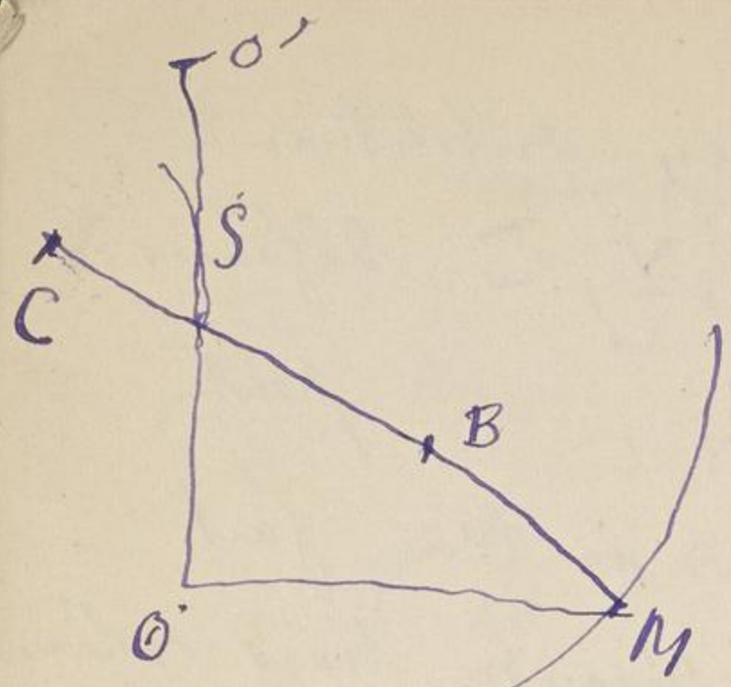
Il suffit de résoudre le système de substitution par rapport à x, y, z, ce qui donne

$$x = \frac{AX + A'Y + A''Z}{D},$$

$$y = \frac{BX + B'Y + B''Z}{D},$$

$$z = \frac{CX + C'Y + C''Z}{D}.$$

Il n'y a plus qu'à dériver trois fois ces valeurs pour avoir les expressions des termes de Δ. Et l'on n'a eu en tout qu'une seule résolution d'équations à opérer.



C est le centre de courbure de la courbe M. La circonf. d'infl. passe par S, par O' tel que SO = SO', et par B tel que

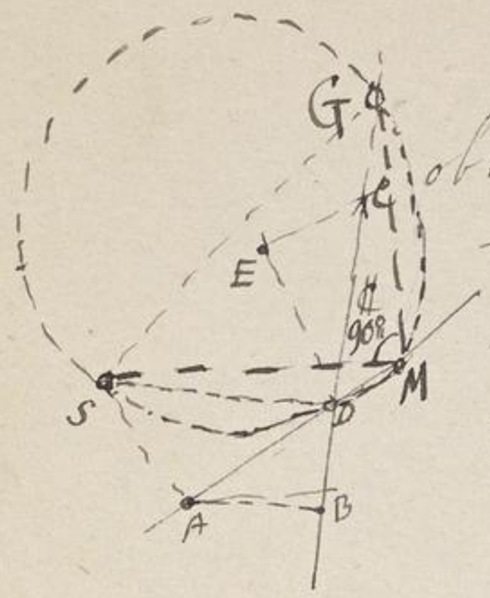
$$MS^2 = MB.MC.$$

Pour qu'elle passe par O, il faut:
1° ou bien que les points O'SO se confondent, et alors OM est normal à M, d'où $\rho' = 0$
2° ou bien qu'ils soient en ligne droite, ce qui exige que le point S ou le point B s'éloigne indéf.
Pour que le point S soit à l'infini, il faut que le point M soit à l'infini, ou MS parallèle à OS, et p. cons. OM tg à M d'où $\rho' = \infty$.
Pour que le point B soit à l'inf. il faut MC = 0 c'est à dire qu'on ait un pt de rebroussement en M; ~~c q~~ c q nous ne supposerons pas, puisque je prends la courbe M la plus générale de son degré. Il reste donc à examiner les deux cas $\rho' = 0$, $\rho' = \infty$.
1° $\rho' = 0$, m^2 solutions correspondant chacune à un point de rebroussement du lieu des pts d'infl. (solutions doubles)
2° $\rho' = \infty$ point M à l'infini - à rejeter, donne les droites parallèles aux asymptotes de M ~~dans~~ menées par O, droites à l'infini. C'est partie du lieu.
3° $\rho' = \infty$ OM tangente. - $m(m-1)$ solutions simples.
Conclusion Le degré du lieu est

$$2m + 2m^2 + m(m-1) = 3m^2 + m \text{ et non } m^2 + 3m.$$

J-B Poncy

Lieu des points d'inflexion des conchoïdes

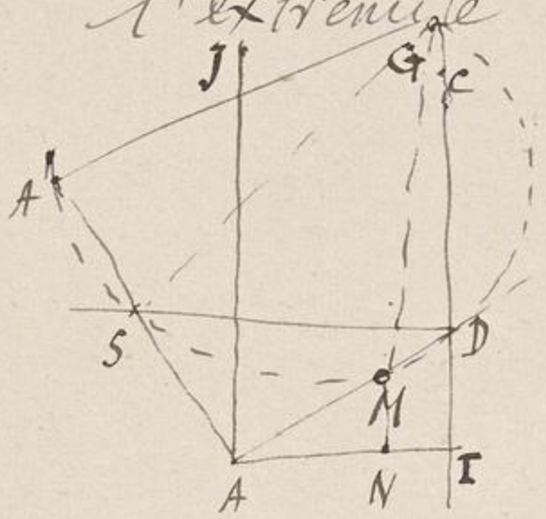


obtenues au moyen d'un pôle A et d'une droite BC invariables, la courbe se déformant quand la longueur l qu'on porte sur les rayons vecteurs à partir de la droite change de valeur.

Cette longueur l est une figure invariable ; si je considère les diverses courbes engendrées par les diverses valeurs de l, comme simultanément décrites par les points d'une droite AD ponctuelle (dont les points sont considérés comme ceux d'une figure invariable), je peux tirer la connaissance du lieu du point d'inflexion de celle du centre des accélérations ; et comme je supposerai uniforme le mouvement de rotation de rayon vecteur AD, il suffira de chercher le lieu du point G qui est, sur AD, la projection du centre géométrique G des accélérations. Le sur une droite menée de S,

Centre instantané est en S, au point de rencontre de la perpendiculaire en A au rayon vecteur et de la normale en D à la droite fixe BC. Prenons pour unité la vitesse uniforme de rotation. Le point S participe à deux mouvements l'un suivant DC l'autre suivant DS ; si on le considère comme se mouvant sur une perpendiculaire à SD entraînée parallèlement à elle même avec une vitesse DC = SD ; ou bien encore s'il parle est considéré comme se mouvant sur une

perpendiculaire en A au rayon vecteur AD mobile, il a une vitesse = AS suivant la perpendiculaire en S à AS et une vitesse propre sur AS. ~~qui est in~~. On aura donc la vitesse de D S et la direction de son déplacement en élevant des perpendiculaires aux 2 extrémités de ses vitesses suivant DC et suivant la normale à AS et en prenant la diagonale passant par A du quadrilatère ainsi formé; on aura la normale en faisant tourner de 90° ce quadrilatère, il se compose alors de SD de DC de SA' = SA sur le prolongement de SA et de la normale A'G à ~~l'ex~~ l'extrémité de SA'. Le point D de la droite ponctuelle AD décrit la droite fixe donc G centre des accélérations qui se trouve sur la normale à la trajectoire de S, centre instantané, et sur la droite DC, se trouve à la rencontre de A'G et de DC. Le point M, seconde intersection de AD et du cercle dont SG est le diamètre, avec AD est un point du lieu. On a:



$AM \cdot AD = AS \cdot AA'$ ou $AM \cdot AD = 2\,AS^2$ ou $\frac{AM}{AD} = 2 \cdot \left(\frac{AS}{AD}\right)^2$.

Soit N la projection de M sur la perpendiculaire à DC menée de A. On a: $\frac{AS}{AD} = \frac{AN}{AM}$ et $\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AI}$ soit donc

$AI = y$ $AN = x$ $AI = a$ On a $y^2 = \frac{x^3}{2a}$. On a en outre les points circulaires à l'infini 2° la droite à l'infini AN et DC comme droites doubles, pour compléter le lieu.

Poncy.

Sur le lieu des points d'inflexion des conchoïdes d'une courbe.

Pour cause incomplète voir page 4 feuille 4

Sur chaque rayon vecteur, nous obtenons tout d'abord m points par les intersections de ce rayon avec les circonférences des inflexions, correspondant aux m intersections du rayon vecteur et de la courbe donnée, supposée de degré d = m.

Mais l'origine est un point multiple de ce lieu. Je vais évaluer combien de points d'inflexion se sont venus confondre à l'origine, d'où rayonnent les rayons vecteurs.

A cet effet, je considère une conchoïde particulière et le point M de la courbe donnée qui se trouve avoir donné l'origine comme point du lieu conchoïde. Soient ρ, ω ses coordonnées polaires ; $\rho + d\rho$, $\omega + d\omega$ les coordonnées d'un point M' infiniment voisin sur la courbe donnée. Le point $d\rho$, $\omega + d\omega$ est un point infiniment voisin de la conchoïde, puisque tous ses rayons vecteurs diffèrent, de ceux de la courbe donnée, de la quantité ρ constante. Le point N' ainsi obtenu est à une distance $d\rho$ du point O, infiniment voisin sur la conchoïde qui passe en O tangentiellement à OM.

La corde OM fait avec la tangente en M un angle du ~~droit~~ de l'angle de contingence, donc le rayon de courbure en O est $\frac{dy}{2\,dw}$.

Donc l'origine est un point multiple dont l'ordre représente le nombre de fois que S' passe à l'infini.

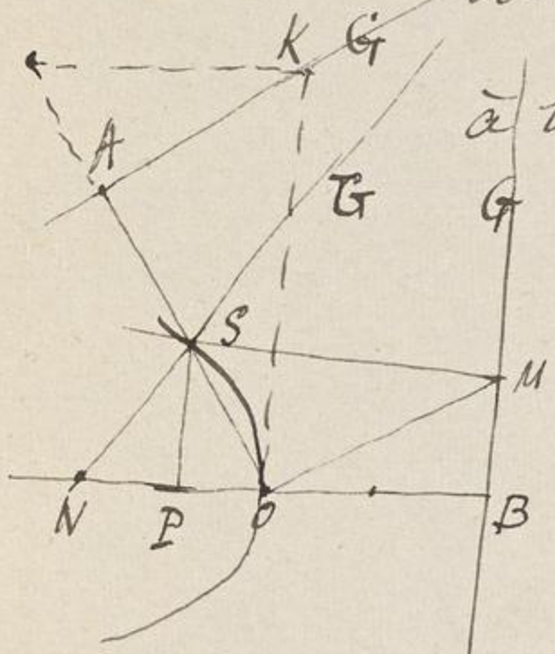
Or S'est la sous-normale de la courbe donnée. A un rayon vecteur OM correspondent m intersections de la courbe donnée et m sous-normales donc m points S sur le rayon OS perpendiculaire. Mais l'origine est un point multiple de la courbe lieu de S en effet S & O coïncident quand SM et OM sont parallèles ou que OM est normal à la courbe. or il y a m^2 positions où ce fait se produit. donc le lieu de S est de l'ordre $m(m+1)$. Cette courbe a donc $m(m+1)$ points à l'infini & S' devient infini $m(m+1)$ fois.

Donc il y a $m(m+1)$ points d'inflexion à l'origine + 2m sur chaque rayon vecteur donc m^2+3m ou $m(m+3)$ points. ~~Le~~ L'ordre du lieu est donc $m(m+3)$.

En réalité le lieu des points S a $m(m-1)$ asymptotes correspondant aux tg menées de O à la courbe et m branches paraboliques corresp. aux asymptotes de la courbe.

Je remarquerai que si le point M est un des
$n(n-1)$ points de contact des tangentes issues de O
à la courbe le point S' est rejeté à l'infini et
la courbure est ~~infinie~~ nulle à l'origine car si M se
déplace d'un infin. petit du 1er ordre, le rayon
vecteur tourne d'un angle du second et la distance
mutuelle des 2 rayons infiniment voisins est du 3e
auprès de l'origine.

Dans le cas de la courbe donnée est une
droite; cette droite est obtenue comme partie du lieu;
il reste donc une courbe du 3e ordre. Les points
à l'origine sont obtenus pour S' infini, ici
le lieu de S est du 2e degré; c'est
une parabole, car la sous-normale
NP est constante. On a en effet:



$\frac{NP}{PS} = \frac{MG}{MB}\frac{SM}{OM}$ si par O je mène une
parallèle à la droite donnée, OK est égal à
MG. et on a: $\frac{OK}{AO=2OS} = \frac{MS}{OM}$

d'où: $NP = \frac{PS.\,OM}{2\,OK} = PS.\frac{2\,MB}{OB} = \frac{OB}{2}$

$$NP = PS.\frac{SM}{(MG=OK)} = \frac{PS.\,OM}{2\,OS} = \frac{PS}{2}.\frac{OB}{MB} = \frac{OB}{2}.$$

Les directions asymptotiques coïncident
On n'en avait qu'une OB en apparence

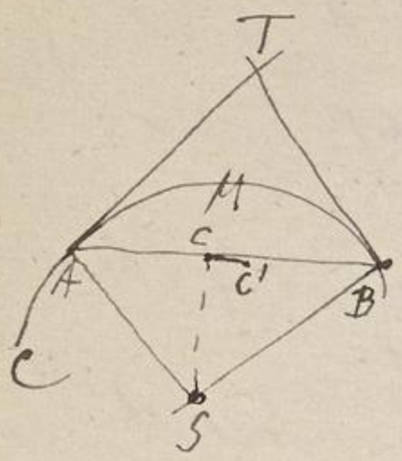
Quand OM vient en OB le point S vient en O au lieu d'aller à l'infini c'est quand OM est perp à OB, que S est à l'infini.

Or la courbe est symétrique par rapport à OB et tous les points de la courbe sont à droite de OK ; il suffit de remarquer que la circonférence des inflexions passant en S et A et coupant déjà OM en M, déjà le second point d'intersection se trouve sur OM du même côté que M. Comme l'origine est un point double, c'est un point de rebroussement avec OB pour tangente.

Quand deux points à l'infini ils se trouvent dans la direction OK, car le point de la courbe est à distance finie tant que M est à distance finie et M ne s'éloigne à l'infini que dans cette direction.

En ce qui concerne les points à l'infini du lieu des pts d'infl. On les obtient évid. quand la circ. d'infl. se réduit à une droite. La circ. se réduit à une droite quand ~~le point M~~ OM est ⊥ à la courbe donnée (mais alors les pt d'infl. vient en O) ou quand M est à l'infini.
La courbe admettra donc des branches paraboliques dans la direction des asymptotes de la courbe donnée.

Poncy



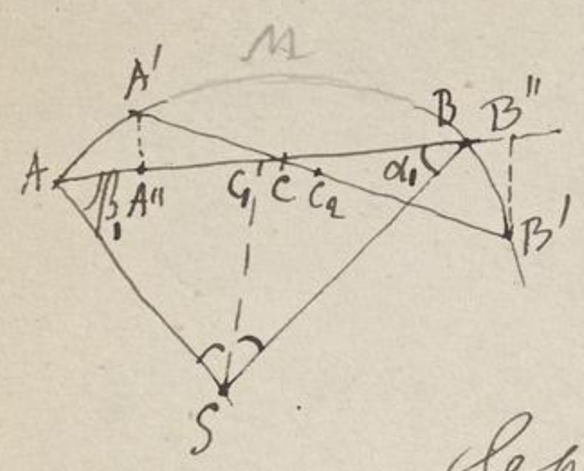
Analyse

On donne une Courbe C et dans cette courbe une Corde mobile AB : On demande de Construire le point où AB touche son enveloppe

Définition du mouvement de AB : on suppose 1° que AB est Constant ; 2° (deux. problème) que l'arc AMB est Constant ; 3° que l'aire AMB est Constante 4° que l'angle ATB est constant.

1° AB est Constant. Soit S le point de rencontre des normales en A & B. Soit C la projection sur AB. Le point C se déplace tangentiellement à AB, car S est le centre instantané de rotation ; donc CS pour normale CS, ACB est alors tangente au lieu de C, or quand AB tourne en vertu d'une rotation dw autour de S, ses points viennent à des distances inf. voisines (del'ordre de dw), de leurs positions primitives, et C venant en C', infiniment voisin d'ordre supérieur au premier de AB, est infiniment voisin de l'~~ord~~ l'intersection des deux positions de AB ; comme la position limite est C, c'est l'intersection (limite) des 2 positions infiniment voisines de AB, donc le point où AB touche son enveloppe

2° arc AMB est constant. Soit A'B' une position infiniment voisine, C l'intersection avec AB.



On a arc AA' = arc BB'. Soit A'' & B'' les projections de A' & B' sur AB on a:

$\frac{A''C}{B''C} = \frac{A'A''}{B'B''}$ or lim. $\frac{A''C}{B''C} = \frac{AG}{BC_1}$ G étant le point où AB touche son enveloppe — soient α et β les angles des cordes $\overline{AA'}$ et $\overline{BB'}$ avec AB

Exact

on a: $A'A'' = \text{corde } AA' . \sin\alpha$ or lim. $\frac{\text{arc } AA'}{\text{corde } AA'} = 1$

$B'B'' = \text{corde } BB' . \sin\beta$ lim $\frac{\text{arc } BB'}{\text{corde } BB'} = 1$

lim $\alpha = \alpha_1$, angle de la tangente en A avec AB

lim $\beta = \beta_1$, angle de la tangente en B avec AB Donc

$\lim \frac{A'A''}{B'B''} = \frac{AC_1}{BC_1} = \lim \frac{\text{arc. } AA'}{\text{arc. } BB'} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$

Soit AS et BS les parallèles menées de A & B aux tangentes en B et A, S leur intersection, SG la bissectrice de leur angle en S qui coupe en G AB. Le point G coïncide avec le point C_1 où AB touche son enveloppe, car on a par cette construction:

$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AS}{BS} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$.

3° l'aire & AMB est constante. Alors (fig. précéd.) on a: aire A'CA = aire CBB', en négligeant l'aire comprise entre les 2 positions AB, A'B' et de l'enveloppe C_1C_2 De AB; cette aire ~~a pour valeur principale~~ est plus petite que le triangle CC_1C_2, or on a:

aire $CC_1C_2 = \frac{1}{2} CC_1 . CC_2 . \sin BCB'$. Or CC_1 CC_2 et $\widehat{BCB'}$

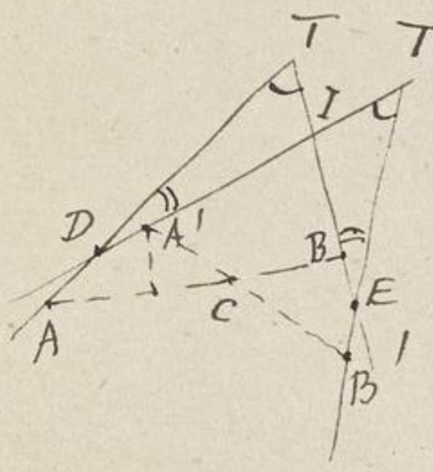
sont des infiniment petits ; donc on a : aire $A'CA$ = aire $CB'B$ aux infin. petits près du 3e ordre. Or on a : aire $A'CA = \frac{1}{2} AC \cdot A'A''$ aux infiniment petits près du 2e ordre car l'aire $AA'B''$ différence des 2 membres est moindre que $AA'' \times A'A''$, produit de 2 infiniment petits. On a donc aux infiniment petits près du 2e ordre : $A'A'' \times A''C = B'B''.B''C$

or : $\frac{A'A''}{A''C} = \frac{B'B''}{B''C}$ Donc : $\overline{A''C}^2 = \overline{B''C}^2$ On a donc :

$A''C = B''C$ ou plus justement $\lim A''C = \lim B''C$ soit

$AC_1 = BC_1$, C_1 étant le point où AB touche son enveloppe. Donc C_1 est le milieu de AB.

4° l'angle $A'I'B$ est constant.



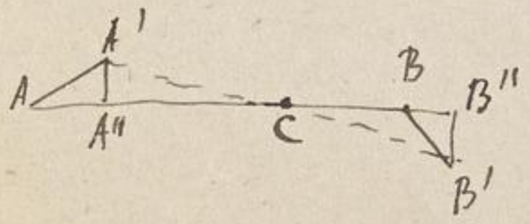
Soit R le rayon de courbure en A
et R' le rayon de courbure en B
Soit $d\alpha$ l'angle de contingence et
$S = f(\alpha)$ l'équation de la courbe.

On a en A : $\frac{dS}{d\alpha} = R$

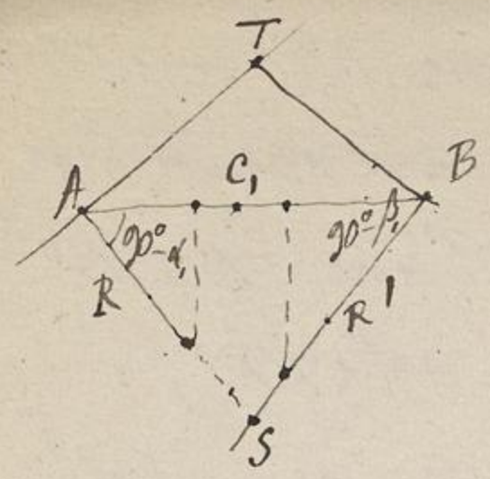
et en B : $\frac{dS'}{d\alpha} = R'$

Exact.

et ds et ds' ont les mêmes valeurs principales que AA' et BB' car AA' et BB' correspondent à un angle $d\alpha$ de contingence constant car on a dans DIT et EIT' $T = T'$ $I = I$ opposé par le sommet Donc $D = E$. Soient A'' & B'' les projections de A' & B' sur AB on a :



$\lim \frac{CB''}{CA''} = \frac{C_1B}{CB} = \lim \frac{B''B'}{A'A''} = \lim \cdot \frac{ds' \sin\beta}{ds \sin\alpha} = \frac{R'}{R} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}$ Donc



Donc C_1 partage AB dans le rapport des projections des R & R' sur AB ; la proportion

$$\frac{AC_1}{R\sin\alpha_1} = \frac{C_1B}{R'\sin\beta_1} = \frac{AB}{R\sin\alpha_1 + R'\sin\beta_1}$$

détermine ce point.

On peut écrire aussi :

$$\frac{AC_1}{} = \frac{AB.TB.R}{R.AT. + R'.TB} \qquad C_1B = \frac{AB.AT.R'}{R.AT + R'.TB}.$$

ou ~~$C_1 = \frac{1}{\sin B}\cdot\frac{\text{aire } ATB}{\text{aire } SATB}$~~ $\qquad$ ~~$C_1B = \frac{1}{\sin A}\cdot\frac{\text{aire } ATB}{\text{aire } SATB}$~~

~~Donc $AC_1 \sin B = C_1B \sin A$ les projections de~~

Soit $P = a_0 + a_1 e^{i\varphi} + \ldots + a_n e^{ni\varphi}$ on a :

$\mod P < \mod\left[\frac{2a_0}{1-e^{i\varphi}}\right]$, en supposant les nombres $a_0 \ldots a_n$ positifs, réels, décroissants.

En effet on a : $P = a_0 + a_1 e^{i\varphi} + \text{—} + a_n e^{ni\varphi}$

multiplions par $1-e^{i\varphi}$ on a :

$$P(1-e^{i\varphi}) = a_0 + (a_1-a_0)e^{i\varphi} + \ldots + (a_n - a_{n-1})e^{ni\varphi} + a_n e^{(n+1)i\varphi} = \varphi$$

$$\mod P.\mod(1-e^{i\varphi}) = \mod\varphi < \mod a_0 + \mod(a_1-a_0) + \ldots + a_n \mod(a_n - a_{n-1}) + \mod a_n$$

puisque $\mod e^{ki\varphi} = 1$ or $\mod(a_{K+1} - a_K) = a_K - a_{K+1}$ car a_{K+1} & a_K sont réels, positifs et $a_{K+1} < a_K$ on a donc

$$\mod P < \frac{1}{\mod(1-e^{i\varphi})} 2a_0 \text{ ou } \mod P < \mod\left[\frac{2a_0}{1-e^{i\varphi}}\right]$$

C.Q.F.D.

Bien remarquer que cela démontre le théorème de Bertrand relatif à la série

a_0
$+ a_1\cos\varphi$
$+ a_2\cos 2\varphi$
$+ \text{—} \text{—}$

On donne l'équation $rt - s^2 = 0$ On demande ce qu'elle devient quand on y remplace x & y par ρ & ω définis par $x = \rho \cos\omega$ $y = \rho \sin\omega$ -

Soient p, q les dérivées partielles de z en x et y
$r\ t\ s$ ses dérivées secondes en x^2 xy et y^2.

Soient P, Q les dérivées partielles en ρ et ω,
$R\ T\ S$ ses dérivées secondes en ρ^2 $\rho\omega$ et ω^2.

On a :

$$(1)\quad p = P\frac{\partial\rho}{\partial x} + Q\frac{\partial\omega}{\partial x} \qquad q = P\frac{\partial\rho}{\partial y} + Q\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

$$(2)\quad r = R\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + 2S\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x} + T\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$$

$$(3)\quad s = R\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y} + S\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}\right) + T\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + P\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} + Q\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$$

$$(4)\quad t = R\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 + 2S\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y} + T\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + P\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + Q\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}.$$

On tire de ces 3 dernières équations de transform.

$$\begin{aligned}
rt - s^2 = {} & \mathbf{RT}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y}\right) \text{ carré de } \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} \\
& + S^2\left(4\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\right) \text{ carré de } \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y} \\
& + RP\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}\right) \\
& + RQ\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right) \\
& + TP\left(\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}\right) \\
& + TQ\left(\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right) \\
& + 2SP\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}\right) \\
& + 2SQ\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right) \\
& + P^2\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}\right)^2\right) + Q^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right)^2\right) + 2PQ\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Des équations $\rho x = \rho\cos\omega$ & $y = \rho\sin\omega$

On tire $\rho^2 = x^2+y^2$ et $\omega = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

D'où $\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} = x$ $\quad \rho\frac{\partial\rho}{\partial y} = y$ $\quad \begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\omega \\ \frac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\omega \end{cases}$

et $\rho\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 = 1$ $\quad \rho\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 = 1$ $\quad \begin{cases} \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\omega}{\rho} \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} = -\frac{\sin\omega\cos\omega}{\rho} \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\omega}{\rho} \end{cases}$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} = 0$$

Bien vous pouvez notablement simplifier les calculs

On a aussi :

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\omega}{\rho}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\omega}{\rho}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{\sin\omega\cos\omega}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\sin^2\omega-\cos^2\omega}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -2\frac{\sin\omega\cos\omega}{\rho^2}$$

En substituant on trouve :

$$rt-s^2 = \frac{RT-S^2}{\rho^2} + \frac{RP}{\rho} + \cancel{\frac{TP\cos^2 2\omega}{\rho^2}} + 2\frac{SQ}{\rho^3} - \frac{Q^2}{\rho^4}$$

Proposons nous de chercher seulement
l'équation $rt - s^2 = 0$, avec les variables ξ & w
en conservant les mêmes notations, en la
considérant comme l'équation aux dérivées partielles
des surfaces développables, c'est-à-dire enveloppes
d'un plan mobile dont nous écrirons l'équation
sous la forme :

$$z = \xi(\alpha \cos w + \varphi(\alpha) \sin w) + \psi(\alpha)$$

où α désigne un paramètre variable, φ et ψ
des fonctions du paramètre α et qui ne servent
qu'à définir le mouvement du plan, sans changer
la nature de la surface. Le but que on se propose
est de trouver une équation satisfaite pour toute
surface développable indépendamment de la
manière dont un plan mobile peut l'envelopper.

Le problème est l'élimination de α $\varphi(\alpha)$ $\psi(\alpha)$
de l'équation de la surface. Cette surface
peut être représentée par le système :

Bon

$$\begin{cases} z = \rho(\alpha \cos w + \varphi(\alpha) \sin w) + \psi(\alpha) \\ 0 = \rho(\cos w + \varphi'(\alpha) \sin w) + \psi'(\alpha) \end{cases}$$

~~ou α est la fonction de~~ ou par la 1ère
d'entre ~~elle~~ ces deux équations où α prendra la signification
d'une fonction de ρ & w définie par la 2e

Puisque l'élimination de α entre ces deux équations donne l'équation de la surface. En différentiant la 1ère et tenant compte de la 2e en vertu de laquelle $d\alpha$ a pour coefficient zéro ; on obtient :

$$dz = d\rho(\alpha\cos\omega + \varphi(\alpha)\sin\omega) + d\omega\,\rho(-\alpha\sin\omega + \varphi'(\alpha)\cos\omega)$$

D'où $P = \alpha\cos\omega + \varphi(\alpha)\sin\omega$

$$\frac{1}{\rho}Q = -\alpha\sin\omega + \varphi(\alpha)\cos\omega$$

D'où : $\alpha = P\cos\omega - \frac{1}{\rho}Q\sin\omega$

$$\varphi(\alpha) = P\sin\omega + \frac{1}{\rho}Q\cos\omega$$

Donc $P\cos\omega - \frac{1}{\rho}Q\sin\omega$ est fonction de

$$P\sin\omega + \frac{1}{\rho}Q\cos\omega$$

Donc le déterminant fonctionnel est nul.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\left(P\cos\omega - \frac{1}{\rho}Q\sin\omega\right) & \frac{\partial}{\partial\rho}\left(P\sin\omega + \frac{1}{\rho}Q\cos\omega\right) \\ \frac{\partial}{\partial\omega}\left(P\cos\omega - \frac{1}{\rho}Q\sin\omega\right) & \frac{\partial}{\partial\omega}\left(P\sin\omega + \frac{1}{\rho}Q\cos\omega\right) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} R\cos\omega - \frac{1}{\rho}S\sin\omega + \frac{1}{\rho^2}Q\sin\omega & R\sin\omega + \frac{1}{\rho}S\cos\omega - \frac{1}{\rho^2}Q\cos\omega \\ S\cos\omega - \frac{1}{\rho}\cdot T\sin\omega - P\sin\omega = \frac{1}{\rho}Q\cos\omega & S\sin\omega + \frac{1}{\rho}T\cos\omega + P\cos\omega - \frac{1}{\rho}Q\sin\omega \end{vmatrix} = 0$$

Soit $\frac{RT - S^2}{\rho} + 2\frac{SQ}{\rho^2} + RP - \frac{Q^2}{\rho^3} = 0$ Le premier membre ne diffère que par le facteur $\frac{1}{\rho}$ du résultat de la substitution.

On Demande de séparer les racines réelles des équations suivantes.

$$\begin{cases} x = 2\sin^2 x + 1 \\ x(e^x - 1) = e^x + 1 \\ x^2 + e^{2x} = 2 \end{cases}$$

Considérons l'équation $x = 2\sin^2 x + 1$. Toute racine réelle de cette équation doit être positive La dérivée est $1 = 2 . \sin 2x$ les racines en sont

$2x = \frac{\pi}{12}$ $2x = \pi . \frac{11}{12}$ $2x = \pi . \frac{25}{12}$ etc. Essayons $0, \frac{\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, 3$ en effet x Doit aussi être inférieur à 3 ; or la dernière valeur énoncée Donne pour x une valeur supérieure à 3. Considérons la fonction : Doit être écartée, car elle

$y = x - (2\sin^2 x + 1)$ ou $x + \cos 2x - 2$. Zéro Donne

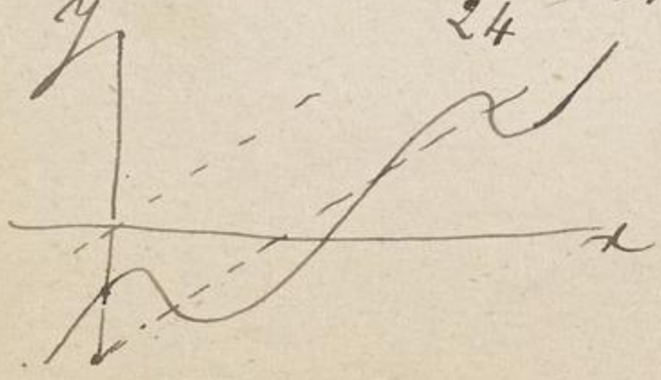
-1 pour substitution, $\frac{\pi}{24}$ Donne $\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2$

qui est encore négatif ; en effet prenons

$\pi = 3,15$ $\sqrt{3} = 1,74$ on a $-\frac{23,97}{24} > -1$

la valeur d'après suivante Donne une valeur encore inférieure, mais 3 Donne +. Donc il n'y a qu'une racine ; elle est située entre

~~XXX~~ $\frac{11\pi}{24}$ et 3.

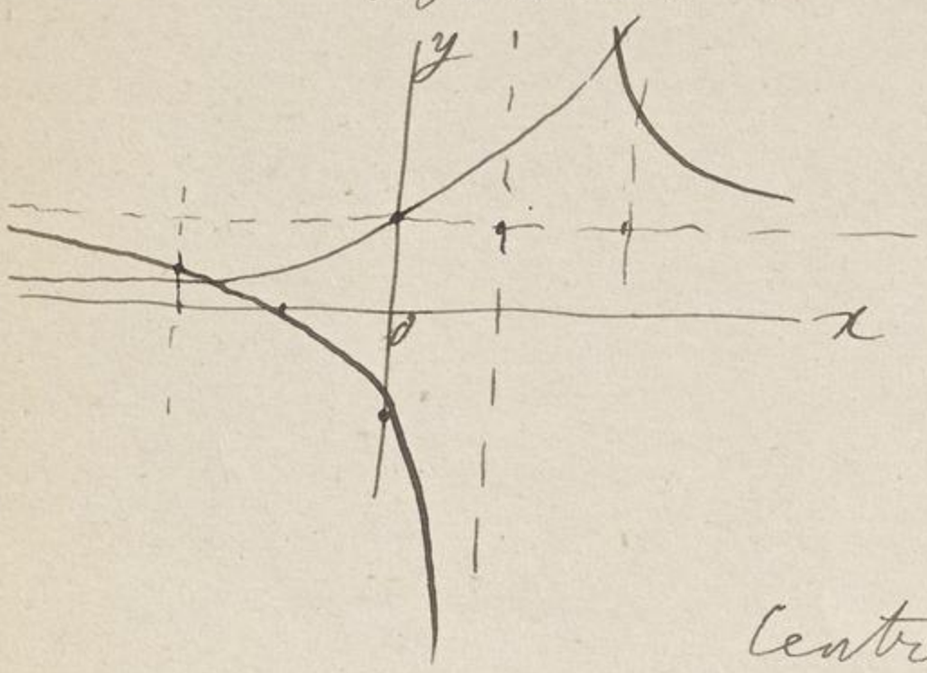


La figure ci-contre représente la fonction y.

Considérons

$$x(e^x - 1) = e^x + 1$$

Soit $y = e^x$ $xy - (x+y) = 1$. Les points d'intersection de ces 2 courbes ont pour abscisses les racines : je les représente



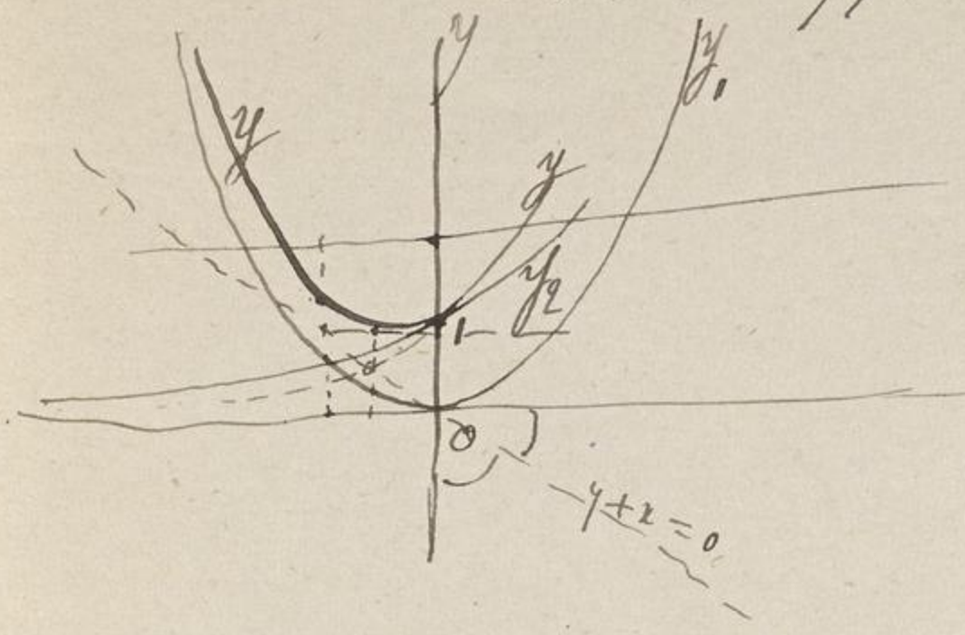
La première a pour asymptote la direction négative des x et va à l'infini des y quand x augmente indéfiniment.

La 2e est l'hyperbole de centre (1, 1) dont les direct. asymptotiques sont les axes. Donc il y a deux racines séparées par l'origine et dont la valeur absolue est supérieure à 1. La racine positive est inférieure à 2.

Si nous posons $x = -2$ on a pour l'y de l'hyperbole $y_1 = \frac{1}{3}$ et pour l'y de $y = l^x$ $y_2 = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{(2,718\ldots)^2}$ on a donc $(2,718\ldots)^2 > 3$ ou $y_1 > y_2$ donc la racine négative est entre -2 et -1.

Considérons $x^2 + e^{2x} = 2$

Soit $y_1 = x^2$ $y_2 = e^{2x}$ $y = x^2 + e^{2x}$



Je figure ces courbes ci-contre. La dérivée de y est $y' = 2(x + e^x)$

elle ne s'annule qu'une fois entre -1 et 0, et passe du négatif au positif. Donc y n'a qu'un minimum correspondant à cette racine; comme il est égal à 1 pour $x = 0$ ce minimum est inférieur à 1, donc à 2 et quand x croît ou décroît jusqu'à l'infini il rencontre dans chacune de ces 2 variations la valeur 2 avant d'aller à l'infini.

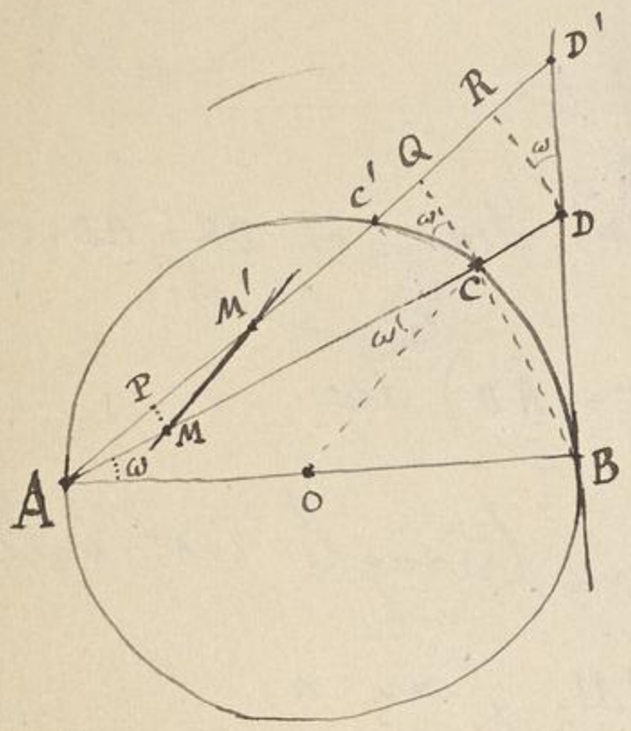
Il y a donc 2 racines séparées par $x = 0$; la courbe y est à l'intérieur des concavités des 2 courbes y_1 & y_2; en particulier à l'intérieur de y_1 donc on aura

Des appréciations supérieures des valeurs absolues des racines en calculant la valeur de x qui rend y, égal à 2 c'est $x = \pm\sqrt{2}$ Donc les 2 racines sont de signe contraire l'une entre $-\sqrt{2}$ et -1 l'autre entre 0 & $\sqrt{2}$. et même entre 0 & 1 car on a : $1+(2,7)^2 > 2$. et $1+\frac{1}{(2,7...)^2} < 2$

Pomey.

Analyse

Construire la tangente en un point d'une cissoïde.



La cissoïde est le lieu du point M obtenu en prenant AM = CD sur la sécante AD ~~du cercle~~ menée par le point A pris sur le cercle de diamètre AB, CD étant la portion de la sécante AD interceptée entre le cercle et la tangente BD en B.

Prenons une sécante infiniment voisine AC'D' et soit AM' = C'D'. Des points M, C, D abaissons les perpendiculaires MP, CQ, DR sur la droite AC'D'; joignons MM' et appelons V l'angle de MM' avec AD. C'est cet angle qui définit la position de la tangente. Enfin désignons par ω l'angle de la sécante AD avec le diamètre AB. — Le triangle rectangle PMM' donne

$$\operatorname{tg} V = \frac{MP}{PM'}.$$

Or on a évidemment $PM' = C'Q + D'R$.

D'ailleurs les deux triangles rectangles $CC'Q$, $DD'R$ ont leurs angles en C et D égaux à ω. Ils sont donc semblables au triangle rectangle ABC, et l'on a $\frac{C'Q}{BC} = \frac{C'Q}{AC}$ et $\frac{D'R}{BC} = \frac{DR}{AC}$.

D'où $C'Q + D'R = \frac{BC}{AC}(CQ + DR)$.

Mais on voit que $CQ = AC \cdot d\omega$ et $DR = AD \cdot d\omega$;

par suite $C'Q + D'R = \frac{BC}{AC}(AC + AD)\, d\omega$.

Mais BC étant la hauteur du triangle rectangle ABD et CD étant égal à AM, on a

$AM \cdot AC = \overline{BC}^2$ ou $\frac{BC}{AC} = \frac{AM}{BC}$.

Par suite $C'Q + D'R = \frac{AM}{BC}(AC + AD)\, d\omega$

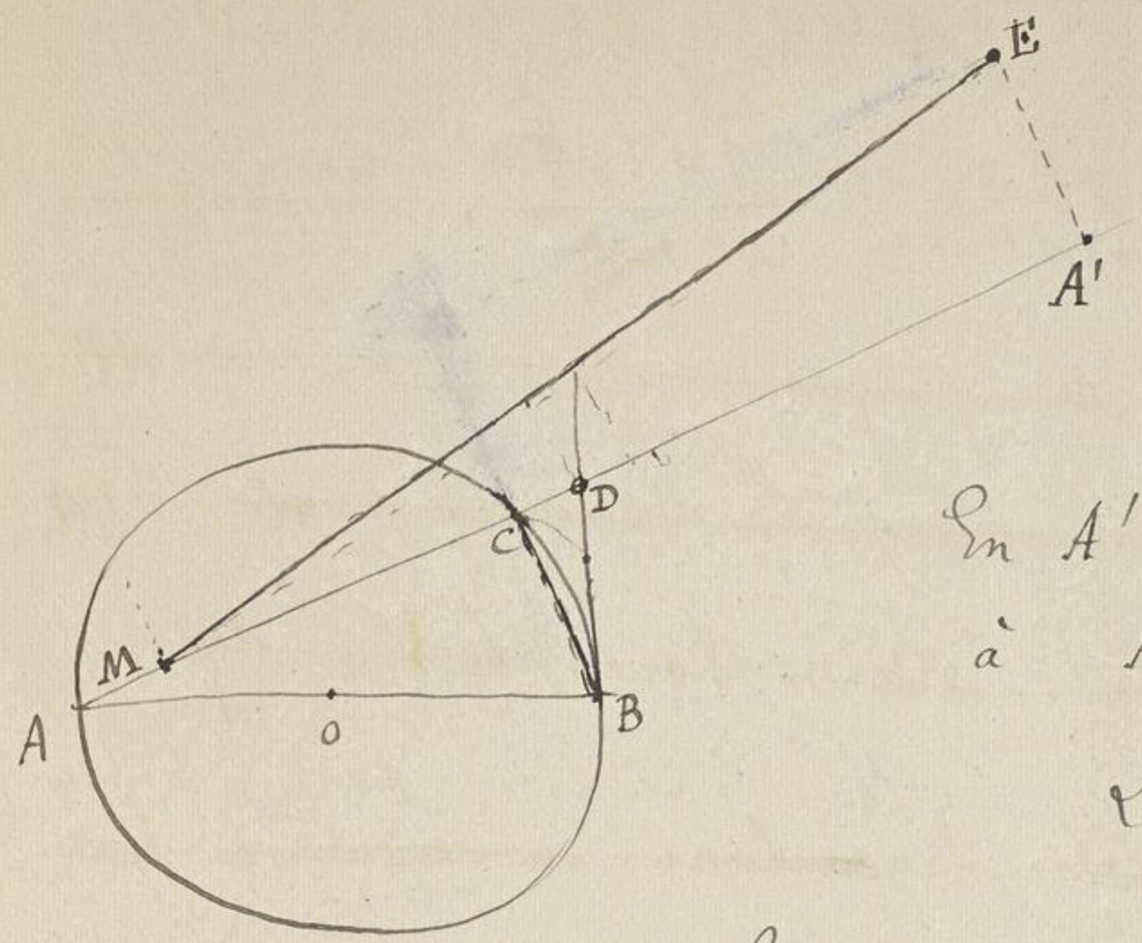
Enfin MP étant égal à $AM \cdot d\omega$, on aura

$$tg\, V = \frac{AM\, d\omega}{\frac{AM}{BC}(AC + AD)\, d\omega} = \frac{BC}{AC + AD}.$$

On voit qu'on peut encore écrire

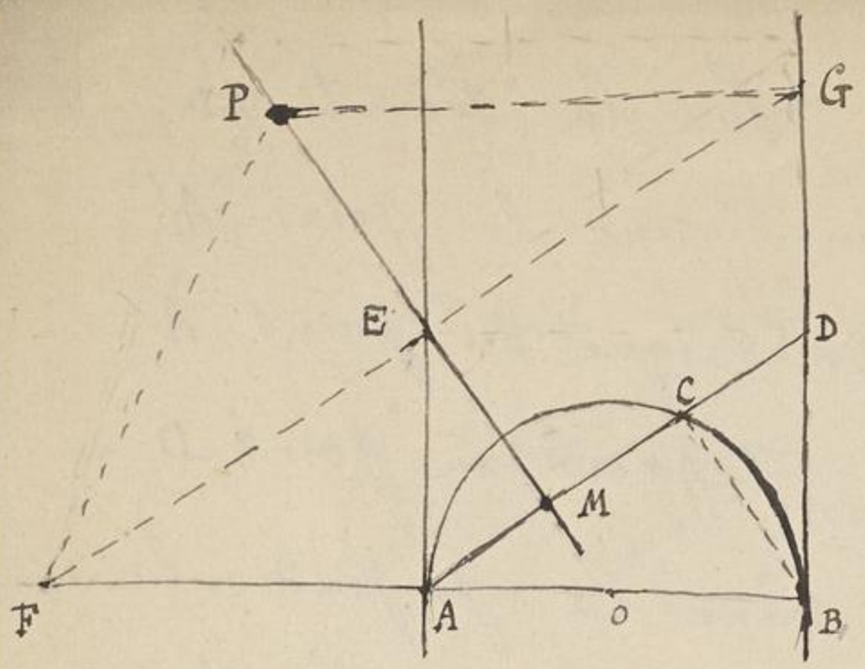
$$tg\, V = \frac{BC}{MD + AD};$$

ce qui conduit à la construction très-simple qui suit :



Sur la sécante AD, on prend le point A' symétrique du point A par rapport au point D. En A', on mène la perpendiculaire à AA' et on y prend $A'E = BC$. La tangente est ME.

La méthode cinématique de Roberval conduit à la même construction. On peut supposer en effet que le point M vient en M' par les deux chemins élémentaires MP, PM', suivant lesquels sa vitesse est $\frac{MP}{dt}$ et $\frac{PM'}{dt}$ ou bien, par les mêmes raisonnements que nous avons faits plus haut, $AM.\frac{dw}{dt}$ et $\frac{AM}{BC}(MD+AD)\frac{dw}{dt}$. On voit donc que les deux vitesses composantes sont respectivement proportionnelles à BC et MD+AD. La vitesse résultante, dont la direction est celle de la tangente, est donc dirigée suivant la diagonale du rectangle construit sur BC et MD + AD.

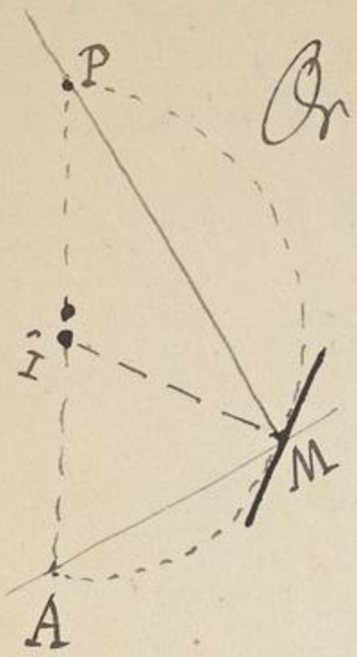


On peut donner une autre construction de la tangente, reposant sur ce fait que la cissoïde M peut être envisagée comme le lieu de la projection du sommet A d'une parabole sur ses tangentes, cette parabole ayant son foyer en un point F tel que $AF = AB$.

Rappelons tout d'abord la démonstration très-simple de ce résultat : Menons la tangente PM en un point P de la parabole, puis abaissons sur elle la perpend. AM, que nous prolongeons jusqu'en D. Il suffit de démontrer que l'on a $AM = CD$.

Or si l'on joint le foyer F au point d'intersection E de la tangente PM avec la tangente au sommet de la parabole, on sait que FE est perpend. sur PM. Dès lors FE est parallèle à AD. Les deux triangles rectangles ABD, FAE sont donc égaux, et l'on a $BD = AE$. Il en résulte que les triangles rectangles BCD, EAME sont égaux, et que par conséquent $AM = CD$.

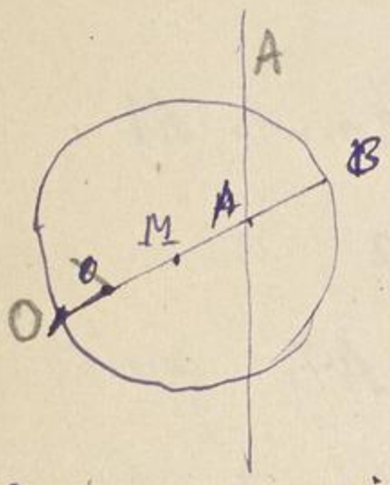
2/



Or on sait (voir Bertrand, Calcul Différentiel) que la tangente au lieu du sommet d'un angle droit dont un côté passe par un point fixe A, et l'autre reste tangent à une courbe (ici la parabole I), ~~s'obtient~~ n'est autre chose que la tangente au cercle décrit sur AP comme diamètre. -

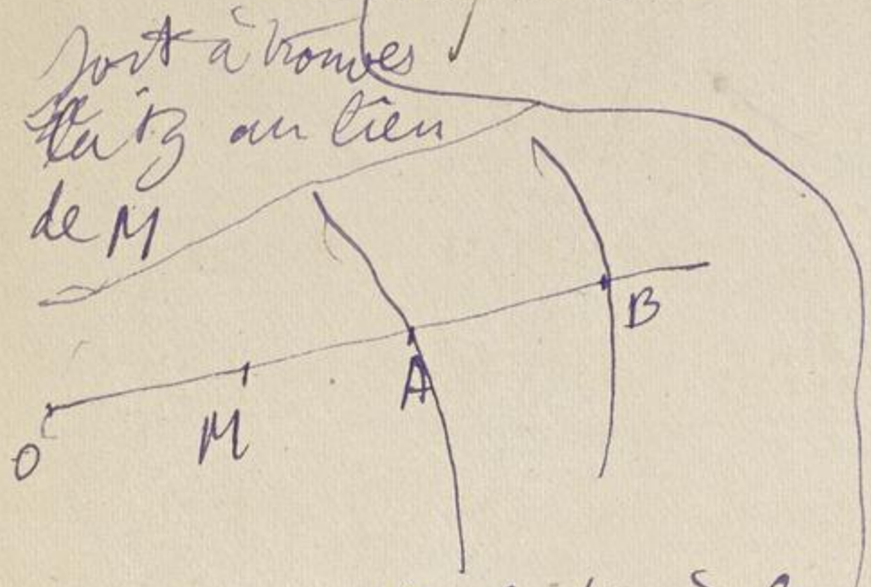
Par suite, étant donné le point M, tout revient à trouver le point de contact P sur la perpendiculaire MP à AM. Or on voit que pour cela il suffit de prolonger FE jusqu'à sa rencontre G avec BD, et de mener GP parallèle à FA jusqu'à sa rencontre avec MP. On voit en effet que FE = EG (puisque FA = AB), et par suite PF = PG. Le point P appartient donc à la parabole.

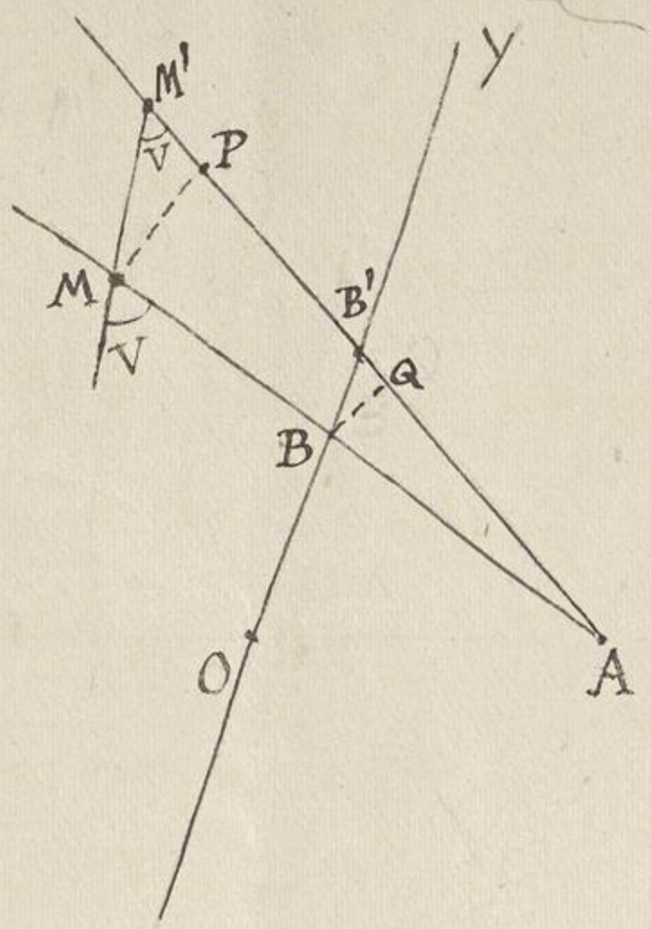
Remarquez que toutes les courbes engendrées de la manière suivante:



On donne un point O une droite A, un cercle B et on prend OM = AB le point O sur le cercle B peuvent être regardées comme des podaires de paraboles et que cette construction s'y applique. Réciproquement comme cas particuliers la strophoïde droite ou oblique et la cissoïde. On peut ramener à cette construction celle de la strophoïde quelconque. Soient en effet: deux courbes A et B un point fixe O, une écante quelconque OAB sur cette

Construire la tangente en un point d'une strophoïde.





La strophoïde est le lieu des points M obtenus en prenant, ~~à partir~~ BM = BO, à partir du point B, sur la sécante AB qui passe par le point fixe A, ~~BO étant la distance du point d'intersection B de la sécante AB avec~~ le point O étant un point fixe pris sur une droite fixe oy.

Menons une sécante infiniment voisine AB' et prenons B'M' = B'O. La position limite de MM' représente la tangente en M.

Soit oAB = ω, B'AB = dω, et menons

décante

oM = AB

Dont à toutes tg au lieu de M

On mène en A la tg. à la courbe A; par le point B, on mène un cercle tg à la courbe B en B et passant par O; et on considère la courbe cissoïdale ~~engendrée par~~ un ~~point~~ définie par le point O, par cette droite et le cercle. Le point lieu des points M luira tg en M.

les perpendiculaires MP et BQ à AB.

En désignant l'angle MM'P par V, on a

$$tg\, V = \frac{MP}{M'P}.$$

Remarquons immédiatement, pour ne pas y revenir, que la méthode de Roberval conduirait à la même relation. On peut en effet décomposer la vitesse suivant MM' en 2 autres l'une suivant MP égale à $\frac{MP}{dt}$ et l'autre suivant AM égale à $\frac{M'P}{dt}$. En sorte que l'on obtiendra la tangente en composant ces deux vitesses ou deux quantités qui leur soient proportionnelles. Or c'est précisément ce que nous ~~alt~~ indique de faire l'équation obtenue par la géométrie.

Evaluons donc MP et M'P. On a

$MP = AM\, dw$, et $M'P$ est évidemment égal à $BB' + B'Q$. Mais le triangle $BB'Q$ donne

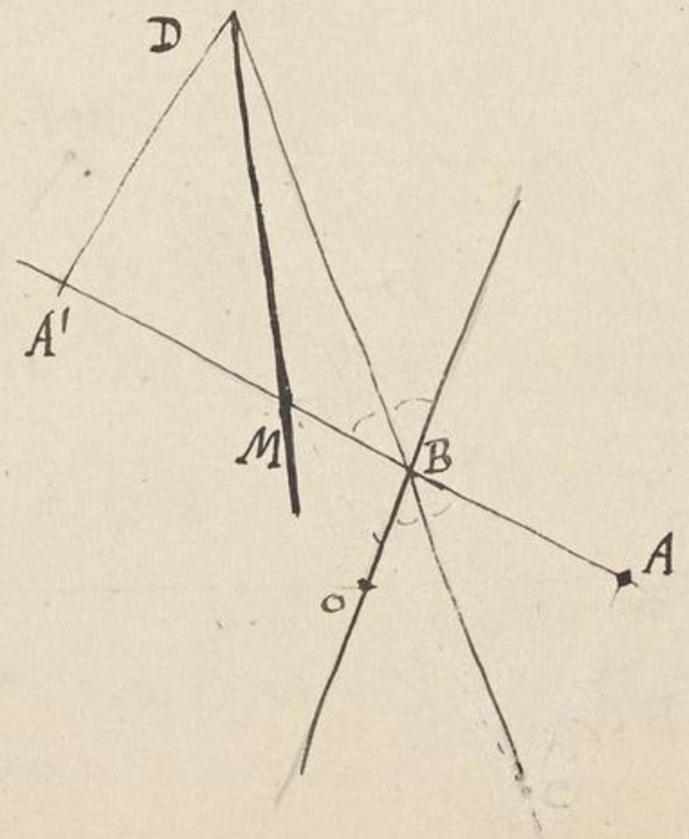
$BB' = \frac{BQ}{\sin B}$, et $B'Q = \frac{BQ}{tg\, B}$, B étant l'angle $\widehat{ABO}$. D'ailleurs on a $BQ = AB\, dw$.

Il en résulte donc $BB' + B'Q = AB \cdot \frac{1+\cos B}{\sin B}$,

d'où $\operatorname{tg} V = \frac{AM \sin B}{AB(1+\cos B)} = \frac{AM \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{AB}$. ~~Il suffit donc de mener AC perpendiculairement à AB jusqu'à sa rencontre avec la bissectrice de $\widehat{OBA}$,~~

~~on a $AB \operatorname{tg}\frac{B}{2} = AC$. On a donc $\operatorname{tg} V = \frac{AM}{AC}$.~~

~~La tangente s'obtiendra donc en menant par le point M une droite faisant avec AM l'angle $\widehat{ACM}$.~~ On voit ~~encore~~ immédiatement que la tangente s'~~obtiendra en effet se fera en~~ ~~l'on peut~~ prenant sur la sécante et au-delà de M la longueur $MA' = BA$, élevant en A' une perpendiculaire à AA' jusqu'à sa rencontre D avec la bissectrice de l'angle ABO et joignant DM. La tangente est DM. On a en effet



$$\operatorname{tg} A'MD = \frac{DA'}{A'M}.$$

Or $DA' = A'B \operatorname{tg}\frac{B}{2} = AM \operatorname{tg}\frac{B}{2}$

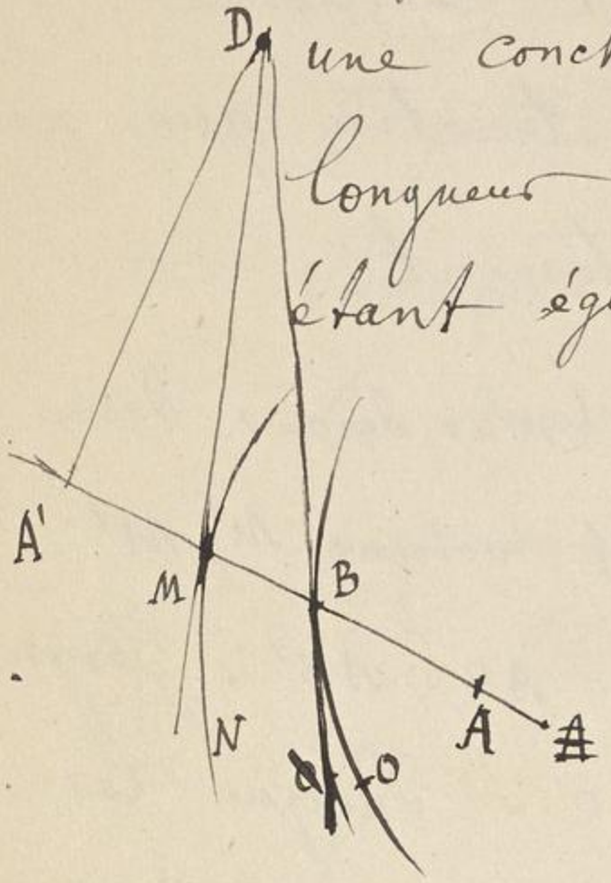
et $A'M = AB = \sout{AC}$.

D'où $\operatorname{tg} A'MD = \frac{AM \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{AB}$

$= \operatorname{tg} V$.

3/

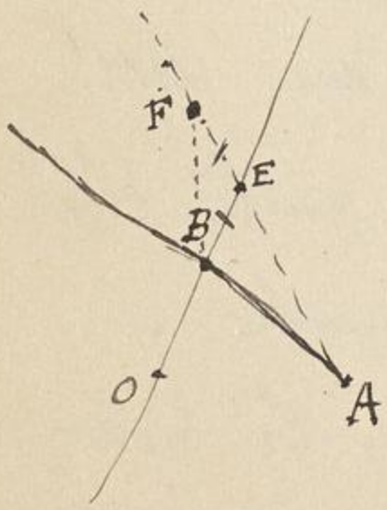
Remarque. Si l'on construit une strophoïde auxiliaire en remplaçant, dans la première construction, le point O par le point B, la strophoïde donnée pourra être considérée comme une conchoïde de la strophoïde auxiliaire : la longueur constante qu'on ajoute ou qu'on retranche étant égale à OB ou BM.



Or la courbe MN étant la conchoïde de la courbe OB, si l'on mène la ~~tangente~~ BD en B, que l'on prenne MA' = AB au-delà de M, qu'on élève en A' la perpendiculaire A'D à AA' jusqu'à sa rencontre D avec BD, la droite MD est la tangente à la conchoïde MN en M.

Bien.

Cela est aisé à démontrer par ~~des~~ un procédé analogue aux procédés employés plus haut.

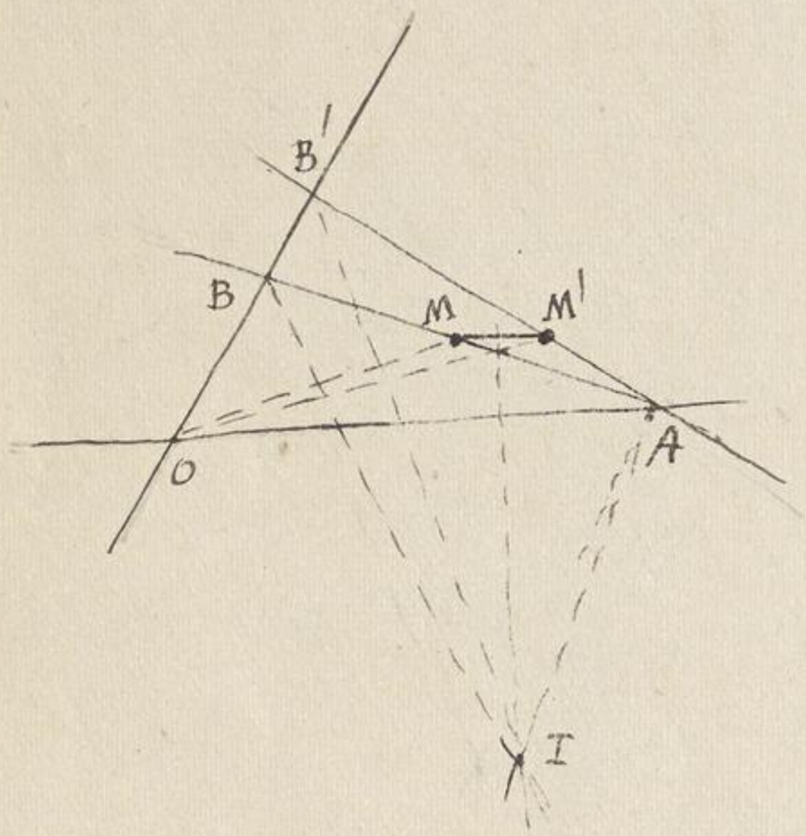


Or il est facile de voir que la tangente en B à la strophoïde auxiliaire est la bissectrice de l'angle ABO. Car F étant un point infiniment voisin du point B sur cette courbe, l'angle $\hat{B}$ du tri. isocèle BEF est la moitié de l'angle extérieur BEA.

or à la limite, FB est dirigé suivant la tangente, et l'angle BEA est égal à OBA. La tangente est donc la bissectrice de OBA.

On voit alors que la construction de la tangente en un point d'une conchoïde conduit exactement à la construction que nous avons donnée plus haut directement. —

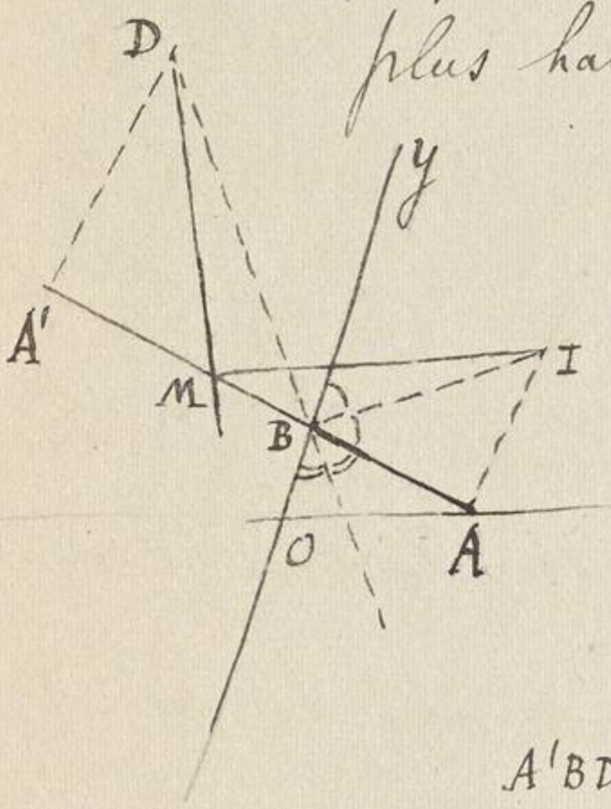
Autre démonstration. Considérons deux points infiniment voisins M, M' sur les sécantes AB, AB'. Joignons les au point O. Puisque les triangles OBM, OB'M' sont isocèles, les bissectrices BI, B'I des angles en B sont perpendic. à OM et OM', en leurs milieux. Et comme dans un triangle OMM', les perpendicul. élevées sur les milieux des côtés se coupent en un même point, la perpendiculaire abaissée du point I sur MM' tombe au milieu de MM'; et par suite elle a pour limite la normale à la courbe. Or en considérant le triangle ABB', la bissectrice



intérieure ~~en~~ B'I et les bissectrices extérieures BI et AI se coupent en I. D'ailleurs IA est, à la limite, perpend. sur AB. ~~On voit~~

On voit donc que pour avoir la <u>normale</u>, il suffit de prendre le point d'intersection I de la bissectrice BI de l'angle ABO et de la perpend. en A à AB, puis de joindre IM.

Remarque. — Il est d'ailleurs facile de ~~vérifier~~ que la direction de la ligne ainsi construite est perpendicul. à la direction de la tangente construite plus haut, ~~et que par suite a été vérifié~~



Prenons en effet le point M au-delà du point B (comme plus haut). Il faudra évidemment alors prendre non pas la bissectrice de OBA, mais de son supplément ABy. Or l'angle A'BD est ~~évidé~~ égal à $\widehat{AIB}$, comme ayant leurs côtés respectivem. perpend. puisque BI et BD sont les bissectrices des deux angles supplémentaires en B. Les tri. rectangles A'BD et ABI sont donc semblables, et on a

$$\frac{AB}{DA'} = \frac{AI}{BA'}$$; mais $AB = MA'$ et $BA' = AM$.

Il en résulte $\frac{MA'}{DA'} = \frac{AI}{AM}$. Dès lors les deux triangles DA'M et MAI qui ont un angle droit compris entre côtés proportionnels sont semblables, et l'angle A'DM est égal à l'angle AMI. Il en résulte que DM et MI sont perpendiculaires.

Autres constructions de la tangente à la strophoïde.

La strophoïde peut être considérée comme le lieu des projections du pied de la directrice d'une parabole sur les tangentes à cette parabole, c'est en un mot la podaire du pied de la directrice. En s'appuyant sur cette propriété, facile à établir (voir Painvin), on peut mener aisément la tangente à la strophoïde par la construction connue de la tangente aux podaires, construction que nous avons rappelée d'après M. Bertrand à propos de la cissoïde.

Enfin on pourrait s'appuyer sur cette propriété de la strophoïde d'être l'enveloppe des cercles passant par le pied de la directrice d'une parabole et ayant leurs centres sur celle-ci. (voir également Painvin pour cette propriété).

4

Les variables t, u, x, y étant liés par les relations $t = \dfrac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}$, $u = \dfrac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}$,

Démontrer l'identité suivante

$$\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\Delta}{(a''x+b''y+c'')^3},$$

en supposant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

Posons, pour abréger, $D = a''x+b''y+c''$,

et désignons suivant l'usage les mineurs de Δ par $A, A', A'', B, B', B'', C, C', C''$.

Calculons $\dfrac{\partial t}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial t}{\partial y}$. On a

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{a(a''x+b''y+c'') - a''(ax+by+c)}{D^2}$$

ou $$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{-C'y+B'}{D^2}$$. On aura de même

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-Cx+A}{D^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Cy-B}{D^2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{C'x-A'}{D^2}$$.

Il en résulte

$$\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{(-C'y+B')(-Cx+A)-(Cy-B)(C'x-A')}{D^4}$$

$$= \frac{(BC'-cB')x+(cA'-AC')y+AB'-BA'}{D^4}$$

Or on voit aisément que ~~BC'~~ l'on a

$$BC'-cB' = a''\left[bB+b'B'+b''B''\right] = a''\Delta$$

$$cA'-AC' = b''\Delta$$

$$AB'-BA' = c''\Delta$$

La fraction précédente devient donc

$$\frac{a''\Delta x + b''\Delta y + c''\Delta z}{D^4} = \frac{(a''x+b''y+c'')\Delta}{D^4}$$

ou enfin $$\frac{\Delta}{D^3} = \frac{\Delta}{(a''x+b''y+c'')^3}$$

Démontrer l'identité

$$\frac{1}{2}\log(1+2x\cos\varphi+x^2) = x\cos\varphi - \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi - \cdots\cdots$$

pour $x<1$ et pour $x=1$.

Faire voir que la série du second membre est absolument convergente pour $x<1$ et

semi-convergente pour $x=1$.

On sait que l'on a le développement

$$(1)\qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots\dots$$

pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à l'unité (Bertrand. Calcul Différ., p. 381).

Posons $z = x(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, on a

$$1+z = 1 + x(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (1+x\cos\varphi) + i\sin\varphi$$

et $$\log(1+z) = \frac{1}{2}\log\left[(1+x\cos\varphi)^2 + x^2\sin^2\varphi\right] + i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sin\varphi}{1+x\cos\varphi}$$

~~En introduisant la même valeur de z dans la série (1) et égalant les parties réelles, on aura~~

~~$\frac{1}{2}\log(1+2x\cos\varphi+x^2) =$~~

Or la formule de Moivre donne

$$z^m = x^m(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = x^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

On voit donc qu'en introduisant la valeur $x(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ de z dans la série (1) et égalant les parties réelles, on aura

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\log(1+2x\cos\varphi+x^2) = x\cos\varphi - \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{x^3}{3}\cos 3\varphi - \dots\dots$$

Et comme, d'après $z = x(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, le module de z est x, ~~l'identité~~ la série égalité (2) aura lieu pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité.

Je dis que l'égalité (2) a lieu également pour $x = 1$. En effet, Abel a démontré que, si une ~~série~~ ordonnée suivant les puissances entières positives d'une variable x est convergente, lorsqu'on attribue à cette ~~variable~~ variable la valeur x_1, la même série est aussi convergente pour tout nombre x dont la valeur numérique est inférieure à celle de x_1; en outre, si s représente la somme de la série relative à la valeur x et s_1 la somme relative à la valeur x_1, s tend vers s_1 lorsque x tend vers x_1. La formule (2) subsiste donc pour $x = 1$; pourvu que la série du second membre reste convergente. Or on sait (Bertrand, pages 252 et 253) que, si les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ vont en diminuant et tendent vers zéro, la série $a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + \ldots$ est convergente pour toute valeur de l'angle φ,

Il faut remarquer que pour que cela soit vrai x doit tendre vers x_1 par valeurs réelles ou en général suivant le rayon du cercle de conv. Si x tendait vers x_1 suivant une autre courbe, la limite de s pourrait être différente de s_1. Je vous en donne plus loin un exemple.

5/ sauf la valeur $\varphi = 0$ pour laquelle il y a doute.

Si au lieu de $\varphi = 0$, vous auriez fait $\varphi = \pi$, vous auriez trouvé pour la série

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots\cdots$$

qui est évid. diverg. Vous pouviez d'ailleurs le prévoir car pour $\varphi = \pi$ $x = 1$ vous avez

$$1 + 2x\cos\varphi + x^2 = 0$$

d'où

$$L(1 + 2x\cos\varphi + x^2) = \infty$$

En effet le théorème de Bertrand dont vous vous servez suppose $a_0, a_1, a_2 \cdots$ positifs et il faudrait le modifier un peu pour le rendre applicable au cas où ces coëfficients ne sont pas positifs. C'est ce qui vous explique pourquoi votre théorie est en défaut pour $\varphi = \pi$.

La série du second membre ~~est~~ de (2) est donc convergente pour toute valeur de φ différente de zéro. Mais, même pour $\varphi = 0$, elle est convergente, puisqu'elle se réduit à

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

série dont les termes alternativement positifs et négatifs vont en décroissant constamment et indéfiniment.

En résumé, l'égalité (2) a lieu pour $x < 1$ et aussi pour $x = 1$.

On peut démontrer que la même série (2) est absolument convergente pour $x < 1$ et semi-converg pour $x = 1$. En effet, considérons la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots,$$

qui est absolument convergente, ~~la limi~~ pour $x < 1$, la limite du rapport d'un terme au précédent étant x, quantité moindre que 1 en valeur absolue. Dès lors en multipliant les différents

termes par $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, ---, ~~qui soit dont~~ la valeur absolue est inférieure à l'unité, on obtient une série absolument convergente, puisque la série des modules est convergente.

Pour $x = 1$, elle est semi-convergente; car la série ~~des modules est divergente~~

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{---}$$

est la série harmonique qui est divergente.

Il n'est pas évident qu'en multipliant les termes d'une série diverg. par des nombres moindres que 1. on obtient une série également div. C'est quand vous multipliez par des nombres > 1 qu'il en est ainsi. Ici remarquez seulement que les modules de $\cos n\varphi$ par lesquels vous multipliez ne tendent pas vers 0 quand n tend vers l'∞.

Dès lors en multipliant ses termes par les modules de $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, ... qui sont moindres que 1, on a une série également divergente. Or cette série est la somme des modules des termes de la série (2). Cette série (2) est donc semi-convergente ✻, et, d'après un théorème connu, en changeant l'ordre de ses termes, on en change la somme.

✻ puisque cette série (2) est convergente pour $x = 1$, sans que la série des modules le soit.

$\frac{t}{v}$ & $\frac{u}{v}$; quand on a :

Soit à trouver le déterminant fonctionnel de

$$t = ax + by + c$$
$$u = a'x + b'y + c'$$
$$v = a''x + b''y + c''$$

Ce Déterminant $\frac{1}{v^4}\begin{vmatrix} t'_x v - v'_x t & t'_y v - v'_y t \\ u'_x v - v'_x u & u'_y v - u v'_y \end{vmatrix}$

ou $\frac{1}{v^3}\begin{vmatrix} t'_x & t'_y & t \\ u'_x & u'_y & u \\ v'_x & v'_y & v \end{vmatrix} = \frac{1}{v^3}\begin{vmatrix} t'_x & t'_y & t'_z \\ u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix} = \frac{1}{v^3}\Delta$, car

ici t'_z u'_z v'_z représentent les dérivées de t u v ex z, z étant une ~~quatrième~~ variable auxiliaire indépendante servant à rendre t, u, v homogènes et qu'on fait égale à 1 dans le résultat final. On a pu alors se servir des équations

$$t = t'_x x + t'_y y + t'_z z$$
$$u = u'_x x + \text{———}$$
$$v = v'_x x + \text{———}$$

et ces coefficients t'_x t'_y etc ne sont autres que a b c etc.

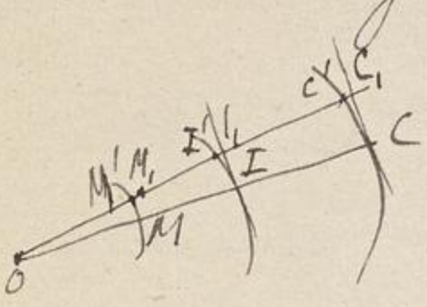
J. B. Dorey

6/

J-B. Pomey.

Tangente à la Cissoïde

Pour trouver la tangente en un point d'un lieu, on peut se proposer de trouver la tangente au même point d'un autre lieu qui lui y serait tangent. En particulier, supposons un lieu (M)



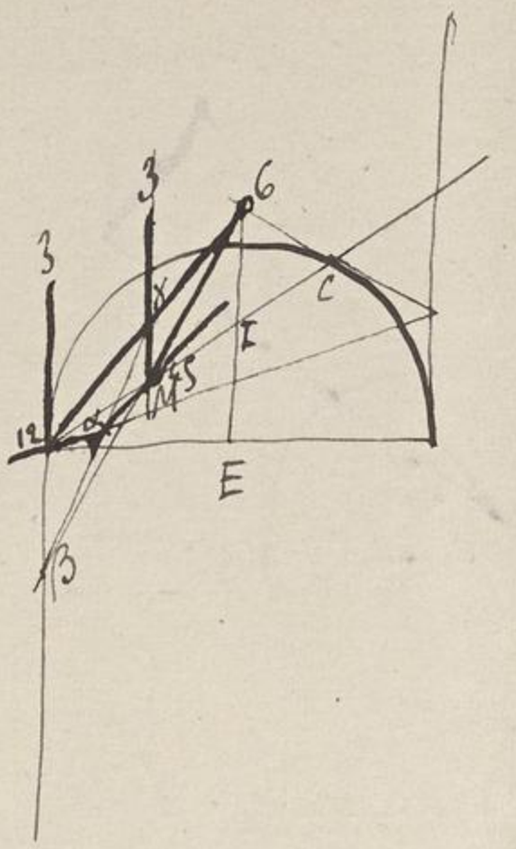
défini comme le lieu des points, placés, sur des droites concourantes en O, symétriquement des points d'intersection avec une courbe C par rapport aux points de rencontre Des avec une courbe I Du même rayon vecteur OMIC. Ce lieu est tangent au lieu des points placés sur les rayons vecteurs symétriquement des points d'intersection avec la tangente en C par rapport aux points de rencontre avec la tangente en I. On a IM=IC I'M'=I'C' etc. Donc d.OM+dOC=2d.OI, quand on passe à un rayon vecteur infiniment voisin, en substituant à CC' sa tangente CC1 et à II' sa tangente II1 on obtient un lieu M1M1 et on a des variations des rayons vecteurs quand on passe de la position OMIC à la position OM'1I'1C' que j'apellerai d1 OM d1 OC & d1 OI.

Par les changements de CC' en CC_1 de II' en II_1, $d.OI$ & $d.OC$ ne sont altérés que d'infiniments petits du 2e ordre II' étant du 1er

Or on a : $d_1 OC + d_1 OI = 2 d_1 . OI$ Donc $d.OM$ n'est altéré que d'un infiniment petit de sa valeur pour devenir $d_1 OM$ et MM' est du second ordre. Or le lieu des points M' est du 2e degré puisque à un point C sur CC_1 correspond un seul point M et que le point O n'est obtenu qu'une fois par le point K d'intersection de la droite CG avec la droite menée parallèlement à II_1 à une distance double de O. Cette hyperbole passe par le point de rencontre de CC_1 et II_1 et sa tangente en O passe par K. Elle a pour direction asymptotique II_1 cela suffit pour la déterminer et pour déterminer sa tangente en M.

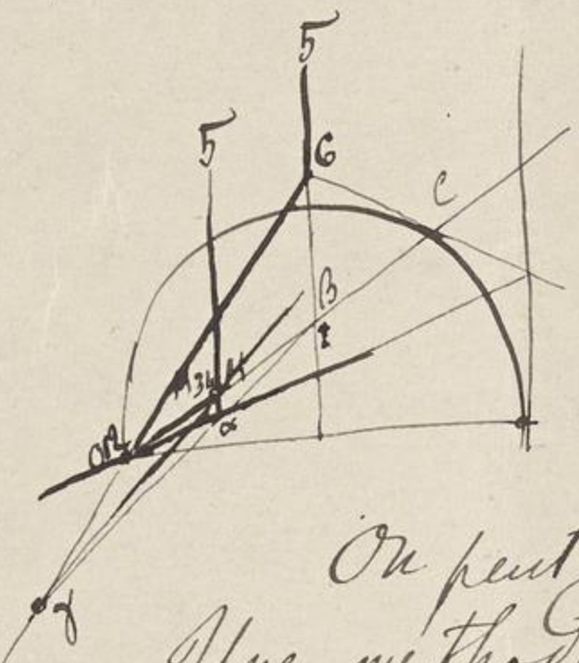
Appliquons à la cissoïde ces constructions suivantes : J'emploie

le théorème de Pascal et je marque en gros l'hexagone qui me sert.



α, β, γ est la droite de rencontre des côtés opposés, α β γ sont les points de rencontre

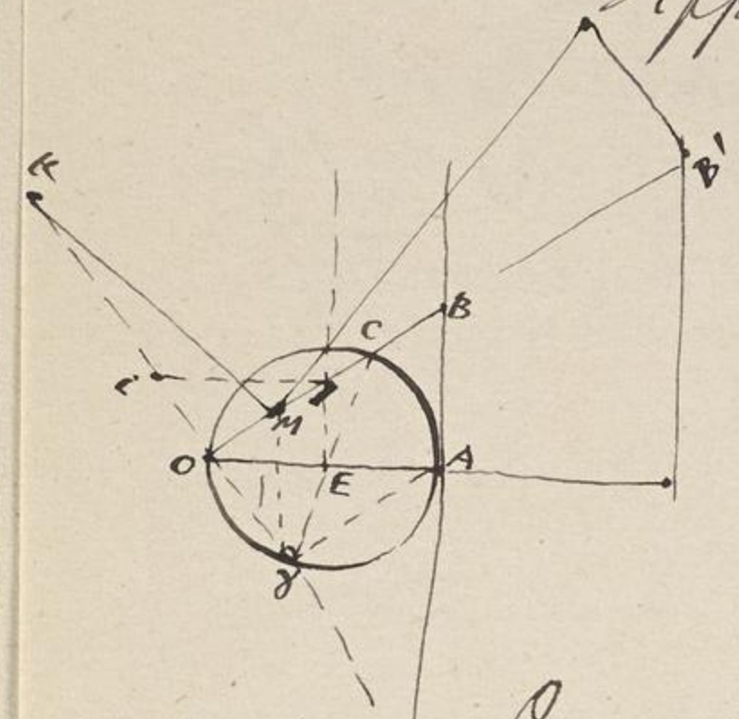
Rien.

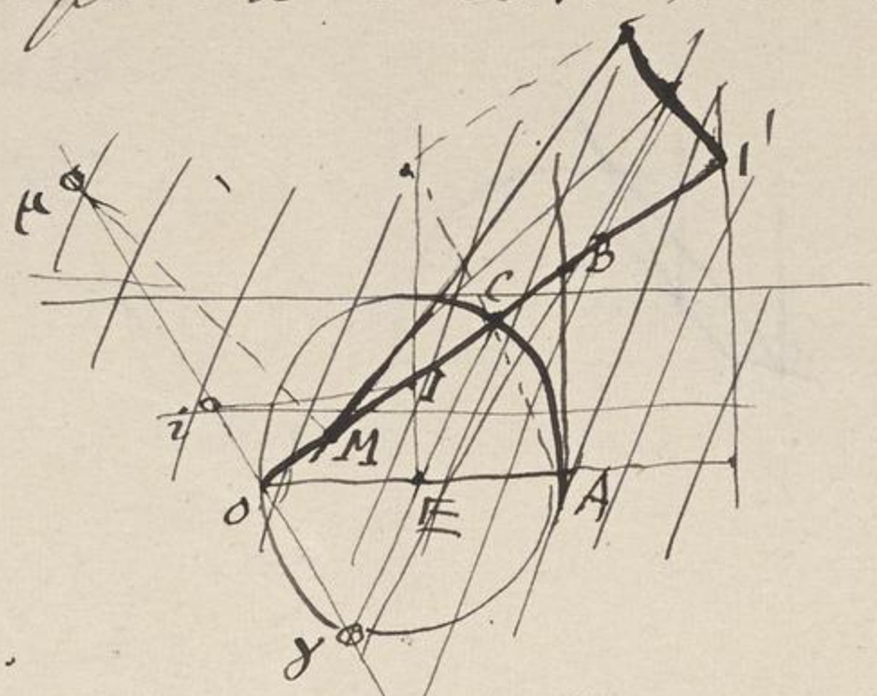


On peut aussi appliquer ici une méthode possédant aussi une assez grande généralité; c'est celle que a donnée Mr Mannheim à propos de la trajectoire d'un point qui se déplace sur une tangente à une courbe fixe en partageant dans un rapport constant la partie de cette tangente comprise entre 2 courbes fixes. Si M est le point décrivant, la courbe fixe est l'origine O, la tangente à cette courbe fixe sera donc le rayon vecteur et la partie

De tangente comprise entre deux courbes fixes est IC.

Appliquons à la cissoïde :





On a : $\frac{CI}{IM} = 1$ rapport constant, EI parallèle à la tangente en A menée par le centre E est une droite fixe, ainsi que le cercle ACO.

Je prends la normale en C qui est le rayon CE, la normale en I qui est la parallèle Ii à OA, et leurs intersections avec la normale à OMIC étant γ fixe je prends μi = iγ dans le sens qui donne à γiμ les mêmes positions relatives que celles de CIM & μM est la normale. Or considérons que l'angle de la tangente avec OI est le même que l'angle MμO de la normale avec μO. Evaluons sa tangente. On a : $\frac{OM}{O\mu} = \frac{OM}{2O\gamma + 2Oi} = \frac{2OM = CB}{2CA + 2Oi}$ et en remplaçant par des lignes proportionnelles on a :

$\frac{OM}{O\mu} = \frac{CA}{2OC + 2OI} = \frac{CA}{2(MB + 2IB)} = \frac{CA}{2MB + 4IB} = \frac{CA}{MB + 2IB} = \frac{CA}{MB'}$ D'où la construct.

1

Les annotations de tous ces devoirs sont de la main de H. Poincaré.

Poney.

Questions d'analyse.

1° Dérivée de $y = \text{arc tg}\left[x + \sqrt{1-x^2}\right]$.

$$y' = \frac{1}{1+\left[x+\sqrt{1-x^2}\right]^2}\left[1 + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\left[2 + 2x\sqrt{1-x^2}\right]\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{2\sqrt{1-x^2} + 2x(1-x^2)} = \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{1-x^2} - x\right)\left(\sqrt{1-x^2} - x(1-x^2)\right)}{\left[1 - x^2 - x^2(1-x^2)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)(1+x^2) - x\sqrt{1-x^2}\,(2-x^2)}{(1 - 2x^2 + 2x^4 - x^6)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^4 - x(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2+2x^4-x^6}.$$

2° Calculer $\dfrac{d^2z}{dx\,dy}$, sachant qu'on a $z = \sqrt{ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4}$. Etudier les particularités qui se présentent quand on fait $x = y = 0$.

Posons $u = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$.

Alors on a $z = \sqrt{u}$. Il en résulte

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$ et en dérivant cette expression par rapport à y :

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{2u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}}{4u^{\frac{3}{2}}}.$$

2/

Or on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4ax^3 + 12bx^2y + 12cxy^2 + 4dy^3$$

ou $$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\left[ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 \right]$$

et $$\frac{\partial u}{\partial y} = 4\left[bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^3 \right].$$

D'où $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 12\left(bx^2 + 2cxy + dy^2 \right)$$

En substituant ces valeurs dans la formule qui donne l'expression de $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, il vient, après réductions,

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{2abx^6 + 12b^2x^5y + 6(6bc-ad)x^4y^2 + 4(2bd+9c^2-ae)x^3y^3 + 6(6cd-be)x^2y^4 + 12d^2xy^5 + 2dey^6}{\left(ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il est intéressant d'étudier les particularités qui se présentent quand on fait $x = y = 0$. Supposons d'abord qu'on donne aux variables x et y des valeurs déterminées voisines de zéro. ~~, alors pour ces valeurs~~ ~~$\frac{d^2z}{dx\,dy}$ = est une fonction déterminée~~. Dans ce cas l'ordre des dérivations est indifférent, attendu que $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ sont alors des fonctions continues, et l'on obtient la forme algébrique

de la fonction $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ en calculant cette fonction
Comme nous l'avons fait, c.à.d. en prenant la
dérivée de z par rapport à x, puis en
dérivant $\frac{dz}{dx}$ par rapport à y. Cela posé, on
peut se proposer de rechercher ce que devient
$\frac{d^2z}{dx\,dy}$ quand x et y tendent vers zéro suivant une
loi déterminée. La valeur finale de cette fonction ne
dépend que de la limite du rapport $\frac{y}{x}$ pour
$x=y=0$; ~~si~~ l'on voit que $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ cette valeur est
infiniment grande, lorsque la limite de $\frac{y}{x}$ est
égale à une racine du dénominateur ; qu'elle est
nulle lorsque $\frac{y}{x}$ a pour limite une racine du
numérateur ; enfin qu'elle est finie et différente
de zéro pour toute autre valeur de limite de $\frac{y}{x}$.
En particulier, si $\lim \frac{y}{x} = 0$, on voit, d'après
l'expression même de $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, que sa valeur est
$\frac{2b}{\sqrt{a}}$; et si $\lim \frac{y}{x} = \infty$, on a la valeur $\frac{2d}{\sqrt{e}}$.
La 1ère de ces valeurs est celle qu'on obtiendrait
en calculant d'abord $\frac{dz}{dy}$, puis prenant la

dérivée de $\frac{dz}{dy}$ par rapport à x, en considérant y comme constant ; car y étant supposé constant dans $\frac{dz}{dx}$, il est permis d'y attribuer à y sa valeur finale zéro, et comme on laisse x variable, cela revient bien en définitive à supposer $\lim \frac{y}{x} = 0$. Or on a

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=0} = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = \frac{4bx^3}{2x^2\sqrt{a}} = \frac{2bx}{\sqrt{a}}.$$ Il reste alors à différentier en x, ce qui donne $\frac{2b}{\sqrt{a}}$.

De même, la seconde valeur $\frac{2d}{\sqrt{e}}$ est celle qu'on obtiendrait en considérant $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ comme la dérivée de $\frac{dz}{dx}$ par rapport à y.

On voit donc clairement par cet exemple que lorsque $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ est indéterminée, et par suite lorsque $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ ne sont pas continues, que l'ordre des dérivations influe sur la valeur de $\frac{d^2z}{dx\,dy}$.

3° Question. — Soient $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ trois polynomes homogènes du même degré m en x,y,z , et soit une fonction $\theta(x)$ définie par les équations

$$\theta = \frac{\varphi(x,y,1)}{\psi(x,y,1)} \quad , \quad f(x,y,1) = 0 \ .$$

Démontrer que pour trouver la dérivée θ'_x , il suffit de diviser par $-m\psi^2 \dfrac{df}{dy}$ le déterminant fonctionnel de f, φ, ψ par rapport à x, y, z et de faire ensuite $z=1$.

On a $$\frac{d\theta^*}{dx^*} = \frac{\frac{d\varphi^*}{dx}(x,y,1)\,\psi(x,y,1) - \varphi(x,y,1)\frac{d\psi^*}{dx}(x,y,1)}{\psi^2(x,y,1)}$$

Or on a d'autre part

$$(1) \qquad \frac{d\varphi^*}{dx}(x,y,1) = \frac{\partial\varphi(x,y,1)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,y,1)}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}$$

$$(2) \qquad \frac{d\psi}{dx}(x,y,1) = \frac{\partial\psi(x,y,1)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x,y,1)}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial f(x,y,1)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,1)}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0 \ .$$

Eliminons $\dfrac{d\varphi(x,y,1)}{dx}$, $\dfrac{d\psi(x,y,1)}{dx}$ et $\dfrac{dy}{dx}$ entre ces quatre équations, il vient,

$$(4) \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{\psi(x,y,1)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right] - \varphi(x,y,1)\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right]}{\psi^2\,\frac{\partial f(x,y,1)}{\partial y}}$$

les dérivées partielles étant, bien entendu, celles des

~~ou~~ ~~$\frac{d\theta}{dx} = \frac{m\psi[\quad]}{\quad\quad\quad\quad\quad\quad - m}$~~

$\frac{d\theta}{dx}$ = fonctions $f(x,y,1)$, $\varphi(x,y,1)$, $\psi(x,y,1)$;

ou, en appelant N le numérateur de cette expression,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{Nm}{m\psi^2 \frac{df}{dy}} .$$

Mais les fonctions $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ étant homogènes, on a, comme on sait,

$$x \frac{df(x,y,z)}{dx} + y \frac{df(x,y,z)}{dy} + z \frac{df(x,y,z)}{dz} = m f(x,y,z)$$

$$x \frac{d\varphi(x,y,z)}{dx} + \text{———————} = m \varphi(x,y,z)$$

$$x \frac{d\psi(x,y,z)}{dx} + \text{———————} = m \psi(x,y,z)$$

Faisons dans ces trois équations $z=1$, elles deviennent, d'après la notation abrégée adoptée dans (4),

$$x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + \left(\frac{df}{dz}\right)_{z=1} = m f \quad [\text{d'après } f(x,y,1)=0]$$

$$x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=1} = m \varphi(x,y,1)$$

$$x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=1} = m \psi(x,y,1)$$

Eliminant x et y entre ces trois équations, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=1} - m\varphi(x,y,1) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{z=1} - m\psi(x,y,1) \end{vmatrix} = 0 ,$$

ou, en appelant Δ le déterminant fonctionnel,

$$\Delta_{z=1} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & -m\varphi(x,y,1) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & -m\psi(x,y,1) \end{vmatrix} = 0$$

Or le déterminant qui constitue le second terme de cette équation n'est autre que la quantité désignée plus haut par Nm. On a donc

$$\Delta_{z=1} + Nm = 0 ,$$ et par suite

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\Delta_{z=1}}{-m\psi^2 \frac{\partial f}{\partial y}} .$$

8/

4°. Démontrer que $\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{(1+x^2)^p}\right]$ est de la forme

$\frac{P_n}{(1+x^2)^{n+p}}$, P_n étant un polynome de degré n.

Faire voir que $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles quand p est positif.

On a $\frac{d(1+x^2)^{-p}}{dx} = -\frac{2px}{(1+x^2)^{p+1}} = \frac{P_1}{(1+x^2)^{p+1}}$

P_1 étant un polynome du 1er degré, dont la racine est par conséquent réelle. Il suffit donc de démontrer que si l'on a $\frac{d^n(1+x^2)^{-p}}{dx^n} = \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+p}}$,

où P_n est un polynôme de degré n ayant toutes ses racines réelles, la dérivée d'ordre $n+1$ est de la forme $\frac{P_{n+1}}{(1+x^2)^{n+p+1}}$, où P_{n+1} est un polynome de degré $n+1$ ayant ses racines réelles.

Or, de $\frac{d^n(1+x^2)^{-p}}{dx^n} = \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+p}}$,

on tire $\frac{d^{n+1}(1+x^2)^{-p}}{dx^{n+1}} = \frac{dP_n}{dx}(1+x^2)^{-(n+p)} - 2x(n+p)P_n(1+x^2)^{-(n+p+1)}$

$= \frac{\frac{dP_n}{dx}(1+x^2) - 2(n+p)\,x\,P_n}{(1+x^2)^{n+p+1}} = \frac{P_{n+1}}{(1+x^2)^{n+p+1}}$.

Soient $a, b, c, \ldots l$ les racines, supposées réelles, de P_n. On a alors

$$P_n = M(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)$$

$$\frac{dP_n}{dx_n} = M\Big[(x-b)(x-c)\ldots(x-l)+(x-a)(x-c)\ldots(x-l)+\ldots+(x-a)(x-b)\ldots(x-k)\Big]$$

Il en résulte

$$P_{n+1} = M\Big[(1+x^2)\big[(x-b)(x-c)\ldots(x-l)+(x-a)(x-c)\ldots(x-l)+\ldots+(x-a)(x-b)\ldots(x-k)\big]-2(n+p)x(x-a)(x-b)\ldots(x-l)\Big]$$

On voit que le terme de degré le plus élevé est $Mnx^{n+1} - 2M(n+p)x^{n+1} = -M.(n+2p)x^{n+1}$, et que ~~cela posé~~ son coefficient ne peut être nul, puisque p est positif. P_{n+1} est donc de degré $n+1$.

Cela posé, substituons dans P_{n+1} les valeurs

$$-\infty \qquad a \qquad b \qquad c \qquad \ldots \qquad l \qquad +\infty$$

et supposons d'abord n impair ; il est évident que le polynome P_{n+1} prendra les signes

$$- \qquad + \qquad - \qquad + \qquad \ldots \qquad + \qquad -\,.$$

Si au contraire n est pair, les signes seront

$$+ \qquad - \qquad + \qquad - \qquad \ldots \qquad + \qquad -\,.$$

Dans l'un comme dans l'autre cas, le polynome a donc $n-1$ rac. réelles dans les intervalles des racines

de P_n, puis 2 réelles entre $-\infty$ et a et l'autre entre $+\infty$; ~~ce qui~~ c'est-à-dire que les $n+1$ racines sont réelles.

5°. Développer par la formule de Mac Laurin la fonction e^{e^x} suivant les puissances croissantes de x. Calculer les coefficients de x, x^2, x^3, x^4. Déduire de là la valeur des séries $\sum \frac{m^2}{1.2...m}$, $\sum \frac{m^3}{1.2.3....m}$, $\sum \frac{m^4}{1.2.3....m}$.

Posons $e^x = u$. Alors on a $e^{e^x} = e^u$, et la fonction e^u se développe suivant les puissances croissantes de u par la formule de Mac Laurin:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \dots\dots$$

Or, u étant égal à e^x, on a.

$$u = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots\dots$$

$$u^2 = e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1} + \frac{2^2x^2}{1.2} + \frac{2^3x^3}{1.2.3} + \frac{2^4x^4}{1.2.3.4} + \dots\dots$$

$$u^3 = e^{3x} = 1 + \frac{3x}{1} + \frac{3^2x^2}{1.2} + \frac{3^3x^3}{1.2.3} + \frac{3^4x^4}{1.2.3.4} + \dots\dots$$

$$u^4 = e^{4x} = 1 + \frac{4x}{1} + \frac{4^2x^2}{1.2} + \frac{4^3x^3}{1.2.3} + \frac{4^4x^4}{1.2.3.4} + \dots\dots$$

. . . . . .

Ainsi, la série e^u est une série à termes positifs, dans laquelle chaque terme se développe en une série convergente à termes positifs. D'après un théorème connu de Cauchy relatif aux séries à double entrée, les séries $\sum \frac{1}{1.2\ldots m}$ / $\frac{x}{1}\sum \frac{m}{1.2\ldots m}$ / $\frac{x^2}{1.2}\sum \frac{m^2}{1.2\ldots m}$ et / $\frac{x^3}{1.2.3}\sum \frac{m^3}{1.2\ldots m}$ / $\frac{x^4}{1.2.3.4}\sum \frac{m^4}{1.2\ldots m}$, etc, formées en substituant dans la série e^u, les séries $u, u^2, u^3, \ldots$, et réunissant les termes de même degré en x, sont convergentes; et leurs sommes respectives forment une série convergente ayant la même somme que la série première e^u. On a ainsi:

$$e^{e^x} = \sum \frac{1}{1.2\ldots m} + \frac{x}{1}\sum \frac{m}{1.2\ldots m} + \frac{x^2}{1.2}\sum \frac{m^2}{1.2\ldots m} + \frac{x^3}{1.2.3}\sum \frac{m^3}{1.2\ldots m} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\sum \frac{m^4}{1.2.3\ldots m} + \ldots$$

Or il est facile de calculer les différents coefficients $\sum$ des termes en x. On voit d'abord immédiatement que $\sum \frac{1}{1.2\ldots m} = e$, puis $\sum \frac{m}{1.2\ldots m} = \sum \frac{1}{1.2\ldots(m-1)}$ $= \sum \left(\frac{1}{1.2\ldots m}\right) = e$. Pour avoir les autres, il suffit de remarquer que, d'après la formule de Mac-Laurin, ce sont les dérivées successives de e^{e^x} (à partir de la seconde inclusivement)

pour $x = 0$. Pour effectuer ce calcul, revenons à la notation $e^x = u$ et posons $y = e^u$. On a

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^u \cdot e^{2x} + e^u \cdot e^x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^u \cdot e^{3x} + 3e^u e^{2x} + e^u \cdot e^x$$

$$\frac{d^4y}{dx^3} = e^u \cdot e^{4x} + 6e^u e^{3x} + 7e^u e^{2x} + e^u e^x$$

etc. ; ces dérivées deviennent, pour $x = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = e \quad \left(\text{comme on l'a déjà vu}\right), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2e, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 5e, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 15e, \text{ etc}$$

Il en résulte $\Sigma \frac{m^2}{1.2 \ldots m} = 2e$,

$$\Sigma \frac{m^3}{1.2 \ldots m} = 5e,$$

$$\Sigma \frac{m^4}{1.2 \ldots m} = 15e, \text{ etc.}$$

On pourrait d'ailleurs obtenir facilement l'expression générale de $\frac{d^n y}{dx^n}$ c.à.d. de $\Sigma \frac{m^n}{1.2 \ldots m}$, en employant le procédé qu'indique M. Tisserand dans le Problème N° 18 de ses Exercices sur le Calcul Infinitésimal. [Voir encore Bertrand, Calcul Différentiel, § 140, page 138].

Dans la démonstration qui précède, pour obtenir les valeurs des coefficients du développement

$$e^{e^x} = \sum \frac{1}{1.2..m} + \frac{x}{1} \sum \frac{m}{1.2...m} + \frac{x^2}{1.2} \sum \frac{m^2}{1.2...m} + \frac{x^3}{1.2.3} \sum \frac{m^3}{1.2...m} + \dots\dots,$$

on a dû admis que les termes de ce développement sont identiques à ceux que fournirait la série de Maclaurin. Il est aisé de voir en effet que le seul développement possible d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances de la variable est celui qui résulte du théorème de Maclaurin. Soit par exemple

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots$$

un développement qui, comme on sait, est convergent pour les valeurs de x inférieures à une certaine limite, (~~e^{e^x} est conv~~ le développement de e^{e^x} en particulier est convergent pour toutes les valeurs de x), et dont on obtient les dérivées successives en prenant celles de ses différents termes. Formons d'après cela $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ... $\varphi^{(n)}(x)$, et supposons ensuite $x = 0$, nous aurons évidemment

$A_0 = \varphi(0)$, $A_1 = \varphi'(0)$, $2A_2 = \varphi''(0)$, ..., $1.2...n\, A_n = \varphi^{(n)}(0)$,

et les coefficients sont par suite ceux de la série de Maclaurin.

Bien

En résumé, le procédé que nous avons employé pour développer e^x, procédé qui repose sur la théorie des séries à double entrée, dispense de ~~étudier~~ démontrer que le reste tend vers zéro. Or c'est pourtant ce qu'il faudrait faire en toute rigueur (et ce serait sans doute difficile), si l'on voulait développer directement e^x par la formule de Maclaurin. Inutile d'ajouter que la marche suivie plus haut prouve indirectement que le reste tend vers zéro.

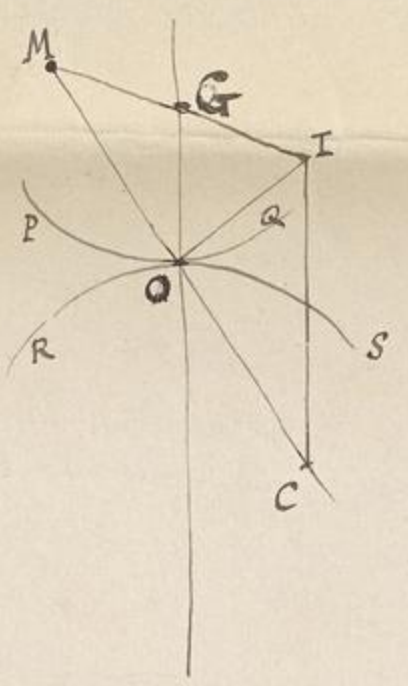
9

Pomey.

Exercices d'Analyse.

Construire le rayon de courbure de la courbe engendrée par le mouvement d'un point appartenant à une figure invariable. Application à la conchoïde, au limaçon de Pascal, à l'ellipse, à une podaire.

On démontre, en Cinématique, que tout mouvement continu d'une figure plane dans son plan est un mouvement épicycloïdal. Le centre de courbure de la roulette décrite par un point de la figure mobile s'obtient par la construction de Savary : soit M le point invariablement lié à la courbe mobile PQ, qui roule sans glisser sur la courbe fixe RS.



On joint MO, qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre I avec la perpendiculaire AI menée en A à MA,

Soient R et R' les rayons de courbure de PQ et de RS en O. On prend sur la normale commune en O la longueur

Bien.

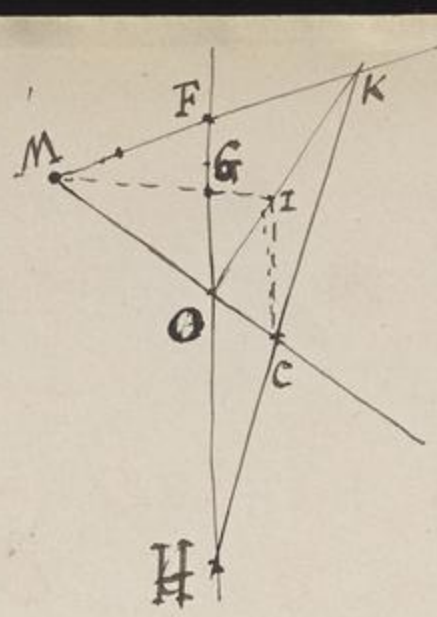
$$OG = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}$$

. On joint MG, qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre en I avec la perpendiculaire OI menée du point O à MO, on mène la droite IC parallèle à OG, et sa rencontre C avec MO prolongé donne le centre de courbure de la courbe décrite par le point M.

(Collignon, Cinématique, pag. 293).

Cette construction peut d'ailleurs se transformer dans la suivante :

Soient F et H/G les centres de courbure



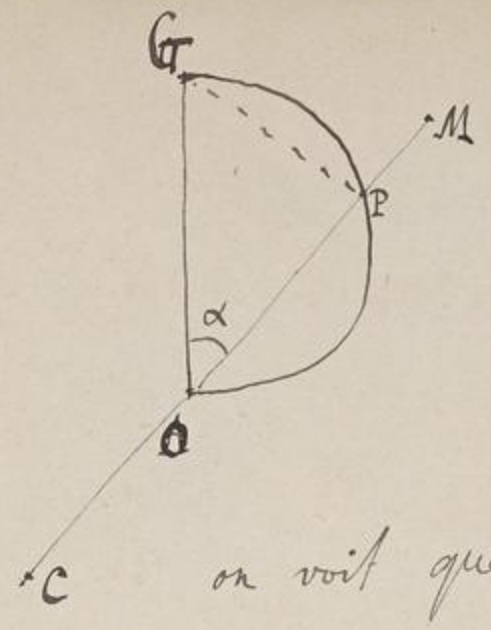
des deux courbes PQ et RS. Le centre de courbure C de l'épicycloïde engendrée par le point M s'obtiendra en élevant en O une perpend à OM, en joignant MF, prenant l'intersection K de ces deux droites, et joignant enfin le point K au centre de courbure H. L'intersection de HK et de MO sera le point C demandé.

Comme on le voit, cette seconde construction exige la connaissance des centres de courbure des deux courbes qui, roulant l'une sur l'autre, produiraient le mouvement de la figure. Or, dans bien des cas, ce problème accessoire serait au moins aussi difficile à résoudre que le problème principal, à moins que la roulette et sa base ne soient des données immédiates de la question.

Nous allons voir au contraire que le point G défini dans la première construction peut souvent s'obtenir assez facilement. Nous observerons tout d'abord que cette construction ~~n'est autre chose que la traduction~~ résulte très-simplement de la formule $\rho = \frac{p^2}{p - K\cos\alpha}$, où ρ est le rayon de courbure de l'épicycloïde décrite par le point M, p la distance MO du point M au centre instantané de rotation, K la quantité $\frac{OG}{OG} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}$, α l'angle de AM avec OG.

Dans la suite, nous appellerons ce point G le centre géométrique des accélérations, pour nous conformer à un usage qui provient de considérations empruntées à la Cinématique. Mais l'interprétation géométrique directe de la formule précédente va nous conduire à d'importantes conséquences.

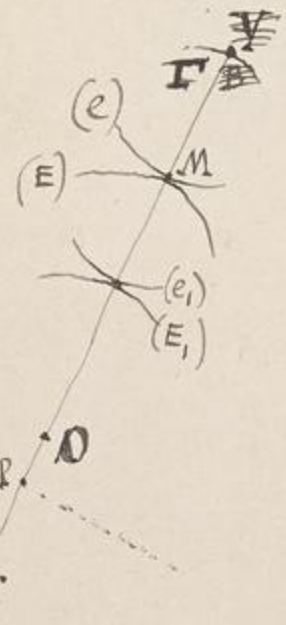
Proposition I.



Sur OG comme diamètre décrivons une circonférence ; soit P son intersection avec MO ; ce point est la projection du centre géométr. des accélér. G sur MO ; on voit que l'équation $\rho = \frac{p^2}{p - K\cos\alpha}$ exprime qu'on a $MC\rho = \frac{\overline{MO}^2}{MP}$, d'où $MP = \frac{\overline{MO}^2}{\rho}$, par conséquent, on voit que si l'on connaît le rayon de courbure ρ de la ligne décrite par un des points M de la figure mobile, on obtiendra le point P en prenant sur MO une longueur égale à $\frac{\overline{MO}^2}{\rho}$ (c.à.d. une Troisième proportionnelle à ρ et MO), et la perpendiculaire à MO menée par le point P contiendra le centre géométr. G des accélérations. La connaissance du rayon de courbure ρ' de la courbe décrite par un second point M' achèvera de déterminer le point G.

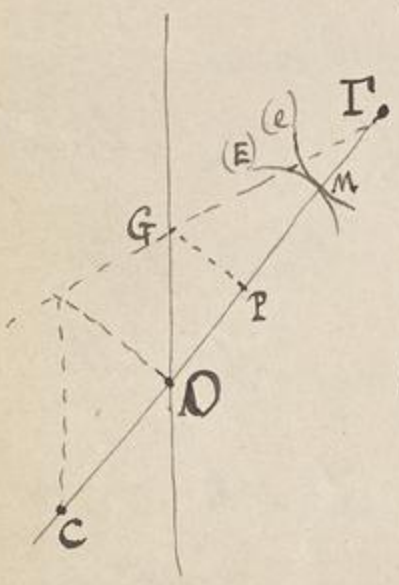
Proposition II.

Or dans un grand nombre de cas particuliers, on peut obtenir le rayon de courbure des lignes décrites par certains points de la figure mobile. C'est ce qui va résulter de la recherche du rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe mobile, et de quelques corollaires de cette question.



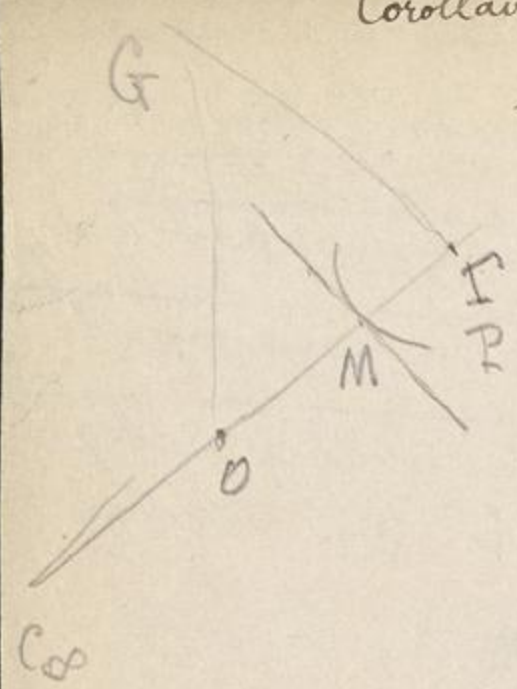
Considérons par exemple, une courbe (e) entraînée dans le mouvement de la roulette sur la base. Nous savons que le point M, où la courbe (e) touche son enveloppe, est sur la normale qui passe au centre instantané O. Pour trouver le rayon de courbure de l'enveloppe (E), je remarque qu'une série de courbes parallèles (e), (e_1), (e_2) enveloppent évidemment des courbes parallèles, la distance normale des enveloppes étant constante et égale à la distance des enveloppées correspondantes. Il résulte de là que

les centres de courbure de toutes les enveloppes sont en un même point C, lequel est aussi le centre de courbure de la trajectoire du point Γ, centre de courbure commun à toutes les enveloppées. On aura donc le point C en cherchant ~~appliquant~~ le ~~centre de courbure de la trajectoire~~ ~~construction de Savary~~ du point Γ, et par conséquent on voit que : Si pendant le mouvement de la figure mobile, une courbe (e) touche constamment une courbe fixe (E), de (e) étant dont le centre de courbure en Γ, et que l'on puisse construire ~~on aura par la construction de Savary~~ le point C, centre de courbure de la courbe décrite par le point Γ, on prendant à partir de Γ la longueur $\Gamma P = \frac{\overline{\Gamma O}^2}{\Gamma C}$, et la perpendiculaire menée par P à OC contiendra le point G (d'après la proposition I).



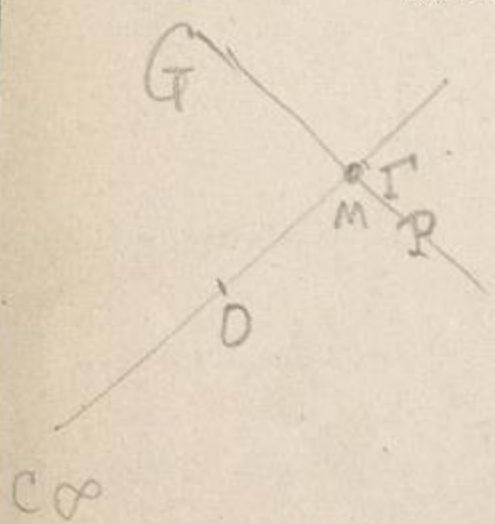
Voici un certain nombre de cas particuliers du cas plus général que nous venons de traiter.

Corollaire I. — Si une courbe liée à la figure mobile reste tangente à une droite fixe, le centre géom. des accél. G se trouve sur une parallèle à cette droite menée par le centre de courbure répondant au point de contact.

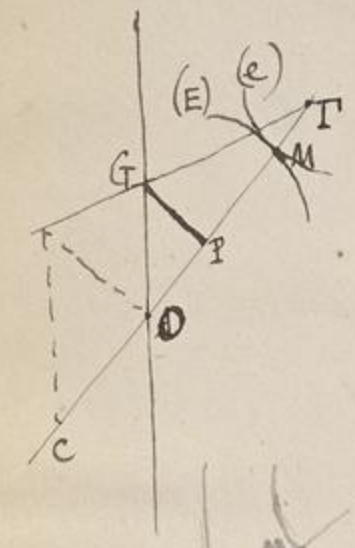


En effet, (E) est alors une droite perpend. en M à ΓC, le point C, centre de courbure de (E) passe à l'∞, et alors ΓP, qui est égal à $\frac{\overline{\Gamma O}^2}{\Gamma C}$, s'annule. Le point P coïncide donc alors avec le point Γ.

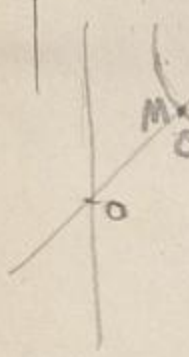
Corollaire II. — Comme cas plus particulier, on pourrait supposer que la courbe mobile se réduit à un point parcourant une droite, il faudrait alors faire $\overline{\Gamma M} = 0$, et le point P étant par conséquent confondu avec M, la droite dont il s'agit passerait par le point G.



Corollaire III. Lorsqu'une courbe (e) liée à la figure mobile passe constamment par un point fixe M, le centre instantané étant en O sur la normale menée en M à la courbe (e), dont le rayon de courbure est d'ailleurs MI', le centre géométr. G est sur la perpendiculaire à I'O menée par le point P tel qu'on ait $I'P = \frac{\overline{I'O}^2}{I'M}$.

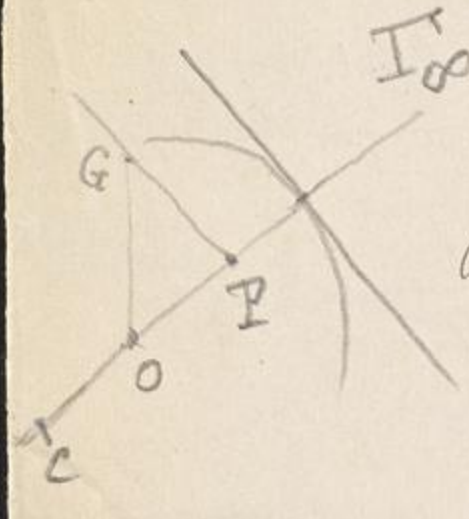


On voit, en effet, que ~~il suffit~~ dans ce cas la courbe fixe désignée plus haut par (E') doit être remplacée par un cercle de rayon indéfiniment décroissant.



En imaginant au contraire que ce soit la courbe mobile (e) qui se réduit au point M assujetti à parcourir la courbe fixe (E), on retrouve le résultat énoncé plus haut (proposition I), savoir : Lorsqu'un point de la figure mobile décrit une trajectoire donnée (dont le rayon de courbure est ρ), en portant sur la normale une longueur $MP = \frac{\overline{MO}^2}{MI'\rho}$ ~~MI~~ la perpendiculaire en O à MO passe par le point G. Mais ce n'est là qu'une vérification, car ~~l'énoncé de~~ la proposition II est une conséquence de la proposition I.

Corollaire IV. — Enfin, quand une droite liée à la figure en mouvement reste constamment tangente à une courbe fixe (qui peut se réduire à un point), on joindra le centre de courbure de cette courbe, ou le point qui la remplace, au centre instantané de rotation, et par l'extrémité P de cette ligne prolongée d'une quantité égale à elle-même, on lui mènera une perpendiculaire sur laquelle devra se trouver le point G, centre géométrique des accélérations.

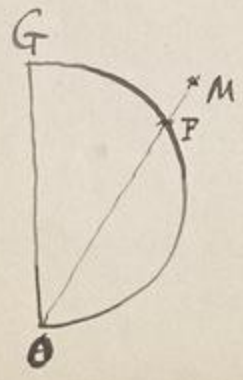


En effet, on a $CP = I'C - I'P = I'C - \frac{\overline{I'O}^2}{I'C}$

$$= \frac{\overline{I'C}^2 - \overline{I'O}^2}{I'C} = \frac{I'C + I'O}{I'C}(I'C - I'O) = \frac{1 + \frac{I'O}{I'C}}{1} \cdot OC ;$$

lorsque le point I' passe à l'∞, on voit que CP a pour valeur limite $2.OC$.

Remarque I. – On peut remarquer que le point C se trouve alors sur la circonférence symétrique de la circonfér. décrite sur OG comme diamètre, et l'on peut alors dire : La circonf. symétrique de la circonf. décrite sur OG comme diamètre est le lieu des centres de courbure C des trajectoires décrites par les points du plan I situés à l'∞, ou, si l'on veut, c'est le lieu des centres de courbure C des enveloppes de toutes les droites (puisque (e) est alors une droite) mobiles avec la figure considérée.

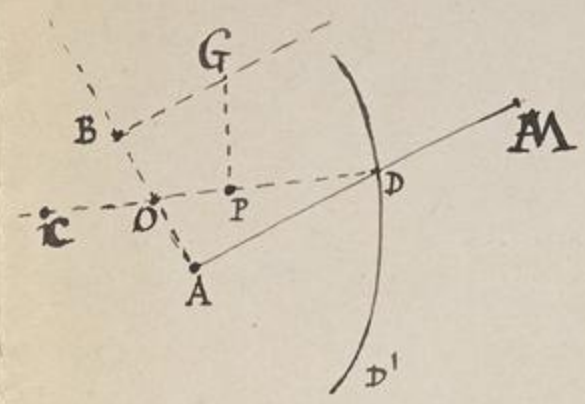


Remarque II. – J'ajouterai une dernière remarque : le centre de courbure de la trajectoire d'un point de la circonférence décrite sur OG comme diamètre est à l'infini, car dans ce cas le point M et le point P étant confondus, on a MP = 0 et par suite $\rho = \frac{\overline{MO}^2}{MP} = \infty$.

Cette circonf est donc le lieu géométr des points qui sont en un point d'inflexion de leurs trajectoires. D'où le nom de circonférence des inflexions qui lui a été donné. — Les règles établies plus haut suffisent, sans qu'on ait besoin de ces deux dernières remarques, ~~ne nous serviront pas~~ sous la forme où elles sont présentées. Elles sont les principales règles qui peuvent servir à obtenir les rayons de courbure de la traject d'un point entraîné dans le mouvement d'une figure invariable dans un plan. Elles ne sont, au fond, comme on l'a vu, que des corollaires plus ou moins immédiats des propositions I et II. Mais les détails, dans lesquels nous sommes entrés, sont utiles pour les applications géométriques, et permettent d'abréger beaucoup l'explication des problèmes que l'on peut avoir à traiter.

C'est surtout de la proposition I elle même et du corollaire IV que on a le plus souvent à faire usage.

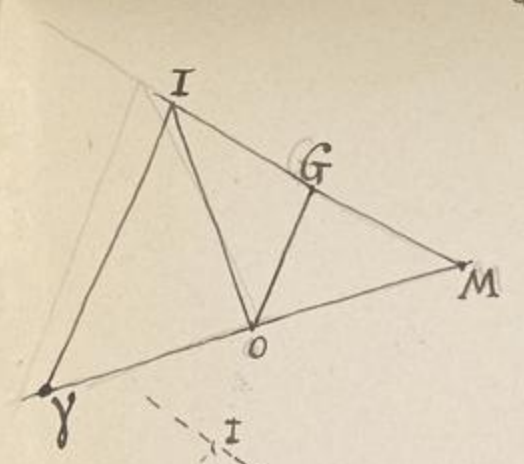
Applications.



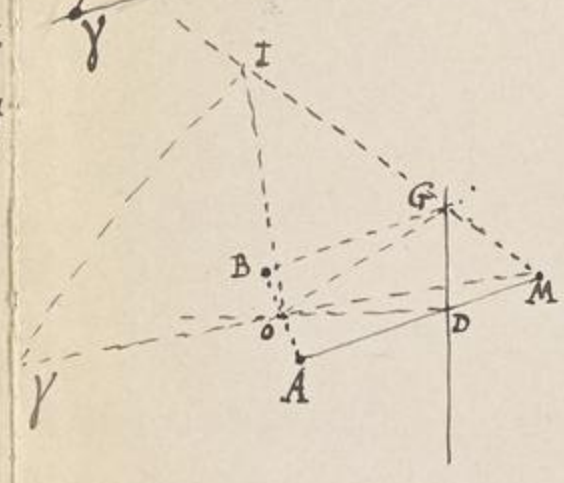
Conchoïde. Une droite DM de longueur constante, assujettie à passer par un point fixe A, se meut de manière que son point D une courbe donnée DD'; le point M engendre alors la conchoïde.

En menant AO et DO respectivement ~~perpendiculaires~~ normales à AD et à DD', on obtient, par la rencontre de ces lignes, le centre instantané de rotation O de la droite DM; prolongeant ensuite AO d'une longueur OB = AO et menant la perpendicul. BG à AB, le centre géométrique des accélérations G se trouvera sur BG (Corollaire IV); comme d'autre part la courbe DD' est donnée, on peut supposer connu son centre de courbure C relatif au point D; et, d'après la proposition ~~II~~ I, si l'on prend $DP = \frac{\overline{DO}^2}{DC}$, la perpendic. PG à DC ira passer par le point G.

Le point G étant connu, ainsi que le centre instantané O, on en déduira le rayon de courbure de la courbe conchoïde décrite par le point M, au moyen de la construction de Savary, indiquée à la 1ère page.

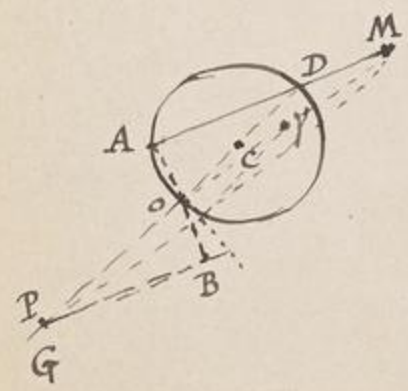


On obtient ainsi le rayon de courbure My.



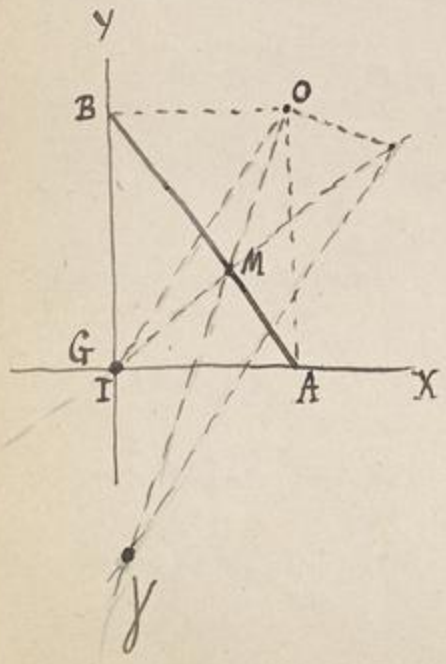
Si, comme cas particulier, la courbe DD' se réduit à une droite, celle-ci contient le point G (Corollaire II), et on achève la construction comme ci-dessus.

Limaçon de Pascal. C'est une conchoïde, où la courbe DD' est un cercle, et le point A est sur ce cercle.



Soit R le rayon de ce cercle. Le centre instantané O sera à l'extrémité du diamètre DC. On prend encore OB = AO, le point G est sur la perpend BG à AB. On a d'ailleurs à prendre sur DO

la longueur $DP = \frac{\overline{DO}^2}{DC} = \frac{4R^2}{R} = 4R$. Le point P est donc sur la droite BG (puisque AO=OB), et la perpendic menée par P à DP rencontre BG au point I. Le point G coïncide donc avec le point P. Ayant le point G et le point O, on en déduit, comme plus haut, le rayon de courbure de la courbe lieu du point M.

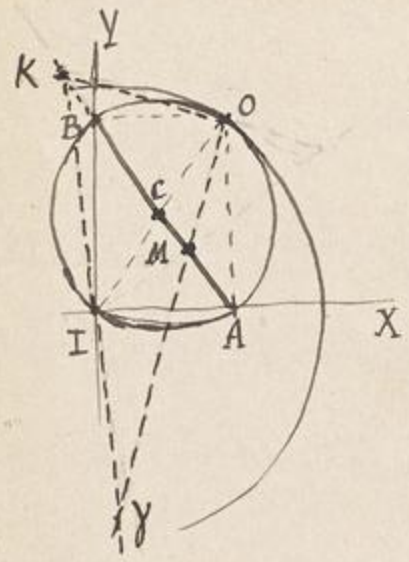


Ellipse. On peut considérer l'ellipse comme engendrée par un point M déterminé d'une droite de longueur constante AB dont les deux extrémités glissent sur deux droites rectangulaires IX et IY.

Le centre instantané O est au point de rencontre des deux perpend. en A et B aux deux axes IX et IY.

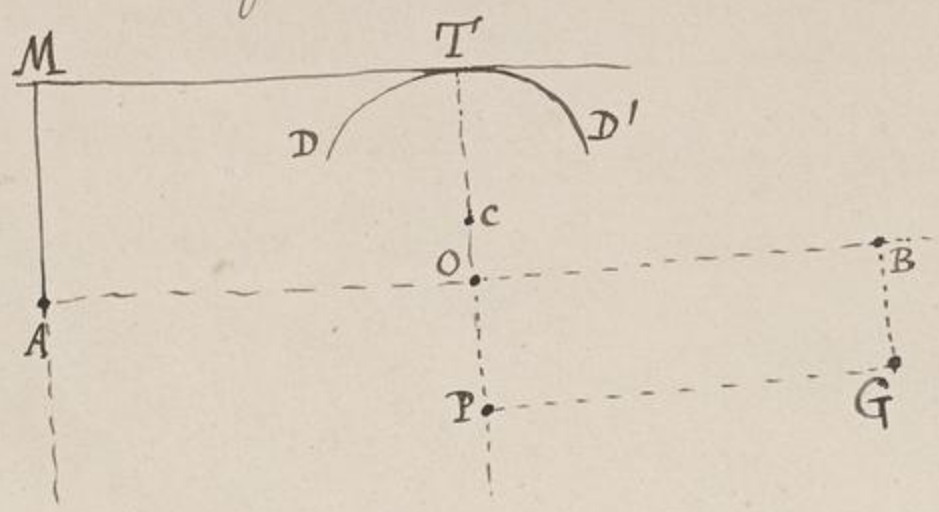
D'après le corollaire II, le point G est au point de rencontre I des deux axes rectangulaires IX et IY.

On achève par la 1ère construction ~~connue~~ de Savary, et on a le centre de courbure y.



Remarque.— Dans le cas actuel, on peut obtenir les deux Courbes, qui, roulant l'une sur l'autre, produiraient le mouvement de la figure. On démontre en effet que la courbe fixe est une circonférence décrite du point I comme centre avec un rayon IO égal à la longueur de la droite donnée AB (~~IABOAI~~ IAOB est un rectangle). La courbe mobile est la circonférence circonscrite au rectangle IAOB. Alors on peut appliquer la seconde construction de Savary (deuxième page). On joint MC qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre K avec la perpendiculaire OK à MO, puis on ~~joint~~ mène KI, qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre y avec OM.

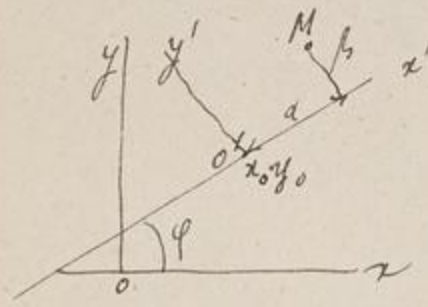
Podaire. La podaire d'une courbe DD' est le lieu des pieds M des perpendiculaires abaissées d'un point fixe A sur les tangentes MT de cette courbe.



Le centre instantané de rotation de l'angle droit mobile TMA est au point de rencontre O de la perpend. AO à AM et de la normale TO à la courbe DD' en T. La courbe DD' étant donnée, on connaît son centre de courbure C, d'où résulte (proposition I) le point P de ~~cette~~ la droite TO où se projette le centre géométrique des accélérations G. D'autre part, d'après le corollaire IV, en prenant OB = AO sur le prolongement de AO, la perpend. BG à AO contiendra aussi le point G. La position de ce point est donc à la rencontre de PG et de BG. Par suite, on achèvera la ~~construction~~ détermination du centre de courbure ~~de M par la méthode de~~ 1ère de la podaire lieu de M par la 1ère Construction de Savary.

J.B. Poncy

Mouvement d'une figure de forme invariable



Soit M un point d'une figure $x'oy'$ de forme invariable α, β ses distances aux axes rectangulaires ox', oy'. Soit φ l'angle des axes ox' et ox ox et oy sont 2 axes rectangul. immobiles. φ est notre variable indépendante.

On a : $x = x_0 + \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi$

$y = y_0 + \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi$

D'où $dx = dx_0 + (-\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi)\,d\varphi$

$dy = dy_0 + (\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)\,d\varphi$

La normale en x, y est

$$(X - x_0 - \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)(dx_0 - (\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)\,d\varphi)$$
$$+ (Y - y_0 - \alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi)(dy_0 + (\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)\,d\varphi) = 0$$

$$-\alpha^2\begin{vmatrix} +\cos\varphi\sin\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} + \beta^2\begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\varphi \\ +\cos\varphi\sin\varphi \end{vmatrix} + \alpha\beta\begin{vmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\ +\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \end{vmatrix}$$

$$+\alpha\left|-\cos\varphi\frac{dx_0}{d\varphi} - \sin\varphi\frac{dy_0}{d\varphi} - \sin\varphi(X - x_0) + \cos\varphi(Y - y_0)\right.$$

$$+\beta\left|\sin\varphi\frac{dx_0}{d\varphi} - \cos\varphi\frac{dy_0}{d\varphi} - \cos\varphi(X - x_0) - \sin\varphi(Y - y_0)\right.$$

$$+(X - x_0)\frac{dx_0}{d\varphi} + (Y - y_0)\frac{dy_0}{d\varphi} = 0$$

un système

Or je dis que l'on peut choisir deux valeurs de X Y, tel que les coefficients de α, β et le terme constant s'annulent à la fois. En effet multiplions par ~~sin~~ le coeff. de α, par $\cos\varphi$ celui de β et ajoutons :

$$-\frac{dy_0}{d\varphi}\cdot(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)(X - x_0)$$

Les 2 premières équations donnent :

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} +\cos\varphi\frac{dx_0}{d\varphi} + \sin\varphi\frac{dy_0}{d\varphi} & \cos\varphi \\ -\sin\varphi\frac{dx_0}{d\varphi} + \cos\varphi\frac{dy_0}{d\varphi} & -\sin\varphi \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} -\sin\varphi & +\cos\varphi\frac{dx_0}{d\varphi} + \sin\varphi\frac{dy_0}{d\varphi} \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi\frac{dx_0}{d\varphi} + \cos\varphi\frac{dy_0}{d\varphi} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X - x_0}{-\frac{dy_0}{d\varphi}} = \frac{Y - y_0}{\frac{dx_0}{d\varphi}}$$ donc la 3e équat. est conséquence des 2 premières et toutes les

normales passent par un point fixe.

Je démontre ainsi l'existence du centre instantané de rotation.

Différencions une seconde fois les équations :

$$x' = x'_0 - (\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi)$$
$$y' = y'_0 + (\alpha \cos\varphi - \beta \sin\varphi)$$

il vient :

$$x'' = x''_0 - (\alpha \cos\varphi - \beta \sin\varphi)$$
$$y'' = y''_0 - (\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi)$$

D'où : $x'^2 + y'^2 = x'^2_0 + y'^2_0 + \alpha^2 + \beta^2 - 2x'_0(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi) + 2y'_0(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)$

ou $x'^2 + y'^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha(y'_0\cos\varphi - x'_0\sin\varphi) \pm 2\beta(x'_0\cos\varphi + y'_0\sin\varphi) + x'^2_0 + y'^2_0$

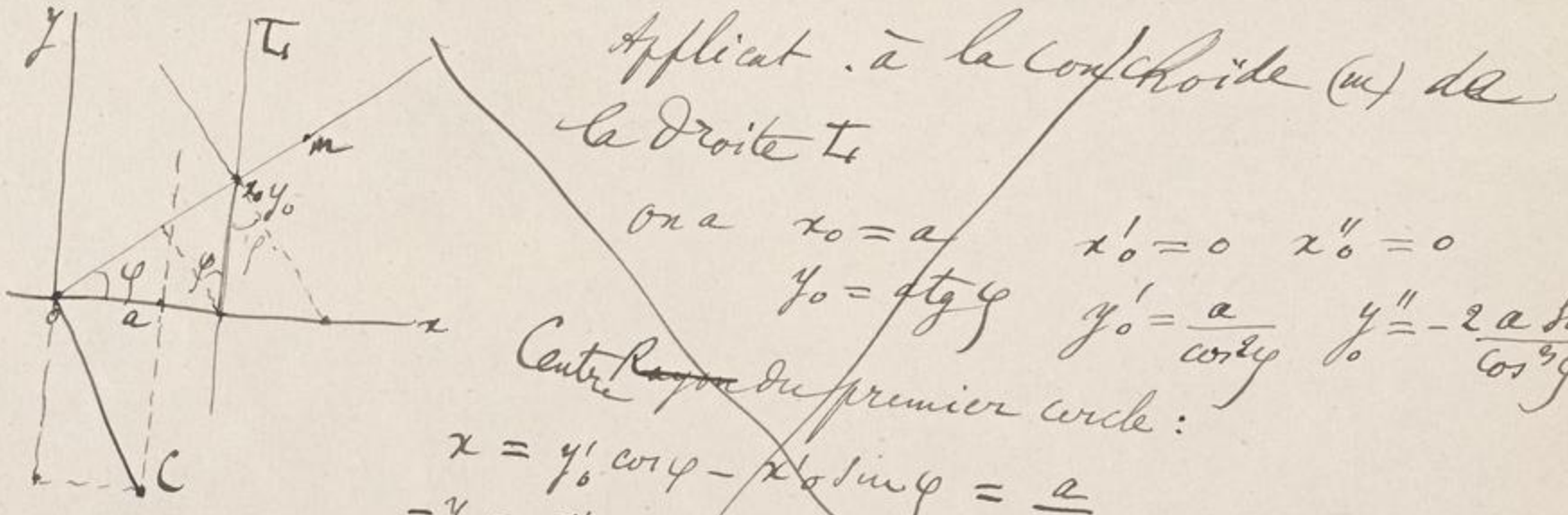
& $x'y'' = x'_0 y''_0 - \alpha(x'_0\sin\varphi + y''_0\sin\varphi) + \alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi + 2\alpha\beta\sin\varphi\cos\varphi - \beta(x'_0\cos\varphi + y''_0\cos\varphi)$

$y'x'' = y'_0 x''_0 - \alpha\cos\varphi\, y'_0 + \alpha x''_0\cos\varphi - \alpha^2\cos^2\varphi - \beta^2\sin^2\varphi + 2\alpha\beta\sin\varphi\cos\varphi + \beta\sin\varphi\, y'_0 - \beta x''_0\sin\varphi$

$x'y'' - y'x'' = x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0 + \alpha(-x'_0\sin\varphi + y'_0\cos\varphi \pm x''_0\cos\varphi - y''_0\sin\varphi) + \beta(-x'_0\cos\varphi + y''_0\cos\varphi - y'_0\sin\varphi + x''_0\sin\varphi) + \alpha^2 + \beta^2$

Donc $\dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} = R = \dfrac{Q}{P}^{3/2}$

où P & Q désignent les puissances du point α, β par rapport à deux cercles, l'un réel des inflexions l'autre imaginaire des courbures ~~nulles~~ infinies et dont le centre est réel.



Applicat. à la conchoïde (m) de la droite L_4

on a $x_0 = a$ $x'_0 = 0$ $x''_0 = 0$

$y_0 = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ $y'_0 = \dfrac{a}{\cos^2\varphi}$ $y''_0 = -\dfrac{2a\sin\varphi}{\cos^3\varphi}$

Centre ~~Repos~~ du premier cercle :

$x = y'_0\cos\varphi - x'_0\sin\varphi = \dfrac{a}{\cos\varphi}$

$-y = x'_0\cos\varphi + y'_0\sin\varphi = \dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$

Puiss. de l'origine : $x'^2_0 + y'^2_0$

$R^2 = \dfrac{-a^2}{\cos^4\varphi} + OC^2$ $D^2 - R^2 = \dfrac{a^2}{\cos^4\varphi}$

Etant ~~donnés~~ 3 points fixes A, B, C, r_1, r_2, r_3 les distances d'un point M à ces 3 points, le produit $r_1^m r_2^n r_3^p$ peut-il avoir un maximum ou un minimum en dehors de Zéro et de ∞ ?

Soient x y les coordonnées de M

le produit $r_1^m r_2^n r_3^p = u$ a pour expression en x, y la substitution à r_1, r_2, r_3 des valeurs tirées de :

$$r_1^2 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2$$
$$r_2^2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2$$
$$r_3^2 = (x-a_3)^2 + (y-b_3)^2$$

Si M est un maximum ou un minimum on a $\frac{du}{dx} = 0$ $\frac{du}{dy} = 0$

puisque je supposerai la fonction u continue aux environs de ses maximums ou minimums :

on a $\log u = m \log r_1 + n \log r_2 + p \log r_3$

D'où : $\frac{u'_x}{u} = m \frac{r'_{1x}}{r_1} + n \frac{r'_{2x}}{r_2} + p \cdot \frac{r'_{3x}}{r_3}$

ou $\frac{u'_x}{u} = m \cdot \frac{x-a_1}{r_1^2} + n \frac{x-a_2}{r_2^2} + p \frac{x-a_3}{r_3^2}$

en vertu de $2 r_1 r'_{1x} = 2(x-a_1)$ d'où $r'_{1x} = \frac{x-a_1}{r_1}$

$$r'_{2x} = \frac{x-a_2}{r_2}$$
$$r'_{3x} = \frac{x-a_3}{r_3}$$

De même on a :

$$\frac{u'_y}{u} = m \frac{y-b_1}{r_1^2} + n \frac{y-b_2}{r_2^2} + p \frac{y-b_3}{r_3^2}$$

Supposons $u'_x = 0$ $u'_y = 0$ au point x, y, on a :

$$\frac{u''^2_x}{u} = -2m \frac{x-a_1}{r_1^3} \cdot r'_{1x} + \frac{m}{r_1^2} + \cdots$$

ou $$\frac{u''^2_x}{u} = -2m \frac{(x-a_1)^2}{r_1^4} - 2n \frac{(x-a_2)^2}{r_2^4} - 2p \frac{(x-a_3)^2}{r_3^4} + \frac{m}{r_1^2} + \frac{n}{r_2^2} + \frac{p}{r_3^2}$$

& $$\frac{u''^2_y}{u} = -2m \frac{(y-b_1)^2}{r_1^4} - 2n \frac{(y-b_2)^2}{r_2^4} - 2p \frac{(y-b_3)^2}{r_3^4} + \frac{m}{r_1^2} + \frac{n}{r_2^2} + \frac{p}{r_3^2}$$

$$\frac{u''_{xy}}{u} = -2m \frac{x-a_1}{r_1^3} r'_{1y} + \cdots = -2m \frac{(x-a_1)(y-b_1)}{r_1^4} - 2n \frac{(x-a_1)(y-b_2)}{r_2^4} - \cdots$$

On peut écrire aussi :

$$\frac{1}{u} u''^2_x = \frac{m}{r_1^4} \left((x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - 2(x-a_1)^2 \right) + \cdots$$

$$\frac{1}{u} u''^2_x = \frac{m}{r_1^4} \left[(y-b_1)^2 - (x-a_1)^2 \right] + \cdots$$

$$\frac{1}{u} u''^2_y = \frac{m}{r_1^4} \left[(x-a_1)^2 - (y-b_1)^2 \right] + \cdots$$

$$u''^2_x = -u''^2_y$$

or on a : $u = u_0 + u'_x dx + u'_y dy + \frac{1}{2} \left(u''^2_x dx^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''^2_y dy^2 \right)$

ou ici $\Delta u = \frac{1}{2} u''^2_x \left\{ \left(u''^2_x dx + u''_{xy} dy \right)^2 + \left(u''^2_y u''^2_x - u''^2_{xy} \right) dy^2 \right\}$

pour un maxim. ou minimum il faut avoir :

$$u''^2_y u''^2_x - u''^2_{xy} \geqslant 0$$

mais $u''_x u''_{y^2} = -u''^2_x$ Donc on devrait avoir :

$$-\left(u''^2_{x^2} + u''^2_{xy}\right) \geqslant 0$$

L'inégalité est impossible — et pour l'égalité il faut $u = 0$.

Développer par la formule de Mac Laurin $(1+2xy+x^2)^\alpha$ et prouver que les termes sont de la forme $P_n x^n$, P_n étant un polynôme de degré n en y et satisfaisant à l'équation différentielle :

$$(y^2-1)\frac{d^2 P_n}{dy^2} + \alpha_1 y \frac{dP_n}{dy} + \alpha_2 P_n = 0$$

α_1 α_2 étant des constantes.

1° Supposons le développement en x possible — On a :

$$(1+2xy+x^2)^\alpha = X_0 + X_1 x + \dots + X_n x^n + \dots$$

et par dérivation :

$$2\alpha(1+2xy+x^2)^{\alpha-1}(x+y) = X_1 + 2X_2 x + \dots + nX_n x^{n-1} + \dots$$

D'où par multiplication par $1+2xy+x^2$

$$2\alpha(1+2xy+x^2)^{\alpha}(x+y) = (X_1 + 2X_2 x + \dots + nX_n x^{n-1} + \dots)(1+2xy+x^2)$$

et par substitution de la série à $(1+2xy+x^2)^\alpha$

$$2\alpha(X_0 + \dots + nX_n x^n + \dots)(x+y) = (X_1 + 2X_2 x + \dots + nX_n x^{n-1} + \dots)(1+2xy+x^2)$$

Donc par identification des coefficients de x^n

$$2\alpha(X_{n-1} + X_n y) = (n+1)X_{n+1} + 2y\, n X_n + (n-1)X_{n-1}$$

ou $(n+1)X_{n+1} + (2ny - 2\alpha y)X_n + (n-1-2\alpha)X_{n-1} = 0$

2° Posons $z = x+y$ $\quad u = (1+2xy+x^2)^\alpha$

On a $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ … etc. On a :

$u = (1-y^2+z^2)^\alpha$ ou $u = (a+z^2)^\alpha$ en mettant a pour $1-y^2$

Les dérivées $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0$ etc sont les valeurs de

$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ etc pour $z = y$.

On a d'après la formule qui donne $\dfrac{d^n \varphi(z^2)}{dz^n}$ suivant les dérivées successives de φ en z^2

$$\frac{d^n \varphi(z^2)}{dz^n} = \sum \frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)}{1\cdot 2\dots p}(2z)^{n-2p}\varphi^{n-p}$$ On a :

On a $u^{(p)}_{z^2} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)(a+z^2)^{(p)}$

pour $z = y$ on a : $a + y^2 = 1$ Donc $\left(u^{(p)}_{z^2}\right)_{y^2} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)$

et $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_{z=y} = X_n = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)}{p!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)(2y)^{n-2p}$

Donc X_n est un polynôme en y de degré n.

On a : $\frac{dX_n}{dy} = \sum \alpha\dots(\alpha-p+1)\frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)(n-2p)}{p!} 2(2y)^{n-2p-1}$

$\frac{d^2X_n}{dy^2} = \sum \alpha\dots(\alpha-p+1)\frac{n(n-1)\dots(n-2p)(n-2p-1)}{p!} 2.2(2y)^{n-2p-2}$

Calculons le coefficient de $\frac{1}{p!}(2y)^{n-2p}$ dans :

$(1-y^2)\frac{d^2X_n}{dy^2} + \alpha_1 y \frac{dX_n}{dy} + \alpha_2 dX_n = 0$

$4\frac{(\alpha-p)(\alpha-p-1)(n-2p)(n-2p-1)(n-2p-2)(n-2p-3)}{(p+1)(p+2)} 2^{n-2p} 2^2$

$-4\alpha\frac{(n-2p)(n-2p-1)}{2} 2^{n-2p-2}$

$+\alpha_1 2(n-2p)\frac{2^{n-2p-1}}{2} + \alpha_2 2^{n-2p} = 0$

On a $(1+2xy+x^2)^\alpha = \sum X_n x^n$

$2\alpha x(1+2xy+x^2)^{\alpha-1} = \sum \frac{dX_n}{dy} x^n$

$2\alpha x \sum X_n x^n = (1+2xy+x^2)\sum \frac{dX_n}{dy} x^n$

$2\alpha X_{n-1} = \frac{dX_n}{dy} + 2y\frac{dX_{n-1}}{dy} + \frac{dX_{n-2}}{dy}$

$2\alpha x \sum \frac{dX_n}{dy} x^n + 2\alpha \sum X_n x^n = 2x\sum \frac{dX_n}{dy} x^n + (1+2xy+x^2)\sum \frac{d^2X_n}{dy^2} x^n$

$2\alpha \frac{dX_{n-1}}{dy} + 2\alpha X_n = 2\frac{dX_{n-1}}{dy} + \frac{d^2X_n}{dy^2} + 2y\frac{d^2X_{n-1}}{dy^2} + \frac{d^2X_{n-2}}{dy^2}$

$y = x + st$

$1-y^2 = 1-t^2-s^2t^2-2rst$

$1+x^2 = 0 \quad t = s(x+st)$

$t(1-t^2)$

$dy = (1-2t)$

$1-y = 2t$

$\frac{1}{2}(1-y)\left(1-\frac{(1-y)}{2}\right)$

$\left(1-\frac{1-y}{2}\right)\left(1+\frac{1-y}{2}\right)$

$\frac{1}{4}(1-y^2)$

$\frac{1}{2}+y$

$dy = \frac{(1-2t)}{dy}$

$1-y^2 = 1+4t+4t^2$

$\sum \frac{\alpha\dots(\alpha-p+1)\,n\dots(n-p+1)}{p!}\left[2(1-2t)^{n-p}\right.$

$\frac{\alpha\dots(\alpha-p+1)\,n(n-1)\dots(n-p-q+1)}{p!\,q!}$

$(1-2t)^{n-p} = \sum \frac{(n-p)\dots(n-p-q+1)}{q!}(-1)^q t^q$

$\left.1+2xy+x^2\right.$

$\left.1+2x(1-2t)+x^2\right]^\alpha$

$\left[4+(1-t)+(1-2t+x)^2\right]^\alpha$

$$\frac{\alpha\ldots(\alpha-p+1)\,n\ldots(n-2p+1)}{p!}\left(2(1+zt)\right)^{n-2p}$$

$$\alpha\,\frac{(\alpha-1)\ldots n(n-1)}{\ldots}\,2\,(1+zt)^{n-2}$$

$$(1-y^2)\,d^2y + \alpha_1 y\,d + \alpha_2 y = 0$$

$$\sum A_n y^n$$

$$\sum n A_n y^{n-1}$$

$$\sum n(n-1) A_n y^{n-2}$$

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} - n(n-1)A_n + \alpha_1 n A_n + \alpha_2 A_n = 0$$

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} = \frac{n^2+\beta n+\gamma}{(n+2)(n+1)}$$

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} = \varphi(n) A_n$$

$$n(n-1)A_n = \varphi(n-2)A_{n-2}$$

$$(n+2)^2(n+1)n(n-1)A_{n+2} = A_0\,n(n-1)\varphi(n)+(n-1)(n-2)\varphi(n-2)$$

Il resterait à établir que les fonctions X_n satisfont à l'équat différentielle du 2e ordre.

Posons $u = (1+2xy+x^2)^\alpha = v^\alpha$.

En calculant $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, et éliminant la quantité v, on obtient l'équation

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\frac{du}{dx}}{x+y}\right)\frac{2(\alpha-1)x\,\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}} = \frac{\frac{du}{dx}}{x+y}\,2(\alpha-1)(x+y)^2$$

En simplifiant cette relation, et substituant $u = 1 + X_1 x + X_2 x^2 + \ldots$, puis égalant à zéro le coefficient de x^n, on aurait l'équation différentielle à laquelle satisfait X_n.

Mais le temps me manque pour achever le calcul.

Evaluation de la surface de la sph S_2.

Considérons la portion de cette surface comprise entre les deux plans

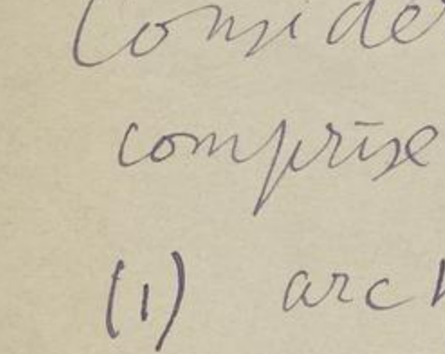
(1) $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \theta$ (2) $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \theta + d\theta$.

Soit $\sum d\theta$ cette surface.

On aura

$$S_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum d\theta.$$

De plus il est clair que ~~$\sum d\pi$ sera~~ $2\pi\Sigma$ sera la surface de la calotte sphérique engendrée par



AB, le cercle ABD étant la section faite dans la sphère et les droites AO, BC la section faite dans le cylindre par le plan (1). Or cette calotte a pour surface $2\pi(1-\sin\theta)$ ou $2\pi \times$ sa hauteur.

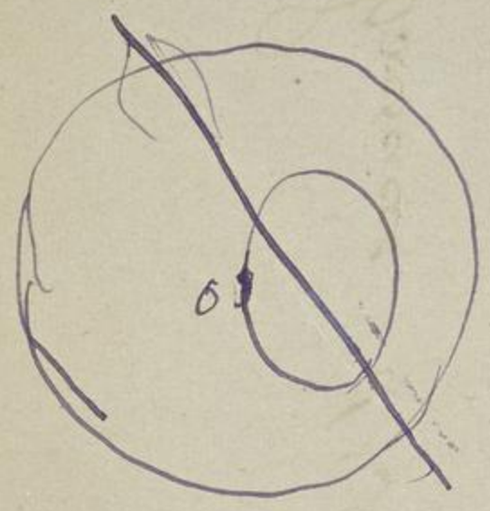
donc (il résulte que Σ est $1-\sin\theta$)

$$S_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta)\,d\theta = 2\pi - 4.$$

Vous avez

$$S_1 + S_2 = \ell\, r$$

~~Cette propriété n'est pas particulière à notre cylindre. Supposons une courbe convexe quelconque passant par O~~



1/

(11)

Pomey.

Exercices d'Analyse.

Intégrer l'équation différentielle :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{-x}.$$

L'équation caractéristique est ~~$F(r) = r$~~

$F(r) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0$. Elle a ses trois racines égales à -1. L'intégrale générale de l'équation sans second membre est donc $(G_1 + G_2 x + G_3 x^2) e^{-x}$, où G_1, G_2, G_3 sont trois constantes arbitraires. Cherchons maintenant une intégrale particulière de l'équation complète. Pour cela, remarquons que le second membre est de la forme $P_2 e^{\alpha x}$, P_2 étant un polynome du second degré en x, et α étant racine triple de $F(r) = 0$. L'integrale particulière cherchée sera donc de la forme $\Pi_{2+3} e^{\alpha x}$, où Π_{2+3} est un polynome du 5ème degré.

Il suffit d'ailleurs de substituer l'expression

(A) $e^{-x}(ax^3 + bx^4 + cx^5)$, puisque les termes ~~tels que de^{-x}~~ en e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x} sont implicitement contenus dans l'intégrale générale de l'équation privée de second membre.

× Ils disparaîtraient donc d'eux-mêmes en les substituant dans le 1er membre.

Appelons Δy le premier membre de l'équation différentielle ~~$\Delta(e^{\alpha x}) = e^{\alpha}$~~ Comme on sait,

on a, $\Delta(x^3 e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}[x^3 F(\alpha) + 3x^2 F' + 3x F'' + F''']$

(B) $\Delta(x^4 e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}[x^4 F + 4x^3 F' + 6x^2 F'' + 4x F''' + F^{IV}]$

$\Delta(x^5 e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}[x^5 F + 5x^4 F' + 10 x^3 F'' + 10 x^2 F''' + 5x F^{IV} + F^V]$.

Bien F^{IV} et F^V étant nuls il est inutile également d'écrire $\Delta(x^3 e^{\alpha x})$ et $\Delta(x^4 e^{\alpha x})$

Il est inutile d'écrire $\Delta(e^{\alpha x})$, $\Delta(xe^{\alpha x})$, $\Delta(x^2 e^{\alpha x})$, puisque $\alpha = -1$ étant racine triple de F, on a $F(\alpha) = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$.

D'ailleurs $F''' = 6$, $F^{IV} = 0$, $F^V = 0$.

Substituons (A) dans l'équation $\Delta y = x^2 e^{-x}$, il vient

$$\Delta[e^{-x}(ax^3 + bx^4 + cx^5)] = x^2 e^{-x},$$

ou, $\quad a\,\Delta(x^3e^{-x}) + b\,\Delta(x^4e^{-x}) + c\,\Delta(x^5e^{-x}) = x^2e^{-x}$,

c.à.d., en vertu des relations (B),

$$6a\,e^{-x} + 24\,b\,x\,e^{-x} + 60\,c\,x^2e^{-x} = x^2e^{-x},$$

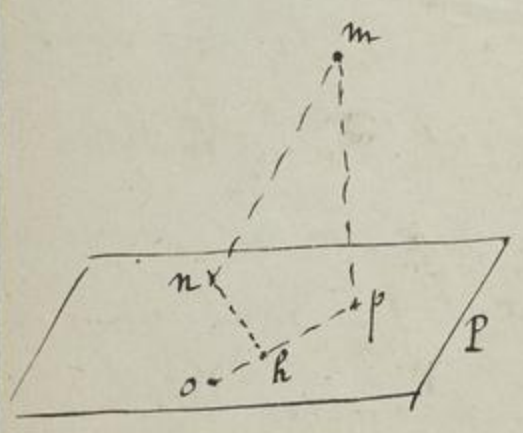
ce qui, par identification, donne $a=0$, $b=0$, $c=\frac{1}{60}$.

L'intégrale générale de l'équation donnée est donc

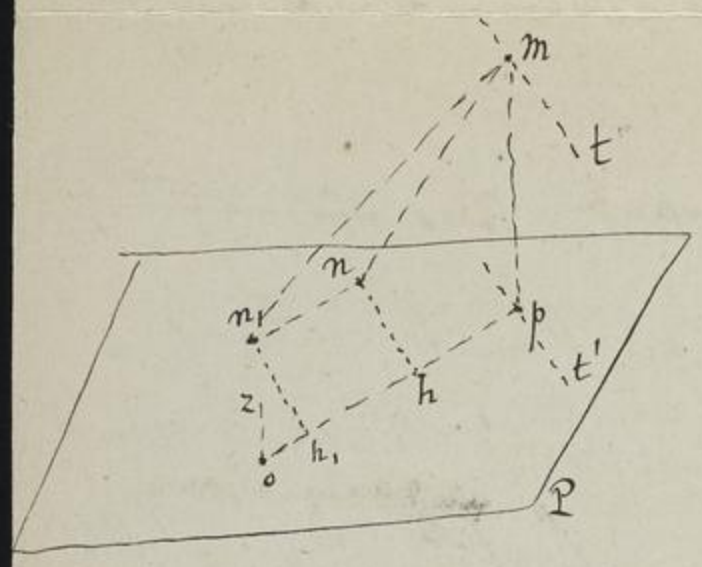
$$(G_1 + G_2 x + G_3 x^2)e^{-x} + \frac{1}{60}x^5e^{-x}.$$

~~On pouvait du reste prévoir que les coefficients a et b seraient nuls~~

On donne un plan P et un point o dans ce plan. Trouver l'équation générale des surfaces telles que, si par un point quelconque m de l'une d'elles, on mène la normale mn qui rencontre en n le plan P, la perpendiculaire mp à ce plan et enfin la perpendiculaire nh à op, le rapport de nh à mp soit constant.

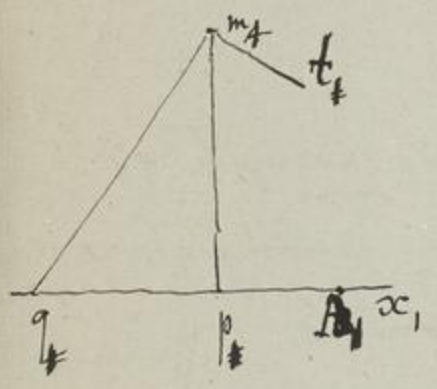


On peut résoudre la question géométriquement.



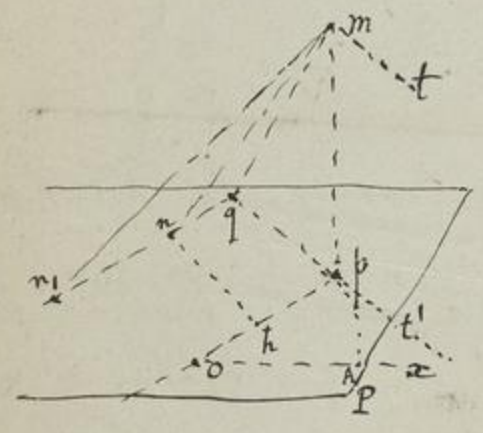
Soient S et S_1 deux des surfaces cherchées passant par le point m ; mn, mn_1 les normales en m. Le plan nmn_1 est normal à la courbe C d'intersection des surfaces S et S_1, c.à.d. à la courbe que l'on peut considérer comme engendrant la surface S.

La tangente en m à cette courbe est une droite mt perpendiculaire au plan normal nmn_1, et dont la projection pt' sur le plan P est perpendiculaire à la trace nn_1 du plan normal, c.à.d. à op, puisque par hypothèse on a $\frac{nh}{mp} = K = \frac{n_1h_1}{mp}$ et par suite $nh = n_1h_1$ et que, par conséquent nn_1 et op sont parallèles. Ainsi la projection c de la courbe C sur le plan P a pour tangente en p constamment perpendiculaire au rayon vecteur op issu du point o, cette courbe c est donc un cercle de centre o et de rayon op. La courbe C est donc une courbe tracée



sur un cylindre de révolution autour de la perpendiculaire oz au plan P menée par le point o.

Pour étudier la nature de cette courbe G, développons le cylindre sur le plan tangent suivant la génératrice mp, c.à.d. sur le plan tmpt'. La courbe G se développe suivant une courbe C_1 qui a pour tangente la droite mt et pour normale la perpendiculaire à mt, ~~dans~~ située dans ce plan, c.à.d. la perpendiculaire mq à nn_1.



Et comme pq est égal à nh comme parallèles comprises entre parallèles, on a ~~pq~~ $\frac{nh}{mp} = \frac{pq}{mp} = K$.

Ainsi, la courbe C_1 tracée dans le plan tmpt' est définie par la relation $\frac{pq}{mp} = K$. Soient x_1 et ~~z~~ z les coordonnées du point m de cette courbe[X]. pq représente la sous-normale, sa valeur est donc $z\frac{dz}{dx_1}$, et l'équation qui définit la courbe C_1 est par conséquent

$$\frac{dz}{dx_1} = K.$$

[X] par rapport à pt' et à une perpend. à pt' dans le plan de la courbe C_1.

La courbe C_1 est donc une droite et la courbe C une hélice

Quant à la courbe C, cherchons son équation en coordonnées semi-polaires, en prenant oz pour axe des z, le point o pour pôle et une droite quelconque ox dans le plan P pour axe polaire. Les coordonnées du point m de la courbe C sont alors z, ρ, ω. Alors, supposons que dans le plan tmpt' on ait pris pour origine A, le point transformé par développement du point A où ox rencontre le cylindre, on voit que l'on a

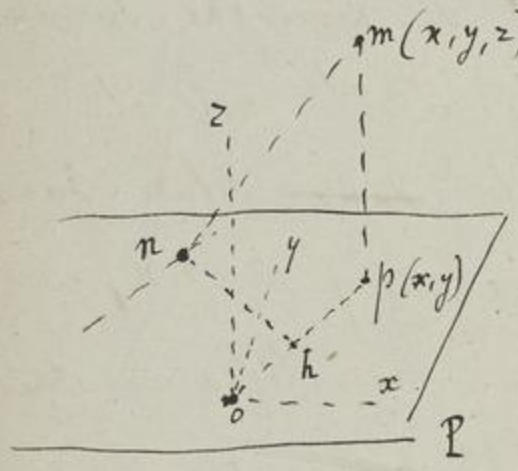
$$A_1p = x_1 = \text{arc } Ap = op \cdot \omega = \rho \cdot \omega.$$

~~D~~ D'où $dx_1 = \rho\, d\omega$, et par conséquent l'équation précédente $\frac{dz}{dx_1} = K$ devient $\frac{dz}{\rho\, d\omega} = K$; telle est l'équation qui, jointe à $\rho = \text{Const.}$, définit la Courbe G.

Cette équation s'intègre immédiatement et donne

$z = K\rho\omega + C'$, C' étant une constante.

L'équation générale des surfaces cherchées s'obtient en exprimant que l'une des constantes est fonction de l'autre, ce qui donne $z - Kpq\omega = f(p)$.



Analytiquement. — Prenons pour axes la normale oz au plan P et deux droites rectangulaires quelconques ox et oy dans ce plan. Les équations de la normale au point $m(x,y,z)$ sont

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1} \quad , \text{ où } p = \frac{\partial z}{\partial x} \, , \; q = \frac{\partial z}{\partial y} \, .$$

En faisant $Z = o$, on obtient les coordonnées du point n, savoir $x + pz$, $y + qz$. D'autre part, les coord. du point p étant x, y dans le plan P, puisque ce point est la projection de m, la droite op a pour équation $Yx - Xy = o$, et la distance nh du point n à cette droite a pour expression

$$\frac{(y+qz)x - y(x+pz)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{z(qx-py)}{\sqrt{x^2+y^2}} \, ,$$

~~D'autre part~~ enfin mp est le z du point m. La traduction analytique de la ~~équation~~ condition $\frac{nh}{mp} = K$ est donc

$$\frac{qx-py}{\sqrt{x^2+y^2}} = K \quad , \text{ ou bien}$$

$$(1) \qquad -py + qx = K\sqrt{x^2+y^2} \, .$$

L'intégration de cette équation aux différences partielles revient à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{K\sqrt{x^2+y^2}} \, .$$

La 1ère équation peut s'écrire $x\,dx + y\,dy = 0$, dont l'intégrale est $x^2 + y^2 = \text{const.}$, ou, si l'on veut, $\sqrt{x^2+y^2} = C$, C étant une constante arbitraire.

Une seconde équation est $\frac{dx}{-y} = \frac{dz}{K\sqrt{x^2+y^2}}$, que l'on peut écrire en vertu de l'intégrale précédente

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-KC}{\sqrt{C^2-x^2}} \, , \text{ ou bien}$$

3/

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-K}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{C}\right)^2}} \quad , \text{ c.à.d. enfin}$$

$$dz = -KC \frac{d\left(\frac{x}{C}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{C}\right)^2}} \; .$$

L'intégrale de cette équation est

$$z = KC \arccos \frac{x}{C} + C'$$

ou $$z = K\sqrt{x^2+y^2} \cdot \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + C' \; .$$

Alors l'intégrale de l'équation (1) est

$$z - K\sqrt{x^2+y^2} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \; ,$$

ou bien, en adoptant les coord. semi-polaires z, ρ, ω,

$$z - K\rho\omega = f(\rho) \; .$$

On peut également transformer tout d'abord l'équation (1) en posant $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$. On a

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\rho} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{d\rho} = p\cdot\cos\omega + q\sin\omega \; ,$$

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\omega} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\omega} = \left(-p\sin\omega + q\cos\omega\right)\rho \; .$$

Il faudrait alors remplacer dans (1) x, y, p, q par leurs valeurs en ρ et ω tirées de ces équations. Mais on remarque que, tout étant symétrique par rapport à oz, l'équation différentielle cherchée ne doit pas contenir explicitement ω, et par suite on peut dès-maintenant supposer $\omega = 0$, ce qui simplifie notablement les équations et les réduit à $x = \rho$, $y = 0$, $p = \frac{dz}{d\rho}$, $q = \frac{1}{\rho}\frac{dz}{d\omega}$.

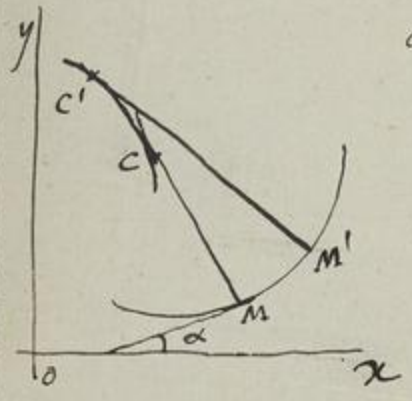
L'équation (1) devient ainsi

$$\frac{dz}{d\omega} = K\rho \; ,$$

dont l'intégrale est $z = K\rho\omega + f(\rho)$; car la constante d'intégration n'est constante que par rapport à ω et d'une manière générale peut dépendre de ρ .

Trouver ~~four~~ les courbes pour lesquelles on a la relation $R' = KR^2$, où R est le rayon de courbure de la courbe, R' celui de la développée et K une constante.

Soient α l'angle de la tangente à la courbe cherchée avec l'axe des x, s l'arc de courbe MM' compté à partir d'une origine déterminé, α' et s' les quantités correspondantes relatives à la développée cc'. On a d'abord



$$R = \frac{ds}{d\alpha} \quad , \quad R' = \frac{ds'}{d\alpha'} .$$

Mais, ~~on a avi~~ la courbe cc' étant la développée de MM', on a $d\alpha' = d\alpha$ et $ds' = d\cancel{R}$. Il en résulte

$$R' = \frac{d\cancel{R}}{d\alpha} .$$ La condition $R' = KR^2$ devient donc

$$\frac{dR}{d\alpha} = KR^2 \; ; \quad \text{d'où} \quad \frac{dR}{R^2} = K d\alpha \; ; \text{ intégrant, il vient}$$

~~$-\frac{1}{R} = K(\alpha - \alpha_0)$~~ $\quad -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right) = K(\alpha - \alpha_0)$,

en appelant α_0 et R_0 deux constantes, ~~arbitraires~~ telles que pour $\alpha = \alpha_0$ on ait $R = R_0$. On en déduit

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} - K\alpha + K\alpha_0 . \quad \text{Posons} \quad \frac{1}{R_0} + K\alpha_0 = C \; , \text{ on a}$$

$$R = \frac{1}{C - K\alpha} . \quad \text{D'ailleurs, on a}$$

$$dx = ds \cos\alpha \quad , \quad dy = ds \sin\alpha$$

ou, d'après $ds = R d\alpha$,

$$dx = \frac{\cos\alpha \, d\alpha}{C - K\alpha} \quad , \quad dy = \frac{\sin\alpha}{C - K\alpha} d\alpha .$$

Intégrons, en désignant par x_0 et y_0 les constantes arbitraires ,

$$x - x_0 = \int_0^\alpha \frac{\cos\alpha}{C - K\alpha} d\alpha \quad , \quad y - y_0 = \int_0^\alpha \frac{\sin\alpha \, d\alpha}{C - K\alpha} .$$

On voit que ~~toutes~~ les courbes cherchées s'obtiennent en transportant l'une d'elles parallèlement à elle-même. L'arc de cette courbe s'obtient aisément. On a en effet

$$ds = \frac{d\alpha}{C - K\alpha} \; , \quad \text{d'où} \quad s = -\frac{1}{K} L(C - K\alpha) .$$

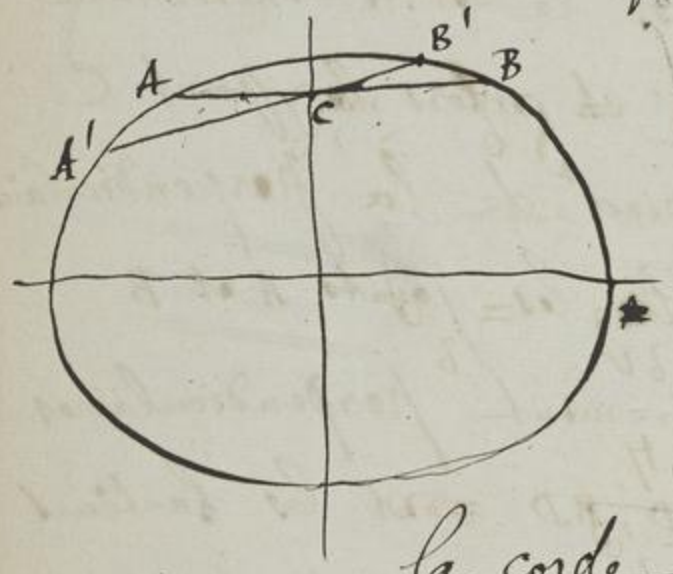
1/

(12)

Pomey

Exercices d'Analyse

Trouver l'aire comprise entre une ellipse et la courbe enveloppe d'une corde de longueur constante inscrite dans l'ellipse.



Soit AB la corde donnée de longueur 2l et C le point où elle touche son enveloppe la corde

Posons $AC = \rho$, $BC = \rho'$,

angle $ACA' = d\omega$, en supposant que $A'CB'$ soit une position infiniment voisine de

L'aire cherchée S est

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\omega .$$

On a $\rho + \rho' = 2l$, posons aussi $\rho - \rho' = 2a$,

d'où $\rho = l + a$. et par suite

$\rho^2 = l^2 + 2al + a^2$; et d'ailleurs en multipliant membre à membre $\rho^2 - \rho'^2 = 4al$, d'où

$$a = \frac{\rho^2 - \rho'^2}{4l} .$$ Il vient donc

$$\rho^2 = l^2 + \frac{\rho^2 - \rho'^2}{2} + \cancel{\frac{(\rho^2 - \rho'^2)^2}{16 l^2}}\, a^2$$

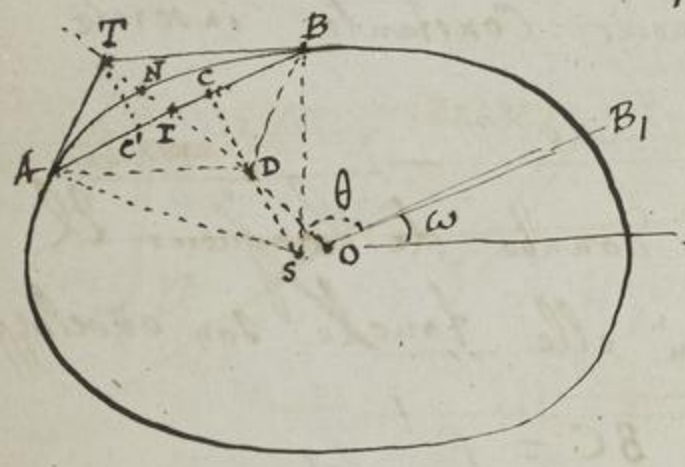
Donc $2S = \int_0^{2\pi} l^2 \, d\omega + \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - \rho'^2}{2} \, d\omega + \int_0^{2\pi} \cancel{\frac{(\rho^2 - \rho'^2)^2}{16 l^2}}\, a^2 \, d\omega$

Supposons que la position initiale de la corde AB soit parallèle à l'un des axes de l'ellipse, alors on a évidemment $\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} \, d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'^2}{2} \, d\omega$, d'où

$\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - \rho'^2}{2} \, d\omega = 0$. Il en résulte qu'on a

$$2S = \int_0^{2\pi} l^2\,dw + \int_0^{2\pi} \alpha^2 \frac{(\rho^2-\rho'^2)^2}{16\,l^2}\,dw .$$

La 1ère intégrale est $2\pi l^2$. Reste à calculer la seconde. Exprimons que le point C appartient à l'enveloppe de AB. A cet effet, menons les normales en A et B à l'ellipse, elles se coupent en S; ce point est le centre instantané de rotation de AB, et alors le point C est précisément le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur AB. Par les points A et B menons les droites AD, BD respectivement perpendiculaires à BS, AS. Les droites SC, AD, BD sont les hauteurs du triangle ABS, et, par suite, elles se rencontrent en un même point D. D'ailleurs il résulte de la construction des droites AD, BD, que la figure ADBT est un parallélogramme, et par suite que la droite DT passe par le milieu I de AB.



~~On a donc $a = \frac{\rho-\rho'}{2} = IC = TI$~~

Il en résulte que a ou $\frac{\rho-\rho'}{2}$ est égal à IC.

Abaissons du point T la perpend TC' sur AB, on a $IC' = IC$. Mais, en désignant par θ l'angle TIB on a $IC' = -TI\cos\theta$. Il en résulte donc

$a = -TI\cos\theta$, et $\underline{a^2 = \overline{TI}^2 \cos^2\theta}$.

Evaluons TI. Pour cela, nous observerons que I étant le milieu de AB, TI passe par le centre de l'ellipse, ~~et les deux droites AB et OT sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse~~ et la corde AB est parallèle au diamètre conjugué de OT.

Il en résulte $\overline{TI}^2 = \dfrac{\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{\quad}}{2}\cdot l^4}{\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{\quad}}{2}\left[\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{\quad}}{2} - l^2\right]}$

ou $\overline{TI}^2 = \dfrac{\left(a^2+b^2-\sqrt{\quad}\right)^2 l^4}{\dfrac{4a^2b^2}{\sin^2\theta}\cdot\left[\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{\quad}}{2} - l^2\right]}$

ou $\overline{TI}^2 = \dfrac{\left(a^2+b^2-\sqrt{\quad}\right)^2 l^4\left[\dfrac{(a^2+b^2-2l^2)^2}{4} - \dfrac{(a^2+b^2)^2}{4} + \dfrac{a^2b^2}{\sin^2\theta}\right]}{\dfrac{4a^2b^2}{\sin^2\theta}\cdot}$

ou $\overline{TI}^2 = \dfrac{\left(a^2+b^2-\sqrt{\quad}\right)^2 l^4\left(\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{\quad}}{2} - l^2\right)}{\dfrac{4a^2b^2}{\sin^2\theta}\left[\dfrac{(a^2+b^2-2l^2)^2}{4} - \dfrac{(a^2+b^2)^2}{4} + 4\dfrac{a^2b^2}{\sin^2\theta}\right]}$

D'autre part la relation $tg\,\omega\, tg(\omega+\theta) = -\dfrac{b^2}{a^2}$ permet de calculer $d\omega$ en fonction de θ. On a en effet

$$tg(\omega+\theta) = \frac{tg\,\omega + tg\,\theta}{1 - tg\,\omega\, tg\,\theta} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{tg\,\omega},$$

d'où $$tg\,\theta\,(a^2 tg^2\omega - b^2 tg\,\omega) = -b^2 - a^2 tg^2\omega$$

$$(\alpha) \qquad tg\,\theta = \frac{a^2 tg^2\omega + b^2}{(b^2-a^2)\,tg\,\omega}.$$

Différentions cette équation, il vient

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2a^2 tg\,\omega\cdot\frac{1}{\cos^2\omega}\,(b^2-a^2)tg^2\omega - (a^2 tg^2\omega + b^2)(b^2-a^2)\frac{1}{\cos^2\omega}}{(b^2-a^2)^2 tg^2\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{b^2-a^2}{\cos^2\omega}\cdot\frac{2a^2 tg^2\omega - a^2 tg^2\omega - b^2}{(b^2-a^2)^2 tg^2\omega}\,d\omega$$

$$= (1+tg^2\omega)\,\frac{a^2 tg^2\omega - b^2}{(b^2-a^2)\,tg^2\omega}\,d\omega.$$

L'équation (α) peut s'écrire

$$a^2 tg^2\omega + (a^2-b^2)\,tg\,\theta\cdot tg\,\omega + b^2 = 0,$$

d'où $$tg\,\omega = \frac{(b^2-a^2)\,tg\,\theta \pm \sqrt{(b^2-a^2)^2 tg^2\theta - 4a^2b^2}}{2a^2}$$

Il y a deux valeurs pour $tg\,\omega$, car un système de diam conjugués faisant l'angle θ a son symétrique par rapport au petit axe, qui correspond aussi à θ.

La position initiale de la corde AB étant supposée parallèle au grand axe ox de l'ellipse, on voit que l'angle de AB avec ox est ω, et par suite celui de OT avec ox est $\omega+\theta$. La relation connue $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ donne ici

$$tg\,\omega \cdot tg(\omega+\theta) = -\frac{b^2}{a^2} .$$

Appelons a' et b' les deux demi-diamètres conjugués dirigés suivant oB_1 (parallèle à AB) et OT. Soient d'ailleurs Y et y les ordonnées des points T et I dans le système d'axes $\not\equiv oB_1, oT$. On a $TI = Y - y$ et $Yy = b'^2$. Il en résulte $TI = \frac{b'^2 - y^2}{y}$.

Dans ce même système d'axes, l'équation de l'ellipse est $b'^2x^2 + a'^2y^2 - a'^2b'^2 = 0$, or le point A situé sur elle a pour coordonnées $AI = l$, $oI = y$, on a donc $b'^2l^2 + a'^2y^2 - a'^2b'^2 = 0$. D'où

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - l^2) \qquad \text{et} \qquad b'^2 - y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}l^2 .$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de TI, il vient

$$\overline{TI}^2 = \frac{\frac{b'^4 l^4}{a'^4}}{\frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - l^2)} = \frac{b'^2 l^4}{a'^2(a'^2 - l^2)} .$$

D'autre part les théorèmes d'Apollonius donnent

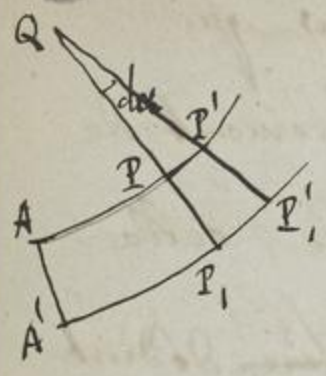
$$a'^2b'^2\sin^2\theta = a^2b^2 \qquad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 ,$$

a et b étant les axes de l'ellipse. Les quantités a'^2 et b'^2 sont donc les racines de l'équation

$$Z^2 - (a^2+b^2)Z + \frac{a^2b^2}{\sin^2\theta} = 0 ,$$

c.à.d.

$$\begin{matrix} a'^2 \\ b'^2 \end{matrix} = \frac{a^2+b^2 \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4\frac{a^2b^2}{\sin^2\theta}}}{2}$$



est $d\alpha$, et l'on voit que la différentielle de l'aire $AA'P'P_1$, c.à.d. l'aire $PP_1P'P_1'$ déterminée par deux normales, infiniment voisines est $\frac{1}{2}\rho_1^2 d\alpha - \frac{1}{2}\rho^2 d\alpha$, c.à.d.

$$\frac{1}{2}(\rho+c)^2 d\alpha - \frac{1}{2}\rho^2 d\alpha = \frac{1}{2}c(2\rho + c^2) d\alpha .$$

Et l'aire elle-même est $\frac{1}{2}c\int(2\rho+c)\,d\alpha$.

Or $\rho\, d\alpha = ds$, s étant l'arc AP. On a donc

$$S = \frac{1}{2}c(2s + c\alpha) + \text{const.}$$

Soit α_0 la valeur initiale de α ; pour $\alpha = \alpha_0$, on a $S=0$, et $s=0$, donc $0 = \frac{c}{2}(c\alpha_0) + \text{const.}$ D'où, en retranchant

$$S = cs + \frac{c^2}{2}(\alpha - \alpha_0) .$$

D'ailleurs on a $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, ~~d'où~~ x étant ~~ds~~ l'abscisse du point P ; d'où $ds = \frac{dx}{\cos\alpha}$.

De même soit s_1 l'arc correspondant $A'P_1$, et x_1 l'abscisse du point P_1. On a $ds_1 = \frac{dx_1}{\cos\alpha}$.

Or on a $x_1 = x + c\sin\alpha$, d'où

$$dx_1 = dx + c\cos\alpha\, d\alpha .$$

Il en résulte $\underline{ds_1} = \frac{dx_1}{\cos\alpha} = \frac{dx}{\cos\alpha} + c\,d\alpha = ds + c\,d\alpha$

d'où $s_1 = s + c\alpha + \text{const.}$

Et comme s_1 et s s'annulent pour $\alpha = \alpha_0$.

$$0 = c\alpha_0 + \text{Constante} .$$

D'où $s_1 = s + c(\alpha - \alpha_0)$, et $\alpha - \alpha_0 = \frac{s_1 - s}{c}$.

Donc $S = cs + \frac{c^2}{2}\,\frac{s_1 - s}{c} = \frac{1}{2}c(s + s_1)$.

La surf. $APA'P_1$ est donc égale à la surface d'un trapèze dont les côtés parallèles seraient égaux à AP et $A'P_1$ et la hauteur à $AA' = c$.

Nous devons prendre celle des deux valeurs de $tg\omega$ qui pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ s'annule (car à l'origine du déplacement de AB, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\omega = 0$). Il faut donc prendre celle qui a le signe — devant son radical. On en ~~tire~~ déduit

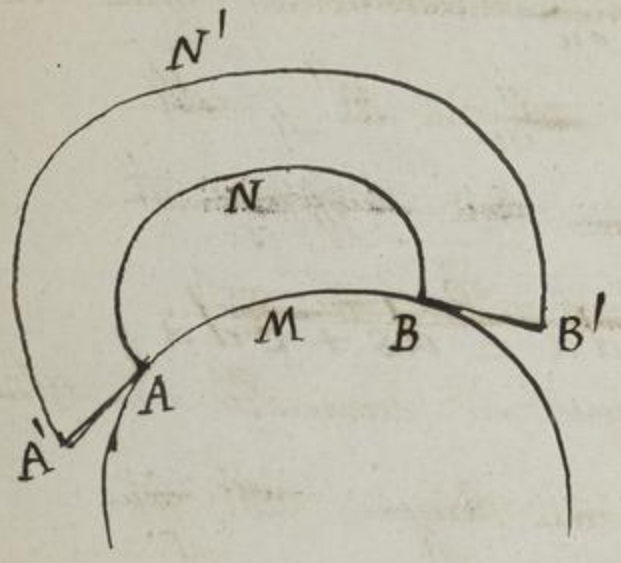
$$tg^2\omega = \frac{2(b^2-a^2)^2 tg^2\theta - 4a^2b^2 - 2(b^2-a^2)tg\theta\sqrt{\ }}{4a^4}$$

On substitue cette valeur dans l'expression de $d\omega$

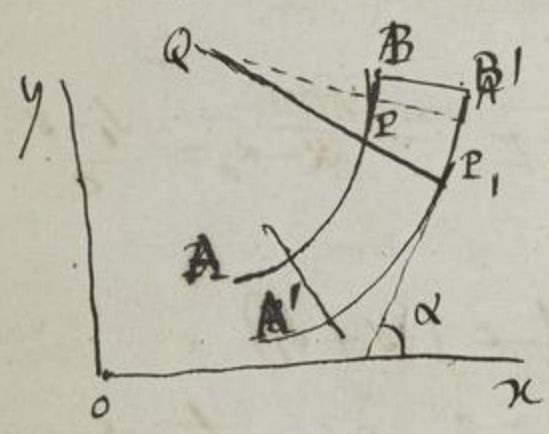
$$d\omega = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \cdot (1+tg^2\omega)\ \frac{\cancel{a^2tg^2\omega - b^2}}{\cancel{(b^2-a^2)tg^2\omega}}\ \frac{(b^2-a^2)tg^2\omega}{a^2tg^2\omega - b^2}\ ;$$

puis il faudrait multiplier cette valeur de $d\omega$ par l'expression de $\overline{TI}^2 \cos^3\theta$ trouvée plus haut, et intégrer enfin depuis $\theta = \text{arc tg} - \frac{b^2}{a^2}$ jusqu'à zéro. Cette intégrale représente le $\frac{1}{4}$ de l'intégrale cherchée $\int_0^{2\pi} a^2 d\omega$.

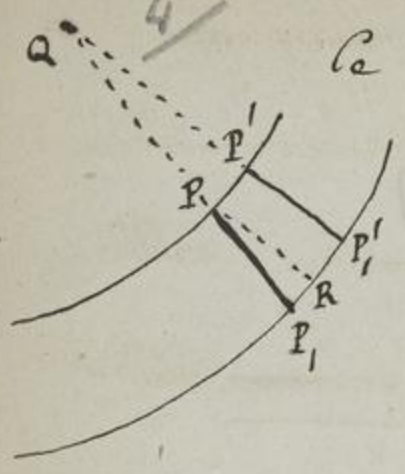
En somme, on a à effectuer ~~une~~ l'intégrale d'une expression en fonction de θ qui se présente sous une forme d'une extrême complication. ———



On donne deux arcs l'un de cercle AMB, l'autre d'épicycloïde ANB. On considère l'arc de courbe A'N'B' parallèle à l'arc ANB et l'on demande l'aire comprise entre les deux courbes ANB, A'N'B' et les deux normales extrêmes AA' et BB' communes à ces deux arcs. On suppose AA' dirigé vers l'extérieur et égal à c.



D'une manière générale, soient AB, A'B' deux courbes parallèles, et c la longueur PP$_1$, pris sur une normale commune QPP$_1$. ~~Désignons par~~ Soit Q le centre de courbure, ρ le rayon de courbure de AB en P ; le rayon ρ_1 de A'B' en P$_1$ sera $\rho + c$; α étant l'angle de la tangente en P$_1$ avec ox, l'angle de contingence



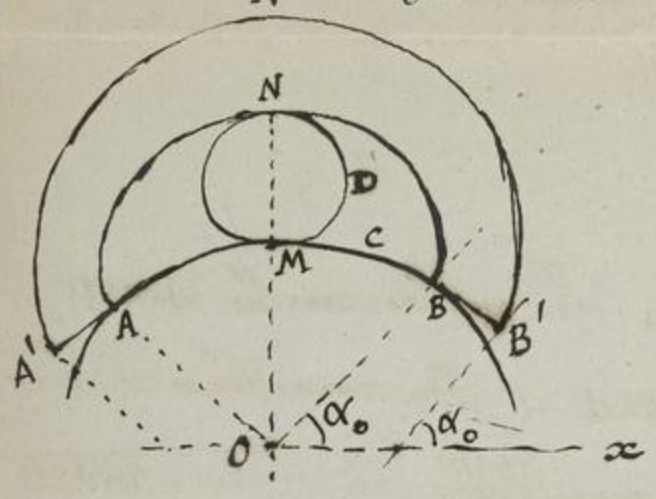
Ce résultat est d'ailleurs évident géométriquement. Car PP_1 et $P'P'_1$ étant les parties interceptées par les deux courbes parallèles sur deux normales infiniment voisines, si l'on mène PR parallèle à $P'P'_1$, on voit que la figure $PP'P'_1R$ est un rectangle, dans lequel $PP' = ds = P'_1R = \cancel{ds_1} \; P_1P'_1 - RP_1$.

Or $P_1P'_1 = ds_1$, $RP_1 = PP_1 \cdot d\alpha = c\,d\alpha$.

D'où $ds = ds_1 - c\,d\alpha$, ou $s = s_1 - c(\alpha - \alpha_0)$.

L'aire élémentaire représente également un trapèze $PP'P'_1P_1$ dont la surface est $\frac{PP' + P_1^{\times}P'_1}{2}\,c$, la distance d'un point quelconque de PP' à un point quelconque de PP_1 étant égale à c au second ordre près. On a donc pour surface intégrale $c\,\frac{s + s_1}{2}$.

Appliquons cela au cas particulier de l'épicycloïde ordinaire.



On a arc $ANB = s = 8R'\left(1 + \frac{R'}{R}\right)$, en appelant R le rayon du cercle fixe, R' celui du cercle mobile.

On a aussi arc $A'N'B' = s + c(\alpha - \alpha_0) = s_1^{\times}$,

et l'on voit immédiatement que la valeur finale de α ~~α_1~~ en A', est $2\pi - \alpha_0$, ~~On a donc~~ en supposant

~~$s' = s + c(2\pi - \alpha_0 - \alpha_0) = s + 2c(\pi - \alpha_0)$~~.

que la droite ox fixe par rapport à laquelle on estime les angles α est perpendiculaire au rayon OM qui passe par le milieu de l'arc AMB. On a donc

$$s_1^{\times} = s + c(2\pi - \alpha_0 - \alpha_0) = s + 2c(\pi - \alpha_0).$$

On a d'ailleurs $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \widehat{BOM} = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{arc } MCB}{R}$.

Or arc MCB = arc $MDN = \pi R'$, on a donc

$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi R'}{R}$, d'où $\pi - \alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi R'}{R}$. Il vient donc

$$s_1^{\times} = s + 2c\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi R'}{R}\right) = 8R'\left(1 + \frac{R'}{R}\right) + \pi c\left[1 + \frac{2R'}{R}\right]$$

la surf. S a donc pour expression

$$S = c\,\frac{s+s_1}{2} = c\,\frac{2\times 8R'\left(1+\frac{R'}{R}\right)+\pi c\left(1+\frac{2R'}{R}\right)}{2}$$

$$S = c\left[8R'\left(1+\frac{R'}{R}\right)+\pi c\left(\frac{1}{2}+\frac{R'}{R}\right)\right].$$

12 Exercices d'Analyse Comey.

1

(13)

Pomey.

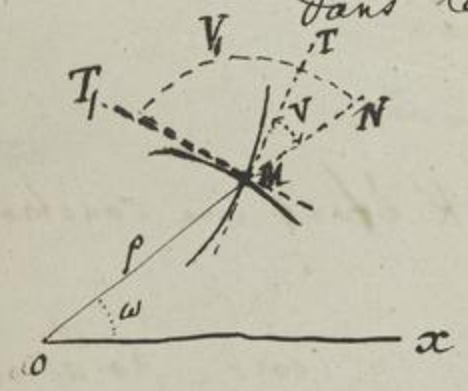
Devoir corrigé par M. Puiseux

Exercices d'Analyse.

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho^2 = a^2 \log \frac{tg\omega}{c},$$

dans laquelle c est un paramètre variable. (Licence 1877).



Considérons un point M de la courbe donnée, soit MT sa tangente qui fait l'angle V avec le prolongement MN du rayon vecteur dans le sens des angles croissants. La trajectoire orthogonale qui passe au point M a pour tangente en M une droite MT_1 qui fait avec MN un angle V_1 égal à $V + \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$tg V_1 = -\frac{1}{tg V}.$$

Or $tg V = \frac{\rho}{\rho'}$: il est aisé de calculer cette quantité ; différentions logarithmiquement l'équation Donnée, il vient

$$2\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\log \frac{tg\omega}{c}} \cdot \frac{1}{\frac{tg\omega}{c}} \cdot \frac{1}{c\cos^2\omega}$$

ou

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\log \frac{tg\omega}{c} \cdot \sin 2\omega}.$$

Éliminant c entre cette équation et l'équation Donnée, on a l'équation différentielle des courbes données

savoir

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{a^2}{\rho^2 \sin 2\omega}.$$

Les trajectoires orthogonales doivent donc satisfaire à la ~~équation~~ ~~différentielle~~ condition

$$tg V_1 = -\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{a^2}{\rho^2 \sin 2\omega}$$

× ρ étant lié à ω par l'équation Donnée.

Remplaçons maintenant ~~par~~ $\operatorname{tg} V$, par sa valeur $\rho \frac{d\omega}{d\rho}$, en supposant qu'ici ρ représente la fonction de ω qui convient à la trajectoire cherchée, et l'équation différentielle de ces trajectoires sera

$$\rho \frac{d\omega}{d\rho} = - \frac{a^2}{\rho^2 \sin 2\omega} .$$

Séparons les variables, il vient

$$\frac{a^2 d\rho}{\rho^3} = - \frac{1}{a^2} \sin 2\omega \, d\omega .$$

L'intégration donne immédiatement

$$- \frac{a^2}{2\rho^2} = \frac{1}{2} \cos 2\omega + \frac{K}{2} \quad , \quad K \text{ étant une constante.}$$

D'où l'équation des trajectoires orthog. en coord. polaires

$$\rho^2 (\cos 2\omega + K) = - a^2 .$$

On les obtient facilement en coord. rectangulaires en posant $x = \rho \cos\omega$, $y = \rho \sin\omega$, $\cos 2\omega = \cos^2\omega - \sin^2\omega$,

ce qui donne $$(x^2+y^2)\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + K\right] = -a^2 ,$$

ou exact $$y^2(1-K) - x^2(1+K) = a^2 .$$

Il faut remarquer aussi qu'il existe une relation simple entre les inverses des cotes des axes.

Ce sont des coniques ayant pour centre le pôle ; des ellipses ou des hyperboles suivant que $1-K^2$ est négatif ou positif. Leurs axes sont dirigés suivant les axes de coordonnées.

On pourrait aussi traiter la question en employant dès le début les coordonnées rectangulaires. Les courbes données ont alors pour équation

$$x^2+y^2 - a^2 \log \frac{y}{cx} = 0 .$$

La condition d'orthogonalité est $\frac{f'_x}{f'_y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$,

f étant le premier membre de l'équation donnée, et $\frac{dy}{dx}$ la dérivée de l'ordonnée de la courbe cherchée.

2/

Il vient ainsi $\frac{y(2x^2+a^2)}{x(2y^2-a^2)}\frac{dy}{dx} = 1$; ~~on, en~~

~~séparant les~~ dans cette équation le paramètre variable C est tout éliminé, c'est donc l'équation différentielle des trajectoires cherchées. Séparons les variables, il vient

$$\frac{4y\,dy}{2y^2-a^2} = \frac{4x\,dx}{2x^2+a^2} ,$$

ou, en intégrant,

$$L(2y^2-a^2) = L(2x^2+a^2) + L\frac{1+K}{1-K} ,$$

en appelant la constante arbitraire $L\frac{1-K}{1-K}$, K étant arbitraire. D'où

$$\frac{2y^2-a^2}{2x^2+a^2} = \frac{1+K}{1-K} ,$$

c.à.d. $$2y^2(1-K) - 2x^2(1+K) = 2a^2 .$$

C'est l'équation obtenue plus haut.

Déterminer les fonctions u et v des deux variables indépendantes x et y dont les différentielles totales vérifient les relations

$$du = (3u+12v)\,dx + (2u+12v)\,dy ,$$
$$dv = (u+2v)\,dx + (u+v)\,dy .$$

On a identiquement

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy ,$$
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy .$$

En comparant ces deux relations aux deux relations données, on déduit les relations suivantes

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3u+12v$,

(2) $\frac{\partial u}{\partial y} = 2u+12v$,

(3) $\frac{\partial v}{\partial x} = u+2v$,

(4) $\frac{\partial v}{\partial y} = u+v$.

Retranchant (1) à (2) membre à membre, il vient

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} - \frac{du}{dy} = u \quad .$$

C'est là une équation aux différences partielles qu'on intégre aisément en résolvant les équations

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{u} \quad ;$$

d'où on tire $dx + dy = 0$ et par suite $x + y = \text{const.} C$.

D'autre part $\frac{dx}{1} = \frac{du}{u}$ donne $x + \mathrm{L}C' = \mathrm{L}u$,

d'où $x = \mathrm{L}\frac{u}{C'}$, et par conséquent $u = C'e^x$

ou $\frac{u}{e^x} = C'$. L'intégrale de l'équation (5) est donc

$\frac{u}{e^x} = \varphi(x+y)$, ou $u = e^x \varphi(x+y)$.

De même en retranchant (3) et (4), on a

$\frac{dv}{dx} - \frac{dv}{dy} = v$, équation qui ~~conduit~~ ne diffère de l'équation (5) qu'en ce que u est remplacé par v , ce qui donne par conséquent $v = e^x \psi(x+y)$.

Nous déterminerons les fonctions φ et ψ en ~~subst~~ écrivant que ces valeurs de u et de v satisfont ~~aux équations~~ ~~(1) et (3) ou, plus simplement encore, aux équations~~ à l'une des équations (1) ou (2), ## et à l'une des équations (3) ou (4). Substituons, par exemple, dans les équat. (2) et (4), en posant auparavant, pour abréger l'écriture, $x+y = \alpha$.

On obtient ~~ai~~ ainsi, en divisant les deux membres de chaque équation par e^x ,

$$(6) \qquad \frac{d\varphi}{d\alpha} = 2\varphi + 12\psi \ ,$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \varphi + \psi \ .$$

Les valeurs des fonctions φ et ψ nous seront données comme les intégrales de ce système d'équations différentielles linéaires simultanées, qui sont sous la forme canonique.

3/

L'intégration d'un pareil système dépend, comme on sait, de la résolution de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-s & 12 \\ 1 & 1-s \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

c.à.d $(2-s)(1-s) - 12 = 0$ ou $s^2 - 3s - 10 = 0$,

équation dont les racines sont -2 et 5. Et par conséquent, l'intégrale générale cherchée est donnée par les formules

$$(7) \qquad \begin{aligned} \varphi &= M e^{5\alpha} + N e^{-2\alpha} \quad , \\ \psi &= M' e^{5\alpha} + N' e^{-2\alpha} \quad , \end{aligned}$$

M, N, M', N' étant des constantes, dont deux M et N par exemple sont complètement arbitraires et les deux autres dépendent de M et N. Pour obtenir les relations qui lient ces constantes, écrivons que les valeurs (7) vérifient identiquement la 1ère des équations (6). On a ainsi

$$5Me^{5\alpha} - 2Ne^{-2\alpha} = 2Me^{5\alpha} + 2Ne^{-2\alpha} + 12M'e^{5\alpha} + 12N'e^{-2\alpha} \quad ;$$

égalons les termes en $e^{5\alpha}$ d'une part et ceux en $e^{-2\alpha}$ d'autre part,

$$5M = 2M + 12M' \quad , \qquad -2N = 2N + 12N' \quad ,$$

d'où $$M' = \frac{1}{4} M \quad , \qquad N' = -\frac{1}{3} N \quad .$$

On a donc $$\varphi = Me^{5\alpha} + Ne^{-2\alpha} \quad , \quad \psi = \frac{1}{4} Me^{5\alpha} - \frac{1}{3} Ne^{-2\alpha} \quad ,$$

et par conséquent enfin

$$u = e^x \left(Me^{5(x+y)} + Ne^{-2(x+y)} \right) = Me^{6x+5y} + Ne^{-x-2y} \quad ,$$

$$v = \frac{1}{4} Me^{6x+5y} - \frac{1}{3} Ne^{-x-2y} \quad .$$

exact

On peut aussi intégrer les équations données sans faire intervenir d'équations aux différences partielles. Résolvons en effet les deux équations données par rapport à dx et dy, on obtient pour dx et dy des expressions linéaires en du et dv, qui sont

~~$dx = \dfrac{(u+v)\,du}{(u-4v)(u+3v)} + \dfrac{(2u+12v)\,dv}{\quad}$~~

(8) $\quad dx = \dfrac{(u+v)\,du - (2u+12v)\,dv}{u^2-uv-12v^2}$, $\quad dy = \dfrac{(3u+12v)\,dv - (u+2v)\,du}{u^2-uv-12v^2}$.

Les équations données permettent de considérer x et y comme fonctions des deux variables indépendantes u et v , et on aura les relations qui lient ces quatre quantités en intégrant les deux dernières équations à ce nouveau point de vue.

Les expressions de dx et dy sont linéaires par rapport à du et dv , et les coefficients de du et dv sont des fonctions rationnelles ~~de~~ de u et v qu'on intégrera au moyen de la décomposition en fractions simples. On a en effet

$$\frac{u+v}{u^2-uv-12v^2} = \frac{u+v}{(u-4v)(u+3v)} = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{u-4v} + \frac{2}{7}\,\frac{1}{u+3v},$$

$$\frac{-(2u+12v)}{u^2-uv-12v^2} = \frac{\frac{1}{6}(u+6v)}{\left(v-\frac{u}{4}\right)\left(v+\frac{u}{3}\right)} = \frac{1}{6}\left[\frac{\frac{30}{7}}{v-\frac{u}{4}} + \frac{\frac{12}{7}}{v+\frac{u}{3}}\right],$$

c.à.d. $\quad \dfrac{-(2u+12v)}{u^2-uv-12v^2} = \dfrac{5}{7}\,\dfrac{1}{v-\frac{u}{4}} + \dfrac{2}{7}\,\dfrac{1}{v+\frac{u}{3}}$, puis

$$\frac{3u+12v}{u^2-uv-12v^2} = \frac{-\frac{1}{4}(u+4v)}{\left(v-\frac{u}{4}\right)\left(v+\frac{u}{3}\right)} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\frac{24}{7}}{v-\frac{u}{4}} + \frac{\frac{4}{7}}{v+\frac{u}{3}}\right],$$

c.à.d. $\quad \dfrac{3u+12v}{u^2-uv-12v^2} = -\dfrac{6}{7}\,\dfrac{1}{v-\frac{u}{4}} - \dfrac{1}{7}\,\dfrac{1}{v+\frac{u}{3}}$., enfin

$$\frac{-(u+2v)}{u^2-uv-12v^2} = \frac{-(u+2v)}{(u-4v)(u+3v)} = -\frac{6}{7}\,\frac{1}{u-4v} - \frac{1}{7}\,\frac{1}{u+3v}.$$

D'après cela, les quantités u et v devant être considérées comme des variables indépendantes l'une de l'autre, les intégrales des deux termes qui composent ~~=~~ l'expression de dx ~~sont~~ s'obtiendront en traitant successivement v comme constant dans le premier terme, u comme constant dans le second ; ces intégrales seront donc en vertu des formules qu'on vient d'écrire

Mais d'après les formules obtenues, on a

$$dx = \frac{5}{7}\,\frac{d(u-4v)}{u-4v} + \frac{2}{7}\,\frac{d(u+3v)}{u+3v}, \quad dy = -$$

Cela me paraît inexact. Car ayant $du = P\,dx + Q\,dy$ on n'a pas pour cela $u = \int P\,dx + \int Q\,dy$ (y constant, x constant). Par exemple on a $d(xy) = y\,dx + x\,dy$ et on n'a pas $xy = \int y\,dx + \int x\,dy$ (y constant, x constant) $= xy + xy$.

$$\frac{5}{7} L(u-4v) + \frac{2}{7} L(u+3v) = \frac{1}{7} L(u-4v)^5 (u+3v)^2 .$$

On aura donc ~~7=0~~, en intégrant l'équation (8),

$$x = \frac{1}{7}\left[L(u-4v)^5 (u+3v)^2 + LA \right] ,$$ A étant une constante,

d'où (9) $$(u-4v)^5 (u+3v)^2 = Ae^{7x} .$$

On aura de même à l'égard de y, par la seconde équation (8),

(10) $$(u-4v)^6 (u+3v) = Be^{-7y} ,$$

B étant une nouvelle constante arbitraire.

Il est aisé de tirer u et v des équations (9) et (10).

~~Posons $u-4v=z$, $u+3v=t$, élevons (10) au carré et divisons par (9), on a $7v$~~

Elevons (10) au carré et divisons par (9), il vient

$$(u-4v)^7 = \frac{B^2}{A}\left(e^{-7y}\right)^2 . e^{-7x} .$$

Elevons ~~des~~ deux membres de cette équation à la puissance $\frac{1}{7}$,

(11) $$u-4v = \left(\frac{B^2}{A}\right)^{\frac{1}{7}} e^{-x-2y} = Ce^{-x-2y} ,$$

C étant la constante $\left(\frac{B^2}{A}\right)^{\frac{1}{7}}$.

On a alors, au moyen de (10),

$$u+3v = Be^{-7y}(u-4v)^{-6} = Be^{-7y} C^{-6} e^{6x+12y} , \text{ ou}$$

(12) ~~ou~~ $$u+3v = De^{6x+5y}$$

D étant la constante BC^{-6} ou $B.\left(\frac{B^2}{A}\right)^{-\frac{6}{7}}$,

ces deux nouvelles constantes C et D sont complétement arbitraires et indépendantes, tout comme les premières A et B.

Des deux équations (11) et (12) on tire enfin

$$u = 3Ce^{-x-2y} + 4De^{6x+5y} ,$$

$$v = -Ce^{-x-2y} + De^{6x+5y} ,$$

solution identique à celle que nous avons obtenue par la méthode précédente, puisque les coeffic. 3C et 4D de la 1ère équation sont arbitraires comme M et N, et ceux de la seconde sont $-\frac{1}{3}$ et $+\frac{1}{4}$ des précédents comme plus haut.

2ème Solution

Résoudre

(1) $\frac{du}{dx} = (3u+12v)\,dx + (2u+12v)\,dy$

(2) $dv = (u+2v)\,dx + (u+v)\,dy$.

(3) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3u+12v$ (5) $\frac{\partial u}{\partial y} = 2u+12v$

(4) $\frac{\partial v}{\partial x} = u+2v$ (6) $\frac{\partial v}{\partial y} = u+v$

Les 2 équat (5) et (6) définissant u et v en fant que fonctions de y, c.à.d. si l'on considd pour un moment u et v comme fonctions de y seulement

$$\begin{vmatrix} 2-s & 12 \\ 1 & 1-s \end{vmatrix} = (2-s)(1-s) - 12 = s^2 - 3s - 10 = 0\,, \quad s = \begin{matrix} 2 \\ +5 \end{matrix}$$

d'où $u = Ae^{-2y} + Be^{+5y}$, $v = A_1 e^{-2y} + B_1 e^{5y}$

Détermn A_1 et B_1 en fonct de A et B en substt chaque solut part dans (5) et (6)

$-2Ae^{-2y} + B = 2Ae^{-2y} + 12A_1 e^{-2y}$ ou $-4A = 12A_1$, $A_1 = -\frac{2A}{3}$

$5B = 2B + 12B_1$, $3B = 12B_1$ ou $B_1 = \frac{1}{4}B$

$u = Ae^{-2y} + Be^{5y}$, $v = -\frac{A}{3}e^{-2y} + \frac{1}{4}Be^{5y}$.

Considd A et B comme fonct de x, de façon que u et v puissent satisfaire à (3) et (4). Ecriv. ces condns

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dA}{dx}e^{-2y} + \frac{dB}{dx}e^{5y} = 3Ae^{-2y} + 3Be^{5y} - 4Ae^{-2y} + 3Be^{5y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{dA}{dx}\frac{e^{-2y}}{3} + \frac{1}{4}\frac{dB}{dx}e^{5y} = Ae^{-2y} + Be^{5y} - 2\frac{A}{3}e^{-2y} + \frac{1}{2}Be^{5y}$$

ou $e^{-2y}\frac{dA}{dx} + e^{5y}\frac{dB}{dx} = -Ae^{-2y} + 6Be^{5y}$

$$-\frac{1}{3}e^{-2y}\frac{dA}{dx} + \frac{1}{4}e^{5y}\frac{dB}{dx} = \frac{1}{3}Ae^{-2y} + \frac{3}{2}Be^{5y}$$

Elimin $\frac{dB}{dx}$, en mult la 1ère par $-\frac{1}{4}$ et ajout

$-\frac{7}{12}e^{-2y}\frac{dA}{dx} = \frac{7}{12}Ae^{-2y}$, ou $-\frac{dA}{dx} = A$, $\frac{dA}{A} = -dx$, $A = Ce^{-x}$

" Elimin $\frac{dA}{dx}$ en multipl la 1re par $\frac{1}{3}$ et ajoutant :

$$\frac{7}{12} e^{5y} \frac{dB}{dx} = \frac{7}{2} B e^{5y}, \qquad \frac{dB}{B} = 6\,dx, \qquad B = De^{6x};$$

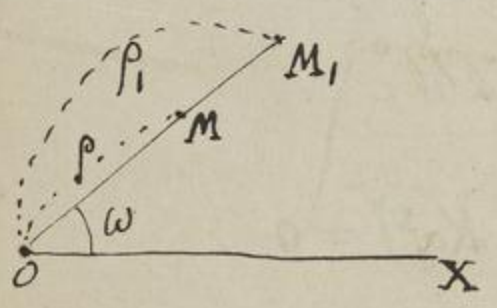
Donc $u = Ae^{-2y} + Be^{5y} = Ce^{-x-2y} + De^{6x+5y}$

$$v = -\frac{1}{3} Ce^{-x-2y} + \frac{1}{4} De^{6x+5y}.$$

Exercices d'Analyse.

Devoir corrigé par Mr Puiseux

Déterminer une courbe C(Γ), telle que si l'on construit une de ses transformées C' par rayons vecteurs réciproques relativement à un pôle donné O, les rayons de courbure en deux points correspondants des deux courbes soient dans un rapport donné.



Supposons ces courbes rapportées à un axe polaire OX, O étant le pôle. Soient M et M_1 deux points correspondants, dont les coordonnées sont ω et ρ pour le premier, ω et ρ_1 pour le second. D'après le mode de correspondance des deux points, on a (1) $\rho\rho_1 = a^2$, a étant une constante.

Soient d'autre part R et R_1 les rayons de courbure en M et M_1, et K leur rapport, qui par hypothèse est constant ; on doit avoir (2) $R = K R_1$.

Or on a les formules connues

$$R = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}, \qquad R_1 = \frac{(\rho_1^2+\rho_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1^2+2\rho_1'^2-\rho_1\rho_1''}.$$

Calculons ρ_1 et ses dérivées en fonction de ρ et de ses dérivées.

On a successivement, d'après (1),

$$\rho_1 = \frac{a^2}{\rho}, \quad \rho_1' = -\frac{a^2}{\rho^2}\rho', \quad \rho_1'' = -a^2\cdot\frac{\rho''\rho-2\rho'^2}{\rho^3},$$

d'où
$$R_1 = \frac{\left[\frac{a^4}{\rho^2}+\frac{a^4}{\rho^4}\rho'^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{a^4}{\rho^2}+2\frac{a^4}{\rho^4}\rho'^2+\frac{a^4}{\rho}\frac{\rho''\rho-2\rho'^2}{\rho^3}} = \frac{a^6\,\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^6}}{a^4\,\frac{(\rho+\rho'')}{\rho^3}}$$

c.à.d.
$$R_1 = \frac{a^2}{\rho^3}\cdot\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho+\rho''}.$$

Portant les valeurs de R et R_1 dans (2), il vient

$$\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''} = K\frac{a^2}{\rho^3}\cdot\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho+\rho''},$$

ou, après simplifications,

$$(3)\qquad \rho\left(\rho^2+Ka^2\right)\rho''-2Ka^2\rho'^2+\rho^2\left(\rho^2-Ka^2\right)=0\ .$$

Cette équation différentielle est du second ordre et ne contient pas la variable indépendante ω ; on peut donc l'abaisser au premier, en posant $\rho'=\frac{d\rho}{d\omega}=v$, d'où

$$\rho''=\frac{d^2\rho}{d\omega^2}=\frac{dv}{d\omega}=\frac{v\,dv}{d\rho}\ .$$

L'équation devient alors

$$\rho\left(\rho^2+Ka^2\right)v\frac{dv}{d\rho}-2Ka^2v^2+\rho^2\left(\rho^2-Ka^2\right)=0\ .$$

On peut rendre cette équation linéaire en posant $v^2=u$, d'où $2v\frac{dv}{d\rho}=\frac{du}{d\rho}$, et par suite

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\rho\left(\rho^2+Ka^2\right)\frac{du}{d\rho}-2Ka^2u+\rho^2\left(\rho^2-Ka^2\right)=0\ ,$$

équation qu'on pouvait obtenir immédiatement par l'unique substitution $\rho'^2=u$, au lieu de poser successivement $\rho'=v$ et $v^2=u$.

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{du}{d\rho}-\frac{4Ka^2}{\rho\left(\rho^2+Ka^2\right)}u+\frac{2\rho\left(\rho^2-Ka^2\right)}{\rho^2+Ka^2}=0\ .$$

En posant $X=-\frac{4Ka^2}{\rho\left(\rho^2+Ka^2\right)}$, $X_1=\frac{2\rho\left(\rho^2-Ka^2\right)}{\rho^2+Ka^2}$,

l'intégrale générale de cette équation est, comme on sait,

$$u=e^{-\int_{\rho_0}^{\rho}X\,d\rho}\left[C-\int_{\rho_0}^{\rho}e^{\int_{\rho_0}^{\rho}X\,d\rho}\,X_1\,d\rho\right].$$

Or on a $\frac{1}{\rho\left(\rho^2+Ka^2\right)}=\frac{1}{Ka^2}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{\rho}{\rho^2+Ka^2}\right]$.

Par conséquent, ~~en faisant arbitrairement ρ_0, on a~~ en prenant l'intégrale indéfinie de $X\,d\rho$, on a

$$L\ \frac{\rho^4}{\left(\rho^2+Ka^2\right)^2}\ ,$$

et la valeur de u devient

$$u=\frac{\rho^4}{\left(\rho^2+Ka^2\right)^2}\left[C-\int 2\,\frac{\rho^4-K^2a^4}{\rho^3}\,d\rho\right]$$

ou enfin $$u = \frac{\rho^4}{(\rho^2+Ka^2)^2}\left[C_1 - \rho^2 - \frac{K^2a^4}{\rho^2}\right].$$

Revenons à la variable ω ; on a posé $\frac{d\rho}{d\omega} = \sqrt{u}$,

d'où (~~5~~) $$d\omega = \frac{d\rho}{\sqrt{u}} = \frac{(\rho^2+Ka^2)\,d\rho}{\rho^2\sqrt{C-\rho^2-\frac{K^2a^4}{\rho^2}}}$$,

ou (5) $$d\omega = \frac{(\rho^2+Ka^2)\,d\rho}{\rho\sqrt{C\rho^2-\rho^4-K^2a^4}} = \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{C\rho^2-\rho^4-K^2a^4}} + \frac{Ka^2\,d\rho}{\rho\sqrt{C\rho^2-\rho^4-K^2a^4}}.$$

Intégrons séparément chacun des 2 termes du second membre.

On a $$\int \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{C\rho^2-\rho^4-K^2a^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\rho^2)}{\sqrt{-(\rho^2)^2+C\rho^2-K^2a^4}} = \frac{1}{2}\arccos\frac{-\rho^2+\frac{C}{2}}{\sqrt{\frac{C^2}{4}-K^2a^4}} = \frac{1}{2}\arccos\frac{-2\rho^2+C}{\sqrt{C^2-4K^2a^4}}$$,

$$\int \frac{Ka^2\,d\rho}{\rho\sqrt{-K^2a^4+C\rho^2-\rho^4}} = \int Ka^2\frac{\rho^{-3}\,d\rho}{\sqrt{-K^2a^4(\rho^{-2})^2+C\rho^{-2}-1}} = -\frac{1}{2}\int Ka^2\cdot\frac{d(\rho^{-2})}{\sqrt{\quad}} = -\frac{1}{2}\arccos\frac{-2K^2a^4+C\rho^2}{\rho^2\sqrt{C^2-4K^2a^4}}$$

Posons, pour abréger, $Ka^2 = \mu$, et intégrons (5) ; il vient

$$2(\omega-\omega_0) = \arccos\frac{-2\rho^2+C}{\sqrt{C^2-4\mu^2}} - \arccos\frac{-2\mu^2+C\rho^2}{\rho^2\sqrt{C^2-4\mu^2}}.$$

Pour transformer cette équation, nous allons poser

$$\frac{-2\rho^2+C}{\sqrt{C^2-4\mu^2}} = x\ ,\quad \frac{-2\mu^2+C\rho^2}{\rho^2\sqrt{C^2-4\mu^2}} = y\ ,\quad \arccos x = \alpha,\ \arccos y = \beta.$$

On a alors $$2(\omega-\omega_0) = \alpha-\beta\ ,$$

d'où, en prenant les cosinus des deux membres

$$\cos 2(\omega-\omega_0) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Formons $1-x^2$ et $1-y^2$. On a

$$1-x^2 = 1-\frac{(-2\rho^2+C)^2}{C^2-4\mu^2} = \frac{C^2-4\mu^2-4\rho^4+4C\rho^2-C^2}{C^2-4\mu^2} = \frac{4(-\rho^4+C\rho^2-\mu^2)}{C^2-4\mu^2}$$

$$1-y^2 = 1-\frac{(-2\mu^2+C\rho^2)^2}{\rho^4(C^2-4\mu^2)} = \frac{C^2\rho^4-4\mu^2\rho^4-4\mu^4+4C\rho^2\mu^2-C^2\rho^4}{\rho^4(C^2-4\mu^2)} = \frac{4\mu^2(-\rho^4+C\rho^2-\mu^2)}{\rho^4(C^2-4\mu^2)}$$

Par conséquent, on a

$$\cos 2(\omega-\omega_0) = \frac{(-2\rho^2+C)(-2\mu^2+C\rho^2)+4\mu(-\rho^4+C\rho^2-\mu^2)}{\rho^2(C^2-4\mu^2)}$$

$$= \frac{4\mu^2\rho^2-2C\mu^2-2C\rho^4+C^2\rho^2-4\mu\rho^4+4C\mu\rho^2-4\mu^3}{\rho^2(C^2-4\mu^2)}$$

$$= \frac{-2(C+2\mu)\rho^4+(4\mu^2+C^2+4C\mu)\rho^2-2\mu^2(C+2\mu)}{\rho^2(C^2-4\mu^2)}$$

enfin $$\cos 2(\omega-\omega_0) = \frac{-2\rho^4+(C+2\mu)\rho^2-2\mu^2}{\rho^2(C^2-4\mu)}.$$

Pour reconnaître la nature de cette courbe, on peut supposer $\omega_0 = 0$, ce qui est permis puisqu'on peut donner à l'axe polaire telle direction que l'on veut. On a alors

$$\cos 2\omega = \frac{-2\rho^4 + (C+2\mu)\rho^2 - 2\mu^2}{\rho^2(C-2\mu)}.$$

Mais, en remplaçant $\cos 2\omega$ par $1 - 2\sin^2\omega$, il vient

$$2\sin^2\omega = 1 - \cos 2\omega = \frac{(C-2\mu)\rho^2 + 2\rho^4 - (C+2\mu)\rho^2 + 2\mu^2}{\rho^2(C-2\mu)},$$

ou $$\rho^2(C-2\mu)\sin^2\omega = (\rho^4 - 4\mu\rho^2 + \mu^2) = (\rho^2-\mu)^2,$$

d'où (6) $$(\rho^2-\mu)^2 - (C-2\mu)\rho^2\sin^2\omega = 0$$

ou $$\left[\rho^2 - \mu + \sqrt{C-2\mu}\ \rho\sin\omega\right]\left[\rho^2 - \mu - \sqrt{C-2\mu}\ \rho\sin\omega\right] = 0,$$

équation qui se décompose dans les deux suivantes

$$\rho^2 + \sqrt{C-2\mu}\ \rho\sin\omega - \mu = 0 \quad \text{et} \quad \rho^2 - \sqrt{C-2\mu}\ \rho\sin\omega - \mu = 0.$$

Ces équations représentent deux cercles, qui sont en coordonnées rectangulaires $x^2+y^2+\sqrt{C-2\mu}\ y - \mu = 0$ et $x^2+y^2-\sqrt{C-2\mu}\ y - \mu = 0$.

Par conséquent la courbe demandée se compose de deux circonférences. ~~Mais [illegible]~~ d'ailleurs écrire les deux équations sous les formes suivantes

$$x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{C-2\mu}}{2}\right)^2 = \mu + \frac{C-2\mu}{4}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{C-2\mu}}{2}\right)^2 = \mu + \frac{C-2\mu}{4},$$

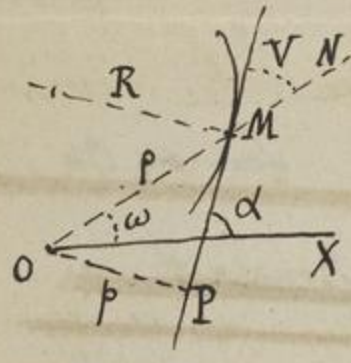
ce qui montre que les deux circonférences sont égales et symétriquement placées par rapport au point O. On pouvait s'attendre à ce résultat puisque l'équation (3), qui est l'équation du problème, ne change pas quand ω change de signe, ~~ω restant le même~~.

ω restant d'ailleurs le même. L'une des parties de la courbe cherchée devait donc être symétrique de l'autre par rapport au pôle, et l'on s'explique ainsi qu'on ait obtenu deux cercles symétriques.

On peut donc dire en résumé que la courbe C est un cercle, dont le rayon est du reste quelconque, comme égal à $\mu + \frac{c-2\mu}{4}$, c.à.d. à $\frac{c+2\mu}{4}$, expression dans laquelle c est une constante arbitraire.

Et il résulte de là que la courbe C' est un cercle, puisque la transformée d'un cercle est un cercle.

La question se trouve ainsi traitée sans aucun artifice par la méthode la plus simple et la plus naturelle. Mais cette méthode même exige quelques calculs un peu longs et l'on peut obtenir une solution plus rapide. A cet effet, remarquons que le rayon de courbure R au point ω, ρ



a pour expression $R = \frac{\rho . d\rho}{dp}$, ρ étant la distance du pôle à la tangente. On a en effet

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\omega + dV},$$

en appelant α l'angle de la tangente avec l'axe polaire OX, et V l'angle formé par la tangente MT avec le prolongement MN du rayon vecteur, dans le sens des angles croissants. Mais on a

$$\cos V = \frac{dp}{ds}, \quad \sin V = \frac{\rho\, d\omega}{ds},$$

d'où en éliminant ds et dω,

$$R = \frac{dp}{\cos V\,(d\omega + dV)} = \frac{dp}{\cos V\left(\frac{dp \sin V}{\rho \cos V} + dV\right)} = \frac{\rho\, dp}{dp \sin V + \rho \cos V\, dV}$$

c.à.d. $$R = \frac{\rho\, dp}{d.(\rho \sin V)} = \frac{\rho\, dp}{dp}.$$

Soient ω et ρ_1 les coord. du point M_1 transformé du point M et R_1 le rayon de courbure en ce point. On a $\rho\rho_1 = a^2$ et $R = KR_1$.

L'équation $R = KR_1$ donne la condition

$$(1) \qquad \frac{\rho\, d\rho}{d(\rho \sin V)} = \frac{K \rho_1 \, d\rho_1}{d(\rho_1 \sin V_1)} ,$$

en remarquant que l'angle V_1 relatif au point M_1 est supplémentaire de l'angle en V d'après une propriété bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques,

Mais l'équation $\rho\rho_1 = a^2$ donne $\rho_1 = \frac{a^2}{\rho}$,

$d\rho_1 = -\frac{a^2}{\rho^2} d\rho$, et l'équation (1) devient alors

$$\frac{\rho\, d\rho}{d(\rho \sin V)} = \frac{-K a^4 \, d\rho}{\rho^3 \, d.(\frac{a^2}{\rho} \sin V)} .$$

D'où l'on tire, en développant les différentielles,

$$\frac{d.\sin V}{\sin V} = \frac{\rho^2 - Ka^2}{\rho(\rho^2 + Ka^2)} d\rho = -\frac{d\rho}{\rho} + \frac{2\rho\, d\rho}{\rho^2 + Ka^2} ,$$

d'où, par intégration,

$$L \sin V = -L\rho + L(\rho^2 + Ka^2) - \frac{LA}{} ,$$

A étant une constante arbitraire

ou (2) $$\sin V = \frac{\rho^2 + Ka^2}{A\rho} .$$

Posons comme précédemment $Ka^2 = \mu$. On aura $\sin V = \frac{\rho^2 + \mu}{A\rho}$. Ici, on pourrait égaler cette valeur de $\sin V$ à celle qu'on a écrite plus haut, savoir $\frac{\rho\, dw}{ds}$ ou $\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{dw^2}}}$.

On aurait ainsi l'équation différentielle de la courbe en ρ et w ; mais on retombe alors sur l'équation (5) de la première méthode (en faisant $A = \sqrt{C + 2\mu}$), et par suite sur les mêmes calculs. On voit que, par là, on a obtenu cette équation (5) d'une façon plus rapide.

Mais on peut achever la solution par une autre voie qui conduit encore plus vite au résultat.

On a en effet (3) $\operatorname{tg} V = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}$. Eliminons ρ entre cette équation et (2) $\sin V = \frac{\rho^2+\mu}{A\rho}$.

Cette dernière donne $\rho^2 - A\sin V\cdot\rho + \mu = 0$, d'où

$$\rho = \frac{A\sin V \pm \sqrt{A^2\sin^2 V - 4\mu^2}}{2} \quad ,$$

et par suite

$$d\rho = \frac{A\cos V}{2}\left[1 \pm \frac{A\sin V}{\sqrt{A^2\sin^2 V - 4\mu^2}}\right] dV \, .$$

En portant ces valeurs de ρ et $d\rho$ dans (3), on a

$$d\omega = \frac{A\sin V\, dV}{\sqrt{A^2\sin^2 V - 4\mu}} = \frac{-A\, d(\cos V)}{\sqrt{A^2-4\mu - A^2\cos^2 V}} \, .$$

L'intégrale est, en supposant nulle la constante ω_0 ,

$$\omega = \operatorname{arc\,cos} \frac{A\cos V}{\sqrt{A^2-4\mu}} \, .$$

La courbe cherchée est donc représentée par les deux formules $A\sin V = \frac{\rho^2+\mu}{\rho}$ et $A\cos V = \sqrt{A^2-4\mu}\cos\omega$ qui donnent ρ et ω en fonction du paramètre V. On peut du reste éliminer aisément ce dernier, en élevant au carré ces deux équations et les ajoutant membre à membre, ce qui donne

$$A^2 = \frac{(\rho^2+\mu)^2}{\rho^2} + (A^2-4\mu)\cos^2\omega$$

ou

$$(\rho^2+\mu)^2 - A^2\rho^2 + (A^2-4\mu)\rho^2\cos^2\omega = 0$$

ou

$$(\rho^2+\mu)^2 - A^2\rho^2 + (A^2-4\mu)\rho^2 - (A^2-4\mu)\rho^2\sin^2\omega = 0 \, ,$$

c.à.d.

$$(\rho^2-\mu)^2 - (A^2-4\mu)\rho^2\sin^2\omega = 0$$

ou, en posant $A^2 = c+2\mu$,

$$(\rho^2-\mu)^2 - (c-2\mu)\rho^2\sin^2\omega = 0 \, .$$

C'est précisément l'équation (6) qu'on a trouvée dans la méthode précédente.

Enfin on peut traiter la question par la géométrie de la manière suivante.

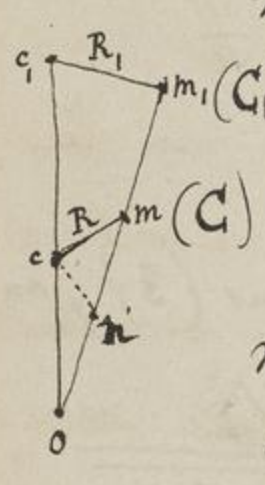
Voir la Note ci jointe

On pourrait résoudre la question comme il suit:

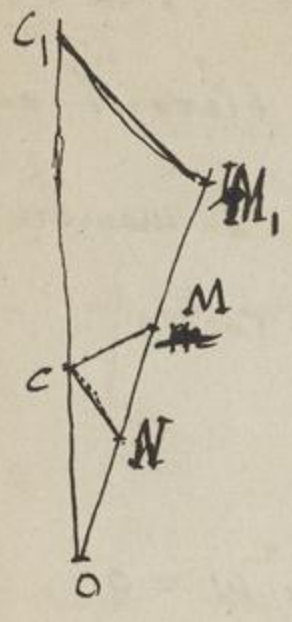
On sait qu'un cercle a pour transformée un autre cercle. L'équation générale d'un cercle contient 3 constantes arbitraires; la condition que le rayon de ce cercle et celui de sa transformée aient un rapport donné réduit le nombre des arbitraires à deux. Or le problème proposé conduit évidemment à une équation différentielle du second ordre; l'équation du cercle satisfaisant au problème et renfermant deux constantes arbitraires est donc la solution générale de la question.

On remarque tout d'abord qu'on peut prendre pour la courbe C un cercle, puisque la transformée d'un cercle est un cercle : ces deux courbes ont bien leurs rayons de courbure dans un rapport constant. Nous allons montrer que cette solution est la seule.

Soient en effet deux courbes C et C_1 répondant à la question m et m_1 deux points correspondants, c et c_1 les centres des cercles osculateurs en ces points, R et R_1 leurs rayons.



~~D'après~~ La condition donnée est $R = KR_1$, K étant le rapport constant donné. D'après la définition des points m et m_1, on a d'ailleurs $om \cdot om_1 = a^2$. Mais ~~on sait~~ d'autre part ~~que~~ les deux cercles osculateurs sont transformés l'un de l'autre par rayons vecteurs réciproques, puisque le cercle osculateur en m est déterminé par trois points infiniment voisins pris sur la courbe C, et que la transformée du cercle qui passe par ces trois points est le cercle qui passe par les trois points transformés, c.à.d. par trois points infiniment voisins de C_1, ce qui fait coïncider le cercle transformé avec le cercle osculateur en m_1. On admet ici que la transformée d'un cercle est un cercle, ce qui est aisé à démontrer, en observant que l'on a



$oM \cdot oM_1 = A^2$, puis, en prenant le second point N d'intersection du rayon vecteur om avec le cercle c, on a $oM \cdot oN = P$, P étant une constante qui désigne la puissance du point o par rapport à ce cercle. On en déduit par division $\frac{oM_1}{oN} = \frac{A^2}{P}$; prenons alors sur oc le point c_1, tel que $\frac{oc_1}{oc} = \frac{A^2}{P}$. On a

$$\frac{oM_1}{oN} = \frac{oc_1}{oc} = \frac{c_1M_1}{c_1N} = \frac{A^2}{P},$$

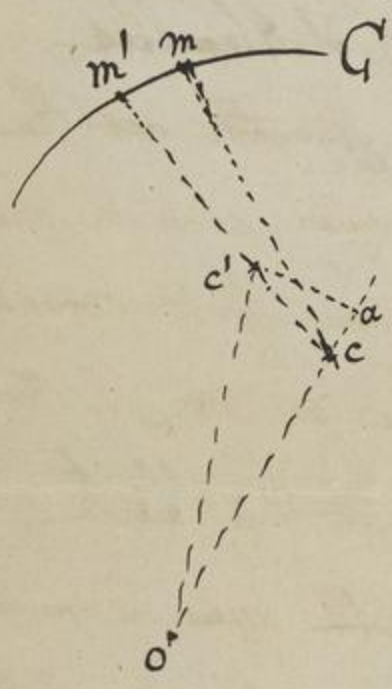
et comme c_1N est constant, il en est de même de c_1M_1. Le point M_1 est donc sur un cercle de rayon c_1M_1. — Et l'on remarque que cN est parallèle à c_1M_1. — Cela posé, revenons à notre question. Soit n le second point d'intersection du cercle c avec la sécante om. Le point c_1, d'après ce qu'on ~~vient de voir, s'obtient~~ en prenant $oc_1 = oc \cdot \frac{a^2}{(om.on)}$.

3/

D'après ce qu'on vient de voir, puisque les deux cercles osculateurs sont transformés l'un de l'autre, la droite cn est parallèle à $c_1 m_1$, et l'on a (par les triangles semblables) $\frac{c_1 m_1}{cn} = \frac{om_1}{on}$

$$\frac{om_1}{on} = \frac{c_1 m_1}{cn} = \frac{R_1}{R} = \frac{1}{K}.$$ Divisant membre à membre les deux relations $om \cdot om_1 = a^2$, $\frac{om_1}{on} = \frac{1}{K}$,

il vient $om \cdot on = a^2 K$. Ce qui montre que la puissance du point o par rapport aux cercles osculateurs c de la courbe C est constante. Il en résulte qu'il y a contradiction à supposer que la courbe C possède cette propriété sans être elle-même un cercle.



Soient en effet m et m' deux points infiniment voisins pris sur cette courbe C, c et c' les centres de courbure relatifs à ces deux points; puisque nous supposons que C n'est pas un cercle, ces deux points ne peuvent pas constamment se confondre. La puissance d'un point par rapport à un cercle peut s'exprimer par la quantité $\delta^2 - R^2$, δ étant la distance du point au centre du cercle, et R le rayon de celui-ci. Les puissances du point o par rapport aux deux cercles osculateurs en m et m' devant être égales, on aura donc

$$\overline{oc'}^2 - \overline{m'c'}^2 = \overline{oc}^2 - \overline{mc}^2.$$

m'c' ? D'ailleurs on peut remplacer m'c' par mc' au second ordre près, puisque m et m' appartiennent au cercle osculateur de centre c'. On a en outre

$$oc' = oc + d.oc, \qquad m'c' = mc' = mc + d.mc.$$

En substituant dans la relation précédente, ~~on trouve~~ et négligeant les infiniment petits du second ordre, on trouve

$$oc \cdot d.(oc) = +mc \cdot d.(mc).$$

Abaissons la perpendiculaire c'a sur oc, ~~ba~~ la relation précédente devient $oc \cdot ca = +mc \cdot cc'$.

d'où $\frac{mc}{oc} = -\frac{ca}{cc'} = -\cos \widehat{acc'} = \cos \widehat{ocm}$.

Il faut donc que oc se projette suivant mc, et que le point o se projette en m ; mais mc étant la normale en m, om est la tangente. Il en résulterait donc que toutes les tangentes à la courbe C iraient passer par le point fixe o, ce qui est absurde.

Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt} + x f'(t) - y \varphi'(t) = 0 ,$$

$$\frac{dy}{dt} + x \varphi'(t) + y f'(t) = 0 .$$

Employons la méthode générale due à d'Alembert qui consiste à faire une substitution linéaire

$$\xi = mx + ny$$

$$\eta = m'x + n'y ,$$

où m, n, m', n' sont des fonctions de la variable t.

On en tire

$$\frac{d\xi}{dt} = x \frac{dm}{dt} + y \frac{dn}{dt} + m \frac{dx}{dt} + n \frac{dy}{dt} ,$$

$$= x \frac{dm}{dt} + y \frac{dn}{dt} + m\left[-x f'(t) + y \varphi'(t)\right] + n\left[-x \varphi'(t) - y f'(t)\right] ,$$

$$(1) \qquad \frac{d\xi}{dt} = x\left(\frac{dm}{dt} - f'(t).m - \varphi'(t) n\right) + \left(\frac{dn}{dt} + \varphi'(t) m - f'(t) n\right) y .$$

On peut déterminer m et n en fonction de t de façon que cette équation prenne la forme $\frac{d\xi}{dt} = s\xi$,

s étant une fonction de t convenablement choisie.

Il suffira pour cela, d'identifier l'expression de $s\xi$, savoir $s(mx+ny)$ avec le second membre de (1), ce qui donne les deux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dm}{dt} - f'(t).m - \varphi'(t).n = sm , \\ \frac{dn}{dt} + \varphi'(t).m - f'(t).n = sn . \end{cases}$$

On voit que, d'une manière générale, dans cette méthode, on a un nombre d'équations telles que (2) inférieur d'une unité au nombre des inconnues m, n, s à déterminer. On peut donc prendre arbitrairement l'une des ~~ces~~ quantités $\frac{m,n}{i}$ d'habitude on suppose l'un des coefficients $m, n, \ldots$ ~~égalons~~ à l'unité; soit $m = 1$. On voit alors que la première des équations (2) se réduit à (3) $- f'(t) - \varphi'(t) n = s$,

et, en vertu de cette dernière, la seconde devient

$$\frac{dn}{dt} + \varphi'(t) = -\varphi'(t) n^2 ,$$

ou (4) $$\frac{dn}{dt} = -\varphi'(t)(1+n^2) .$$

Pour abréger l'écriture dans ce qui suit, nous écrirons simplement φ, φ', f, f' au lieu de $\varphi(t), \varphi'(t), f(t), f'(t)$. ~~D~~ L'équation (4) peut s'écrire $$\frac{dn}{1+n^2} = -\varphi' dt$$ et donne immédiatement

$$\text{arc tg } n = -\varphi + C , \quad \text{c.à.d.} \quad n = \text{tg}(c-\varphi) ,$$ où l'on doit attribuer à la ~~constante~~ c une valeur déterminée afin de préciser la fonction n de t.

Il en résulte, d'après (3),

$$s = -f'(t) - \text{tg}(c-\varphi)\varphi' .$$

alors l'équation $\frac{d\xi}{dt} = s\xi$ devient

$$\frac{d\xi}{\xi} = \left[-f'(t) - \text{tg}(c-\varphi)\varphi'\right] dt ,$$

ou, en intégrant,

$$L\xi = -f - L\cos(c-\varphi) + LA ,$$ A étant une constante arbitraire.

ou $$\xi = \frac{A}{\cos(c-\varphi)} e^{-f} .$$

Pour calculer η, on serait évidemment conduit au même système (2) ~~par la~~ où n serait remplacé par n' qu'on ferait encore égal à 1, et où n serait remplacé par n'. ~~Pour avoir une valeur de ξ différente de η, il suffira d'attribuer à la constante c dans les~~

et par suite on aura $\eta = \frac{B}{\cos(c-\varphi)} e^{-f}$, B étant une constante arbitraire.

Mais il faut que les valeurs de ξ et η soient distinctes, puisqu'on a substitué deux variables ξ et η aux deux variables x et y et que celles-ci sont distinctes. Pour qu'il en soit ainsi, on voit qu'il suffit d'attribuer à la constante indéterminée c deux valeurs particulières différentes dans les valeurs de ξ et η, par exemple la valeur 0 dans ξ et $\frac{\pi}{2}$ dans η. Il vient alors

$$\xi = \frac{A e^{-f}}{\cos\varphi} = x - y \operatorname{tg}\varphi$$

$$\eta = \frac{B e^{-f}}{\sin\varphi} = x - y \operatorname{cotg}\varphi .$$

De ces deux équations on tire immédiatement

$$x = e^{-f}(A\cos\varphi + B\sin\varphi)$$

$$y = e^{-f}(A\sin\varphi - B\cos\varphi) ,$$

ou, en posant $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\alpha$, α étant une const. arbitraire,

$$x = \frac{A}{\cos\alpha} e^{-f} \cos(\alpha-\varphi)$$

$$y = \frac{A}{\cos\alpha} e^{-f} \sin(\alpha-\varphi) ,$$

c.à.d. enfin $x = Me^{-f}\cos(\alpha-\varphi)$, $y = Me^{-f}\sin(\alpha-\varphi)$,

Etant

les deux constantes arbitraires sont M et α.

Remarque. — On peut, au lieu d'appliquer la méthode générale, profiter de la forme du système pour le simplifier en séparant les variables.

En effet, on peut éliminer successivement φ' et f' en ajoutant d'abord les deux équations multipliées respectivement par x et y, puis en les ajoutant après les avoir multipliées par $-y$ et x, ce qui donne les équations

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + (x^2+y^2) f'(t) = 0$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} + (x^2+y^2) \varphi'(t) = 0 \ ,$$

c.à.d., en séparant les variables,

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = -\, f'(t)\,dt \ ,$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = -\, \varphi'(t)\,dt \ .$$

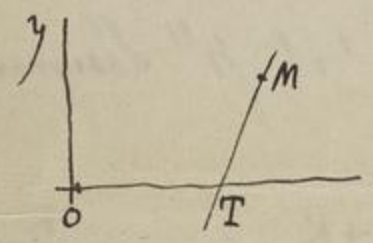
Les intégrales sont évidemment

$$\sqrt{x^2+y^2} = A\,e^{-f(t)} \ , \quad \frac{y}{x} = tg(\alpha-\varphi) \ ,$$

d'où l'on tire successivement $y = x\,tg(\alpha-\varphi)$,

$$x\sqrt{1+tg^2(\alpha-\varphi)} = A\,e^{-f(t)} \ , \quad x = A\cos(\alpha-\varphi)\,e^{-f(t)} \ ,$$

$$y = A\sin(\alpha-\varphi)\,e^{-f(t)} \ .$$



Trouver une courbe telle que la tangente MT soit dans un rapport constant avec le segment OT intercepté par cette même tangente sur l'axe des x.

Soient x et y les coordonnées du point M, K le rapport constant donné et enfin p le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la tangente, on trouve immédiatement l'équation

$$\frac{y\sqrt{1+p^2}}{px - y} = K \ ,$$

ou, en posant $\frac{y}{x} = t$, d'où $\frac{x}{y} = \frac{1}{t}$, il vient facilement

$$p^2(t^2-K^2) + 2K^2 t\,p + t^2(1-K^2) = 0 \ .$$

t désigne le coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine au point décrivant M. Etudions la variation de p, lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Il convient ici d'envisager la somme S et le produit P des racines (en p), savoir :

$$S = \frac{-2K^2t}{t^2-K^2}, \qquad P = \frac{t^2(1-K^2)}{t^2-K^2}.$$

on voit qu'il y a lieu de distinguer deux cas suivant le signe de $1-K^2$, ~~on pourra alors former les deux tableaux suivants, où p' et p'' désignent les deux racines~~

$K<1$:

t	$-\infty$	$\frac{-K}{\sqrt{1-K^2}}$	$-K$	0	$+K$	$\frac{K}{\sqrt{1-K^2}}$	$+\infty$
S	0	$\frac{2\sqrt{1-K^2}}{K}$ $+\infty$	$\|-\infty$		$+\infty\|-\infty$		0
P	$\frac{1-K^2}{K^2}$		$+\infty\|-\infty$		$-\infty\|+\infty$		$\frac{1-K^2}{K^2}$
p'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
p''	$+$		$-$	0	$+$		$-$

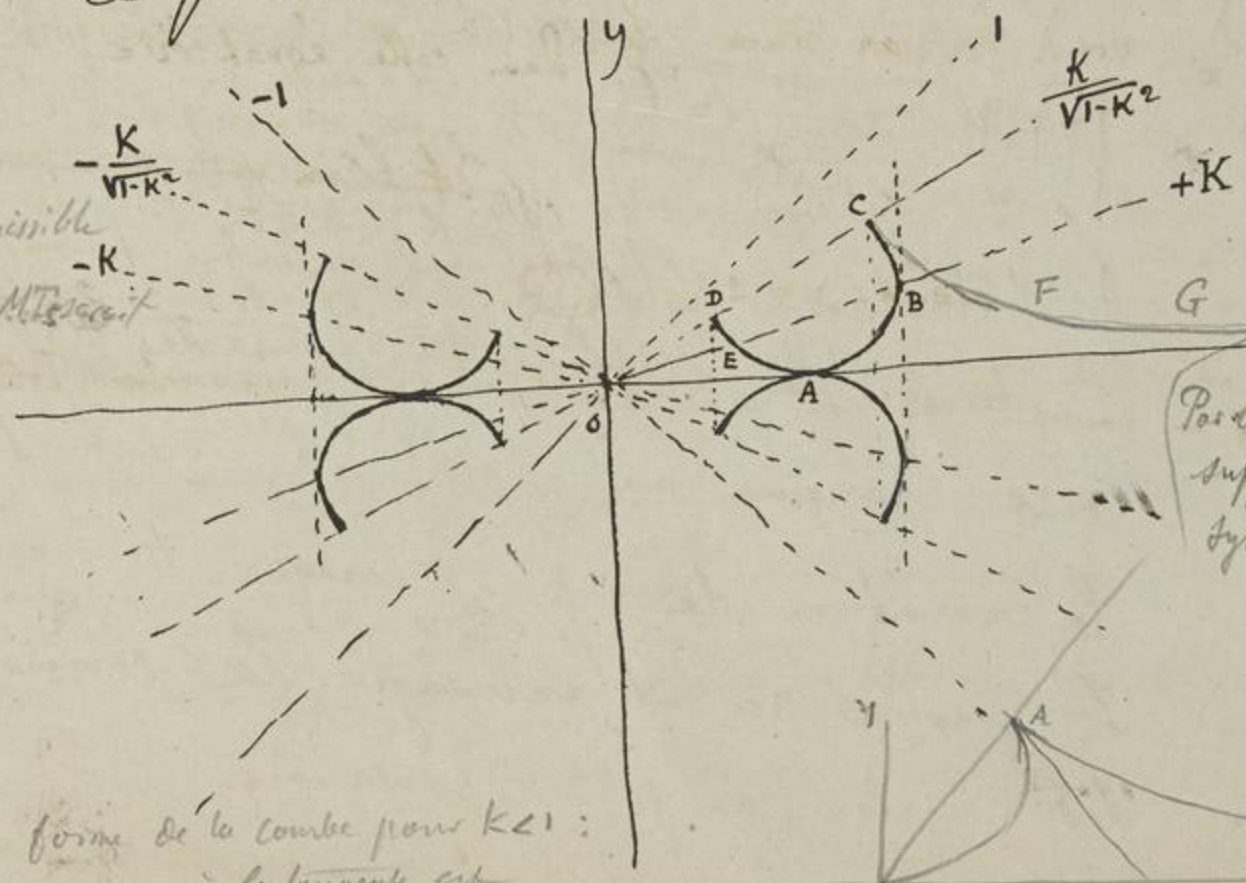
c.à.d. suivant que K est compris entre -1 et $+1$ ou en dehors de cet intervalle.

K étant compris entre -1 et $+1$, les racines p' et p'' ne sont réelles qu'autant que l'on a $K^4t^2 - t^2(1-K^2)(t^2-K^2) \geq 0$, c.à.d. $-t^2\left[(1-K^2)t^2-K^2\right] > 0$, ou enfin qu'autant que t est compris entre $\frac{-K}{\sqrt{1-K^2}}$ et $\frac{+K}{\sqrt{1-K^2}}$. On aura alors le tableau suivant, dans lequel p' et p'' désignent les deux racines :

$-1<K<1$:

t	$-\frac{K}{\sqrt{1-K^2}}$	$-K$	0	$+K$	$\frac{K}{\sqrt{1-K^2}}$
S	$\frac{2\sqrt{1-K^2}}{K}$	$+\infty\|-\infty$	0	$+\infty\|-\infty$	$-\frac{2\sqrt{1-K^2}}{K}$
P	$\frac{1-K^2}{K^2}$	$+\infty\|-\infty$	0	$-\infty\|+\infty$	$\frac{1-K^2}{K^2}$
p'	$\frac{\sqrt{1-K^2}}{K} = -\frac{1}{t} + \frac{1-K^2}{2K}$	$+$	0	$-$ $-\frac{1-K^2}{2K}$	$-\frac{\sqrt{1-K^2}}{K}$
p''	$\frac{\sqrt{1-K^2}}{K} = -\frac{1}{t} +$	$+\infty\|-\infty$ $-$	0	$+$ $+\infty\|-\infty$	$-$ $-\frac{\sqrt{1-K^2}}{K}$

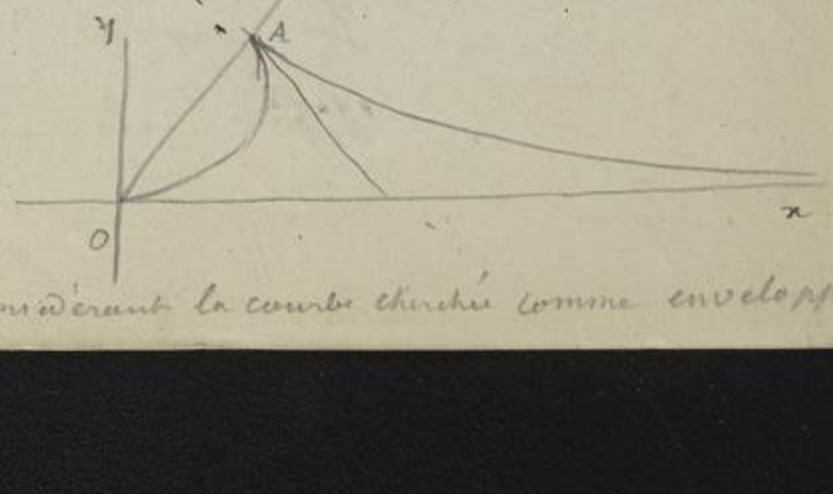
ce qui conduit aux courbes suivantes :



Cette forme n'est pas admissible
Aux environs du point A M tangent nul, OT ne l'étant pas.

Note de moi :
Quand t varie de 0 à $+\frac{K}{\sqrt{}}$, p'' donne la branche ABC et p' donne CFG. Puis les val négat de t donnent les courbes symét par rapp à OX

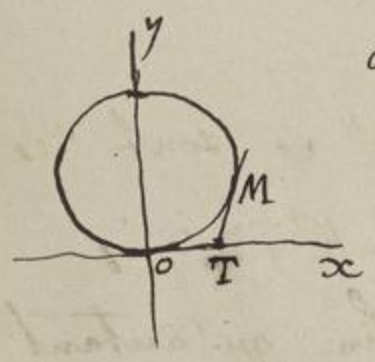
Par conséquent il faut supprimer AED et sa symétr par rapp à OX



Voici la vraie forme de la courbe pour $K<1$:
Elle a en A un rebroussement où la tangente est perpendiculaire à OA ; l'axe des x est asymptote.
On obtient aisément des expressions finies de x et de y en considérant la courbe cherchée comme enveloppe

Dans cette construction, la tangente en A est ox ; en B elle est verticale ; en C et D elle est perpendiculaire à la droite $y = \frac{K}{\sqrt{1-K^2}}\, x$. Les autres parties de la courbe sont symétriques de celle-ci par rapport à l'origine, par rapport à ox et enfin à oy.

On a d'ailleurs supposé la quantité $\frac{K}{\sqrt{1-K^2}}$ moindre que l'unité. Si elle était supérieure à l'unité, la courbe présenterait une tangente horizontale au point où elle aurait



Lorsqu'on a $K^2 = 1$, on voit immédiatement qu'on a une solution évidente, qui est un cercle tangent à l'origine à ox.

Lorsque $K^2 - 1$ est positif, les racines sont toujours réelles quel que soit t.

Lorsque $K^2 = 1$, on a alors en effet

$$p(t^2-1) + 2t = 0 \quad , \quad p = -\frac{2t}{t^2-1} \quad .$$ Mais on a posé $y = tx$, d'où $dy = t\,dx + x\,dt$, et par suite

$$p = \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} = -\frac{2t}{t^2-1} \quad .$$ Et par conséquent

$$x\frac{dt}{dx} = -\frac{2t}{t^2-1} - t = -\frac{t(1+t^2)}{t^2-1} \quad , \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt\,(t^2-1)}{-t(1+t^2)} = dt\left[\frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}\right]$$

$$\text{d'où} \quad Lx = Lt - L(1+t^2) + LC \quad ,$$

$$\text{ou} \quad x = \frac{ct}{1+t^2} = \frac{C\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \quad ,$$

$$\text{c.à.d.} \quad x^2 + y^2 - Cy = 0 \quad , \quad \text{cercle tangent à ox}$$

exact

à l'origine. — L'autre valeur de p est constamment nulle, on a une droite.

Le temps me manque pour étudier le cas où $K^2 - 1$ est > 0.

d'une droite telle que $y\cos\alpha - x\sin\alpha + f(\alpha) = 0$ et déterminant $f(\alpha)$ ~~par l'énoncé~~ de manière à satisfaire à l'énoncé du problème. On trouve ainsi $x = C(1+k\cos\alpha)\,\mathrm{tg}^k\frac{\alpha}{2}$, $y = Ck\sin\alpha\,\mathrm{tg}^k\frac{\alpha}{2}$ et en faisant varier α de zéro à π, on obtient la figure tracée ci contre.

Pomey. Jean-Baptiste

On demande de trouver en termes finis l'x et l'y d'une courbe telle que sa tangente MT soit dans un rapport constant avec le segment qu'elle détermine sur l'axe des x.

α étant l'angle de la tangente avec l'axe des x

L'équation différentielle est:

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = \lambda y$$

ou $x\sin\alpha - y\cos\alpha = \lambda y\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

D'où $xy' - y = \lambda y\sqrt{1+y'^2}$

En dérivant il vient:

$$dx\,y' + x.dy' - dy = \lambda dy\sqrt{1+y'^2} + \frac{\lambda y.y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

ou $\cancel{dx\,y'} + x\,dy' - \cancel{y'dx} = \lambda y'\cancel{dx}\sqrt{1+y'^2} + \frac{\lambda y\,y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}}$

$$x\,dy' = \lambda y'\sqrt{1+y'^2}\,dx + \frac{\lambda y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}}.\frac{xy'}{1+\lambda\sqrt{1+y'^2}}$$ en remplaçant y par sa valeur tirée de la première équation.

On a donc $$\frac{dx}{x} = dy'\left(1 - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}(1+\lambda\sqrt{1+y'^2})}\right)\frac{1}{\lambda y'\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\lambda\frac{dx}{x} = \frac{dy'(\sqrt{1+y'^2}+\lambda)}{y'(1+y'^2)(1+\lambda\sqrt{1+y'^2})}$$

Soit $\sqrt{1+y'^2} = v$ $\quad y'dy' = v\,dv$ $\quad \frac{dy'}{y'} = \frac{v\,dv}{v^2-1}$

on a:

$$\lambda\frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{v^2-1}.\frac{v+\lambda}{v^2(1+\lambda v)} = \frac{(v+\lambda)\,dv}{\lambda v(v-1)(v+1)(v+\frac{1}{\lambda})}$$

$$\lambda\frac{dx}{x} = dv\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{v-1} + \frac{C}{v+1} + \frac{D}{v+\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$A = \frac{1}{\lambda}.\frac{v+\lambda}{(v-1)(v+1)(v+\frac{1}{\lambda})} = -\lambda$

$B = \frac{1}{2}$

$C = -\frac{1}{2}$

$D = \lambda$

$$\lambda\log\frac{x}{\cdot} = \log C + -\lambda\log v + \frac{1}{2}\log(v-1) - \frac{1}{2}\log(v+1) + \lambda\log\left(v+\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\log x^\lambda = \log C + \log\frac{1}{v^\lambda} + \log\sqrt{v-1} + \log\frac{1}{\sqrt{v+1}} + \log\left(\frac{\lambda v+1}{\lambda}\right)^\lambda$$

$$x^\lambda = C.\sqrt{\frac{v-1}{v+1}}\left(\frac{\lambda v+1}{\lambda v}\right)^\lambda$$

On a d'ailleurs : $dy = y\,dx$

d'où $y = \int y\,dx$

$$y = \frac{x\,y'}{1+\lambda\sqrt{1+y'^2}}$$

Donc : $y = \dfrac{y'}{1+\lambda\sqrt{1+y'^2}} \cdot \sqrt[\lambda]{C\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+y'^2}-1}{\sqrt{1+y'^2}+1}}\left(1+\dfrac{1}{\lambda\sqrt{1+y'^2}}\right)^{\lambda}}$

Il est plus simple de laisser x & y exprimés en fonction de v. On a :

$$x^{\lambda} = C\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{\lambda v}\right)^{\lambda}$$

$\sqrt{1+y'^2} = v$

$1+y'^2 = v^2$

$y'^2 = v^2-1$

$y' = \sqrt{v^2-1}$

Donc $x = K\left(\dfrac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}\left(1+\dfrac{1}{\lambda v}\right)$

& $y = \dfrac{K\sqrt{v^2-1}}{1+\lambda v}\cdot\left(\dfrac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}\left(\dfrac{1+\lambda v}{\lambda v}\right)$

$$y = \frac{K}{\lambda v}\sqrt{v^2-1}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}$$

$$\begin{cases} x = K\,\dfrac{\lambda v+1}{\lambda v}\cdot\left(\dfrac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{2\lambda}} \\ y = K\,\dfrac{\sqrt{v^2-1}}{\lambda v}\left(\dfrac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{2\lambda}} \end{cases}$$

ces formules reviennent à celles qui ont été indiquées ci-dessus et qui donnent x et y en fonction de α ; ces dernières sont plus commodes pour construire.

Donc $\mathrm{L}\rho = +\infty$ et $\rho = +\infty$. La courbe BC est asymptote.

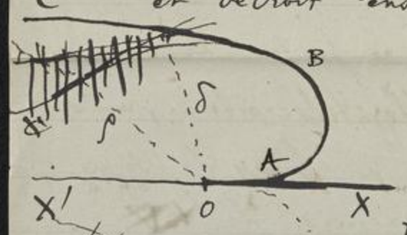
[D'ailleurs au début de la variation, pour $\omega = 0$, nous avions $\mathrm{tg}V = 0$, et nous avons pris pour point de départ l'origine à distance finie. La courbe part du point O. C'est ce que nous devions faire ; car on a alors $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sqrt{K^2 - \sin^2\omega}\, d\omega}{\sin\omega + \sqrt{K^2 - \sin^2\omega}}$, et pour $\omega = \varepsilon$, ε étant infiniment petit, on a $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sqrt{K^2 - \varepsilon^2}\, d\varepsilon}{\varepsilon}$

$\mathrm{L}\rho = K \cdot \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = K\mathrm{L}\varepsilon + C = K \cdot (-\infty) + C$,

$\mathrm{L}\rho = -\infty$, $\rho = 0$].

En donnant à ω val égales + petites que précédemment on a courbe symétr par rapp à ox.

2° Soit $K > 1$. et $\mathrm{tg}V = \frac{\sin\omega}{\sqrt{K^2 - \sin^2\omega}}$, le dénom ne s'annule jamais. $\mathrm{tg}V$ croît jusqu'à un maximum et décroît ensuite jusqu'à zéro pour $\omega = \pi$; mais lorsque V s'annule, ρ est ∞. Car soit $\omega = \pi - \varepsilon$, on a



$\mathrm{tg}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-\sqrt{K^2 - \varepsilon^2}\, d\varepsilon}{\varepsilon} = -K\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$

$\mathrm{L}\rho = -K\mathrm{L}\varepsilon + \mathrm{L}C$, $= -K(-\infty) = +\infty$, $\rho = +\infty$.

Cherch l'asymptote, sa dist δ au pôle est donnée par $\delta = \lim \rho\, \mathrm{tg}V = \lim \cdot \frac{C}{\varepsilon^K} \cdot \mathrm{tg}V = \lim \frac{C}{\varepsilon^K} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}} = \lim \frac{C}{\varepsilon^{K-1}}$,

or $K > 1$, donc $\delta = \infty$. L'asympt est rejetée à l'∞ sur ox. Ona ABC.

On a CBC

Quand ω varie de π à 2π, on a la branche symétrique par rapport à ox.

Prenons maintenant le signe − pour le radical.

$\mathrm{tg}V_1 = \frac{\sin\omega}{-\sqrt{K^2 - \sin^2\omega}}$; on a $V_1 = \pi - V$, V étant l'angle précédent. On a ainsi immédiatement toutes les nouvelles valeurs de V_1. Seulement ici encore, il faut voir ce que devient ρ pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$. Soit $\omega = \varepsilon$, ε infiniment petit, on a $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-\sqrt{K^2 - \sin^2\omega}\, d\omega}{\sin\omega}$

$= -K\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$, $\mathrm{L}\rho = -K\mathrm{L}\varepsilon + \mathrm{L}C$,

pour $\varepsilon = 0$, on a $\mathrm{L}\rho = -K(-\infty) + \mathrm{L}C = +\infty$.

Donc $\rho = +\infty$. Et pour $\omega = \pi$, on fait $\omega = \pi - \varepsilon$,

$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{+K \cdot d\varepsilon}{\varepsilon}$, $\mathrm{L}\rho = K\mathrm{L}\varepsilon + \mathrm{L}C$,

$\mathrm{L}\rho = K(-\infty) + \mathrm{L}C = -\infty$,

$\rho = 0$. On a CAO.

Puis ω variant de π à 2π, on aura une courbe symétr par rapp à ox

Effectuons maintenant l'intégration

$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\omega\sqrt{K^2 - \sin^2\omega}}{\sin\omega}$, posons $K = \frac{1}{\lambda}$, on a

$\lambda\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\omega\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\omega}}{\sin\omega}$, soit $\sin\omega = u$, $\cos\omega\, d\omega = du$

$d\omega = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, $\lambda\frac{d\rho}{\rho} = du\frac{\sqrt{1-\lambda^2u^2}\sqrt{1-u^2}}{u\sqrt{1-u^2}} = \frac{du}{u}\sqrt{\frac{1-\lambda^2u^2}{1-u^2}}$

Soit $\sqrt{\frac{1-\lambda^2u^2}{1-u^2}} = v$, $1 - \lambda^2u^2 = v^2(1-u^2)$,

Toutes ces formules sont bonnes si $\lambda < 1$, et doit être maintenu

$\lambda^2(v^2 - \lambda^2) = v^2 - 1$ $\quad u = \sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-\lambda^2}}$ $\quad du = \frac{2v(v^2-\lambda^2) - 2v(v^2-1)}{(v^2-\lambda^2)^2\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-\lambda^2}}}\, dv$

$du = \frac{2v(1-\lambda^2)\, dv}{(v^2-\lambda^2)\sqrt{(v^2-1)(v^2-\lambda^2)}}$, $\lambda\frac{d\rho}{\rho} = \frac{v^2(1-\lambda^2)\sqrt{v^2-\lambda^2}\, dv}{(v^2-\lambda^2)\sqrt{(v^2-1)(v^2-\lambda^2)}\sqrt{v^2-1}}$

$\lambda\frac{d\rho}{\rho} = \frac{(1-\lambda^2)v^2\, dv}{(v^2-\lambda^2)(v^2-1)}$; posons $v^2 = t$, $2v\, dv = dt$, $dv = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$1-\lambda^2u^2 = v^2 - u^2v^2$, ~~$u^2$~~ $u^2(v^2-\lambda^2) = v^2-1$,

$u^2 = \frac{v^2-1}{v^2-\lambda^2}$, $2u\,du = \frac{2v(v^2-\lambda^2) - 2v(v^2-1)}{(v^2-\lambda^2)^2}dv = \frac{2v(1-\lambda^2)}{(v^2-\lambda^2)^2}dv$

$\frac{du}{u} = \frac{v(1-\lambda^2)\,dv}{(v^2-\lambda^2)^2} \Big/ \left(\frac{v^2-\lambda^2}{v^2-1}\right) = \frac{v(1-\lambda^2)\,dv}{(v^2-\lambda^2)(v^2-1)}$

$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{v(1-\lambda^2)\,dv}{(v^2-\lambda^2)(v^2-1)}$ $\lambda\frac{d\rho}{\rho} = \frac{v\,du}{u} = \frac{v^2(1-\lambda^2)\,dv}{(v^2-\lambda^2)(v^2-1)}$

$\frac{\lambda}{(1-\lambda^2)}\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{A}{v-\lambda} + \frac{B}{v+\lambda} + \frac{C}{v-1} + \frac{D}{v+1}\right)dv$, $f = v^2$, $F = v^4 - (1+\lambda^2)v^2 + \lambda^2$

$F' = 4v^3 - 2(1+\lambda^2)v$

$A = \frac{f(\lambda)}{F'(\lambda)} = \frac{\lambda^2}{4\lambda^3 - 2\lambda - 2\lambda^3} = \frac{\lambda}{2(\lambda^2-1)}$

$B = \quad = \frac{\lambda^2}{-4\lambda^3+2\lambda+2\lambda^3} = \frac{-\lambda}{2(\lambda^2-1)}$

$C = \frac{f(1)}{F'(1)} = \frac{1}{2(1-\lambda^2)}$

$D = \quad = \frac{-1}{2(1-\lambda^2)}$

$\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[\frac{-\frac{\lambda}{2}}{v-\lambda} + \frac{\frac{\lambda}{2}}{v+\lambda} + \frac{\frac{1}{2}}{v-1} - \frac{\frac{1}{2}}{v+1}\right]$

$\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\operatorname{L}\frac{\rho}{\rho_0} = +\frac{\lambda}{2}\operatorname{L}\frac{v+\lambda}{v-\lambda} + \frac{1}{2}\operatorname{L}\frac{v-1}{v+1}$.

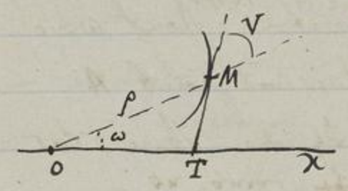
$\operatorname{L}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\lambda} = \operatorname{L}\left(\frac{v+\lambda}{v-\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{2}} + \operatorname{L}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\lambda} = \left(\frac{v+\lambda}{v-\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, et dans cette égal $v = \sqrt{\frac{1-\lambda^2\sin^2\omega}{1-\sin^2\omega}}$

c.à.d. $v = \frac{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega}}{\cos\omega}$

pour $\omega = 0$, on a $v = \pm 1$, suiv. que le radical est + ou −; ρ est nul ou infini suivant que v est $+1$ ou -1; pour $\omega = \pi$, $v = \pm 1$ suiv. que le radic est nég ou positif; donc pour $\omega = \pi$, $\rho = 0$ ou ∞, suiv. que le radic est nég ou posit.

Trouver une courbe telle que $\frac{MT}{OT} = K$.



$\frac{MT}{OT} = \frac{\sin\omega}{\sin V} = K$, $\operatorname{tg} V = \frac{\rho\,d\omega}{d\rho}$?

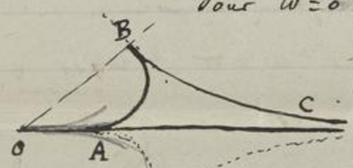
$\operatorname{tg} V = \frac{\sin V}{\cos V} = \frac{\sin V}{\pm\sqrt{1-\sin^2 V}} = \frac{1}{K}\frac{\sin\omega}{\pm\sqrt{1-\frac{\sin^2\omega}{K^2}}}$

$\operatorname{tg} V = \rho\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\sin\omega}{\pm\sqrt{K^2-\sin^2\omega}}$.

Pour $\omega = 0$, Prenons + devant le radical, $\operatorname{tg} V = \frac{\sin\omega}{+\sqrt{K^2-\sin^2\omega}}$.

1° Soit $K < 1$, posons $K = \sin u$, où $0 < u < \frac{\pi}{2}$.

Pour $\omega = 0$, $\operatorname{tg} V$ est nul; puis ω croissant, V augmente; pour $\omega = u$, V devient égal à $\frac{u}{2}$;



on a ainsi AB. ω ne peut continuer à croître, on le fait alors décroître; mais comme le radical s'est annulé, il a changé de signe, et on a maintenant à consid les valeurs de $\frac{\sin\omega}{-\sqrt{K^2-\sin^2\omega}}$, lorsque ω décroît de u à 0; on voit que $\operatorname{tg} V$ est constamment négatif, ce qui montre que la courbe aura sa convexité constamment tournée vers ox, comme la courbe BC; enfin, pour $\omega = 0$, on aura $V = \pi$. Mais la courbe sera-t-elle tangente à ox ou asymptote? En un mot, pour $V = \pi$, ρ sera-t-il fini ou infini? On a $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-d\omega\sqrt{\quad}}{\sin\omega}$

posons $\omega = \varepsilon$, ε étant infinitésimal, on aura

$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{+d\varepsilon\sqrt{K^2-\varepsilon^2}}{+\varepsilon}$, $\operatorname{L}\rho = -K\operatorname{L}\varepsilon + \operatorname{L}c = -K\operatorname{L}(+0) + \operatorname{L}c = +\infty$

HENRI POINCARÉ

MEMBRE DE L'INSTITUT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

63, RUE CLAUDE-BERNARD

30 au 4 mars

Poincaré

Conférences d'Analyse

Analyse

I.

M. Poincaré.

(Mercredi et Samedi)

$z = \sqrt{ax^4 + 4bx^3y + \dots}$, $y = tx$. $\frac{d^2z}{dx^2}_0$ = pour $x = y = 0$.

Démontrer que
4° $\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{(1+x^2)^p}\right] = \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+p}}$, P_n étant un polyn de degré n . Faire voir que $P_n = 0$ a toutes ses rac réelles quand β est positif. [On démontre que si formule vraie pour n, elle vaut pour $n-1$; et que si P_n a ses rac réelles, P_n a la sienne réelles aussi] :—

5° Dével par formule de Maclaurin la fonction e^{e^x} suiv. les puis-croiss de x . Calcul les coef de x, x^2, x^3, x^4.
Déduire de là la valeur des séries $\sum \frac{m^2}{1.2\dots m}$,
$\sum \frac{m^3}{1.2\dots m}$, $\sum \frac{m^4}{1.2\dots m}$. [Séries à double entrée : $e^z = u$ Frenet, Théor de Cauchy]

1° Dérivée de $\operatorname{arc\,tg}\left[x + \sqrt{1-x^2}\right]$.

2° Calculer $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $z = \sqrt{ax^4 + 4bx^3y + 6c\,x^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4}$

Etudier les particularités qui se présentent quand on fait $x = y = 0$.

3° : $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ 3 polyn homog du même degré m en x,y,z ; soit une fonction θ de x définie par les équat $\theta = \frac{\varphi(x,y,1)}{\psi(x,y,1)}$ $f(x,y,1) = 0$; démontrer que pour trouver la dérivée θ'_x, il suffit de diviser par $m\psi^2 \frac{\partial f}{\partial y}$ le déterminant fonctionnel de f, φ, ψ par rapport à x,y,z et de faire ensuite $z = 1$. [On applique théor des fonct homog].

$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \dots + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$

$$\frac{d^n(uvw)}{dx^n} = \sum C \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha}\frac{d^\beta v}{dx^\beta}\frac{d^\gamma w}{dx^\gamma}, \quad \alpha+\beta+\gamma = n.$$

$\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$; ou bien on peut considérer (VW) comme un seul facteur, puis ensuite effectuer la dérivation de VW. ——

$$\frac{d^{m+n}(uv)}{dx^n dy^n} = \sum\left(\sum C \frac{d^{\alpha+\beta} u}{dx^\alpha dx^\beta}\frac{d^\beta v}{dx^\beta}\right)$$ terme général en effectuant par rapport à x,

$\alpha+\beta = m$, $\alpha'+\beta' = n$, et $C = \frac{m!}{\alpha!\beta!}$

Puis effectuant n fois le terme obtenu par rapport à y

$$\sum\left(\frac{m!}{\alpha!\beta!}\sum \frac{n!}{\alpha'!\beta'!}\frac{d^{\alpha+\alpha'}u}{dx^\alpha dy^{\alpha'}}\frac{d^{\beta+\beta'}v}{dx^\beta dy^{\beta'}}\right)$$

Terme gén. $\sum \frac{m!\,m''!}{\alpha!\beta!\alpha''!\beta!}\frac{d^{\alpha+\alpha'}u}{dx^\alpha dy^{\alpha'}}\frac{d^{\beta+\beta'}v}{dx^\beta dy^{\beta'}}$

Si l'on fait u, v, w, $\alpha+\beta+\gamma = m$, $\alpha'+\beta'+\gamma' = n$

on a $\frac{m!\,n!}{\alpha!\beta!\gamma!\,\alpha''!\beta'!\gamma''!}$.

Symboliquement ; $(u+v)^n(u'+v')^n$, que l'on développe terme à terme, $Au^\alpha v^\beta u'^{\alpha'} v'^{\beta'}$, et on remplace par $\frac{\partial^{\alpha+\beta} uv}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$. ——

$F = \sqrt{ax^4 + 4bx^3y + \cdots}$, $y = tx$. $\frac{d^2F}{dt^2} = 0$ pour $x = y = 0$.

Déterm fonctionnels. $\frac{\partial(f,\varphi,\psi)}{\partial(x,y,z)}$. ; 4 variable x,y,z,t.

$\varphi = 0$, $\psi = 0$, $f = 0$. Ces 3 éq définiss x, y, z en t. Comment trouver dér. de x par rapp. à t.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \text{———}$$

$$\frac{df}{dt} = \text{———}$$

$$\text{Trouve } \frac{dx}{dt} = -\frac{\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}}{\frac{\partial(\varphi,\psi,f)}{\partial(x,y,z)}} = \frac{\frac{\partial(\varphi,\psi,f)}{\partial(y,z,t)}}{\frac{\partial(\psi,\varphi,f)}{\partial(x,y,z)}} \quad \text{(en permutant pour changer le signe)}.$$

$f(x,y,z)$	$\varphi(\,)$	$\psi(\,)$
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial f}{\partial y}$	$\frac{\partial f}{\partial z}$
$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$		
$\frac{\partial\psi}{\partial x}$		

Soit $z = f(y)$, y étant fonct de x ; on sait trouver la dér. de z en x .

$\frac{dz}{dt}$ soient $x_1\ x_2\ x_3$, $y_1\ y_2\ y_3$, $z_1\ z_2\ z_3$.

Le dét fonct $\frac{\partial(z_1,z_2,z_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} = \frac{\partial(z_1,z_2,z_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)} \cdot \frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$

Démontre: Pour transf $\iiint dz_1\,dz_2\,dz_3$ en pren pour var $y_1\ y_2\ y_3$

on a $\iiint \frac{\partial(z)}{\partial(y)}\,dy_1\,dy_2\,dy_3$. $\iiint \frac{\partial(z)}{\partial(y)}\,\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$) .

$= \iiint \frac{\partial(z)}{\partial(x)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$. — Cela le démontrer. On peut aussi directem.

or $\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{dz_1}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1}$; remplaçons, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{dz_1}{dx_1} & dz_2 & \\ \frac{dy_1}{dx_1} & dy_2 & \\ \frac{dz_2}{dx_1} & dz_2 & \end{vmatrix}$$

le prod de 2 déterm on identifie

et on a $\frac{\partial(\,)}{\partial(\,)} = \frac{\partial(\,)}{\partial(\,)} \cdot \frac{\partial(\,)}{\partial(\,)}$

$\frac{dz}{dx} = 0$

$\frac{\partial\gamma_4}{\partial x^4} + \text{———} + \frac{\partial\gamma_4}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$

et —

à la

le plan

surf $x - \alpha z = 0$

, le

n'a pas

s une

$ey + t = \text{Const}$

de 2

i'imagin

f se

e point de

t ordin.).

ourbe

courbe

nne

) .

L qu'on

une seule

$\frac{dz}{dx}$)

Remarq sur la discontinuité dans la démonst du théor des fonct composées, $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; pour $x=0$; $y=0$, la val de $\frac{\partial z}{\partial x}$ dépend de la manière dont y et x tendent vers zéro. — De même pour $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. —

$z=\sqrt{x^4+4x^2y^3+y^4}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x^3+4y^3}{2\sqrt{x^4+4xy^3+y^4}}$ O. K

$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y}$ = 1 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{4y^3}{2y^2}=2y$

$\frac{y}{x}\to\infty$ $\frac{y}{x}\to$ ∞ $\left(\frac{y}{x}\right)=k$ y

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2$. Prem l'inverse $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{12y^2x+4y^3}{2\sqrt{}}$ — $\frac{y}{x}$

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=0}=0$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)_{=0}$ = autre limite que $2=0$

$x^4+4xy^3+y^4=0$, Dér. en y, $12xy^2+4y^3=0$,

y^2, $3x+y=0$, substituons $y=-3x$; $\frac{3^4}{81}x^4$.

y	$-\infty$	0	$-3x$
	+	+	−
			une racine

Mais si $2xy^3$ 2ac imag num 2e ordre dér. $\frac{\partial^2 z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont continues.

Pour que on puisse intervert l'ordre de dérivations, il faut $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ continues pour $x=0$ et $y=0$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ $\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{kh}$

$\phi(x,y)$ $\frac{\phi(x+h,y)-\phi(x,y)}{kh}=\frac{\phi'_x(x+\theta h,y)}{k}$ f'_x ⊙ f'_y

$\phi(x,y)=f(x,y+k)-f(x,y)$

$\phi'_x(x,y)=f'_x(x,y+k)-f'_x(x,y)$ $\frac{1}{k}\left(f'_x(x,y+k)-f'_x(x,y)\right)$ $f''_{y,x}$

$\frac{k}{k}f''_{xy}(x+\theta h,y+\theta k)$ $f''_{xy}(x,y)$

$\xi = \sqrt{ax^4 + 4bx^3y + \cdots}$, $y = tx$. $\frac{d^2\xi}{\partial x^2}$ = pour $x = y = 0$.

Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, où $z = \sqrt{f(x,y)}$

f est homog du 4e degré.

ou a $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$4f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$

$2\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ (théor des fonct homog)

$2\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; empl notations p, q, r .

$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(\ ) + xy\frac{pq}{r^2} + y^2 qr$

$12 f(x,y) = px^2 + 2rxy + qy^2$

$\frac{(px^2 + 2rxy + qy^2)r}{6}$

$\left(\frac{pr}{6} - \frac{pr}{9}\right)x^2 + \left(\frac{r^2}{3} - \frac{pq}{9} - \frac{r^2}{9}\right)xy + \frac{qr}{18}y^2$

$\frac{\frac{pr}{18}x^2 + \frac{2r^2 - pq}{9}xy + \frac{qr}{18}y^2}{4f(x,y)^{\frac{3}{2}}}$ forme symétrique

Val de $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ n'est pas égale en général à $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ suivant manière dont $\frac{y}{x}$ et x tendent vers 0.

$\frac{d^n(1+x^2)^p}{dx^n} = \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+p}}$

Si une fonct est impaire, sa dér. est paire ; et si une fonct est paire, sa dérivée est impaire. Soit en effet

$f(x) = f(-x)$, dér. $f'(x) = -f'(-x)$, $f''(x) = f''(-x)$.
dér. d'ordre pair est paire

$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \cdots + \frac{\partial^4 z}{\partial x}\frac{dx}{dx} = 0$

à la
le plan
Surf
$x - \alpha, z$
le
n'a pas
ve une
$ey^4 = Const$
de 2
imagin
f de
e point de
ct ordre).
ourbure
courbure
rmne
) .
L qu'on
ne seule
$\frac{\partial z}{\partial x}$)
$\frac{dz}{dx} = 0$

Et soit $f(x) = -f(-x)$ imp., $f'(x) = f'(-x)$,

$f''(x) = -f''(-x)$, (dér. d'ordre pair est impaire).

Considérons $\frac{P_n}{(1+x^2)^{n+p}}$. La fonction $\frac{1}{(1+x^2)^{+p}}$

s'annule pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$ sans s'annuler

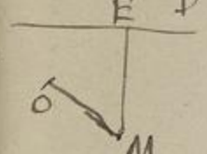
dans l'intervalle. Sa dér. s'annule ~~contre~~ pour $-\infty$ et $+\infty$

et entre $-\infty$ et $+\infty$. Donc P_1 s'annule une fois pour a.

Dér. seconde s'annule entre $-\infty$ et a et a et $+\infty$;

~~etc~~ et de plus pour $-\infty$ et $+\infty$. Donc et P_2 a deux rac, etc.

$\xi = \sqrt{ax^4 + 4bx^3y + \cdots}$, $y = tx$. $\frac{d^2\xi}{\cdots}$ = pour $x = y = 0$.



Géom. analyt. — On donne dans un plan une droite fixe D et un point fixe O. Constr la courbe qui est le lieu des points M tels que le prod $MO \cdot MI = K^2$.
Constr aussi la tang en un point M de cette Courbe
Quand on fait varier K^2, D et O restant fixes, le pt d'inflexion de la courbe décrit une courbe dont on demande l'équat —

On a une fonct z de 2 var. x et y, on a 2 fonct Z, X, Y de x et y définies par $X = ax + by + cz$, $Y = a'x + b'y + c'z$, $Z = a''x + b''y + c''z$. On suppe que le déterm

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 1 .$$

Calculer $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dZ}{dY}$, $\frac{d^2Z}{dX^2}$, etc. (du 1er et du 2e ordre) en fonct. de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, d^2z, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$.

On donne 2 fonct z_1 et z_2 de 3 var. u_1, u_2, u_3 qui sont elles-mêmes fonct de 2 var. indép x_1 et x_2. On donne

$$A = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_2, u_3)}, \quad B = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_3, u_1)}, \quad C = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_1, u_2)} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$A' = \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2)}, \quad B' = \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(x_1, x_2)}, \quad C' = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{dz}{dx} = 0$$

et —

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \cdots + \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0$$

~~On~~ Calculer $X = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(x_1, x_2)}$ en fonct de A, B, C et de A', B', C'.

$\zeta = \sqrt{ax^4 + 4bx^3y + \cdots}$, $y = tx$. $\frac{d^2\zeta}{dx\,dy} \neq 0$ pour $x = y = 0$.

surf $\zeta^2 - ax^4 \cdot \cdots - ey^4 = 0$.

quelle que soit la courbe tracée sur la surf dans, la tang à la courbe est dans le plan des xy donc le plan tang est le plan des xy. — De même $x = y$ lim $u = 0$, $\zeta = 0$.

Le polyn sous le radical, quand lim $\frac{y}{x} \neq 0$.

$\zeta = a(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(\quad)(\quad)$, 4 droites sur surf dans le plan des xy le long d'une de ces droites, $x - \alpha_1 y = 0$, le plan tang est $\zeta = 0$, $x = \alpha_1 y$. Le plan tang n'a pas pour lim le plan des xy mais le plan $x = \alpha_1 y$.

A l'orig si on consid l'indic, ce n'est pas une conique — C'est $ax^4 + 4bx^3y + \cdots + 4dxy^3 + ey^4 = \text{Const}$

Cons surf par plan par oz la sect de cons de 2 paraboles si rac du polyn sont α_1 α_2 α_3 α_4 imagin et si on ne consid que val réelles de x et y surf se compose de 2 nappes symétriques tang à xoy (au point de vue purem géométr) et à ce pt de vue le point est ordin.).

Donc démonstr purem géométr (sur rayons de courbure de Euler) ne peuvent être complètem exactes.

---

appln du 4e problème généralisé. On donne

$\varphi_1(x, y, z, t)$, $\varphi_2(\quad)$, $\varphi_3(\quad)$, $\varphi_4(\quad)$.

Définissons θ par $\theta = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$, et qu'on suppose ensuite $t = 1$, de façon que θ soit d'une seule var indép x . Cherchons $\frac{d\theta}{dx}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\varphi_2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right) - \varphi_1\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)}{\varphi_2^2}$$

$\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ sont donnés par $\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$

et $\frac{\partial\varphi_4}{\partial x^4} + \cdots + \frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$

Le numér. de $\frac{d\theta}{dx}$ peut se mettre sous forme d'un déterm—

On a $\frac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{d\theta}{dx}\frac{\partial(\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(y,z)}}$. De même $\frac{dz}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial(\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(y,z)}}$

Substit., on a $\varphi_2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(z,x)} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(x,y)}\right.$

$\left. + \varphi_2\cdot\frac{\partial(\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(x,y,z)} - \varphi_1\frac{\partial(\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(x,y,z)}\right)$

ou

$$\frac{}{\varphi_2^{\,2}\cdot\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(y,z)}}.$$

or le numér. est un déterm—

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \varphi_1 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & — & \varphi_2 \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} & — & — & \varphi_3 \\ \frac{\partial\varphi_4}{\partial z} & — & — & \varphi_4 \end{vmatrix}$$

on a remplacé 0 et 0 par φ_3 et φ_4 qui sont nuls —

Or par fonct homog ; retranch dern colon avant dern

mult par z, préc par y etc / on a

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial(\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(x,y,z,t)} \Big/ m\varphi_2^{\,2}\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(y,z)}.$$

Voici une autre généralisat de la 1ère quest

Prenons $\varphi_1(x,y,z,t)$, φ_2 φ_3 φ_4.

Considr θ_1 et θ_2 fonct de x déf par $\theta_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}$, $\theta_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$.

Cherch la déterm fonction de θ_1 et θ_2 par rapp à x et y.

et supposons $\varphi_4 = 0$, avec $t = 1$.

$\begin{vmatrix} \frac{d\theta_1}{dx} & \frac{d\theta_2}{dx} \\ \frac{d\theta_1}{dy} & \frac{d\theta_2}{dy} \end{vmatrix}$ Rempl $\frac{d\theta_1}{dx}$ par sa val $\frac{\partial(\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_4)}{\partial(x,z,t)}$.

~~$m\varphi$~~ $m\varphi_3^2 \frac{d\varphi_4^2}{dz^2}$.

ou $\begin{vmatrix} \frac{\partial(\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_4)}{\partial(x,z,t)} & \frac{\partial(\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(x,z,t)} \\ \frac{\partial(\varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(x,z,t)} & \frac{\partial(\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(x,z,t)} \end{vmatrix} = \Delta$

donc $\frac{\partial(\theta_1,\theta_2)}{\partial(x,y)} = \frac{\Delta}{m^2\varphi_3^2 \frac{d\varphi_4^2}{dz^2}}$. Dével Δ.

$\frac{\partial(\varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(x,z,t)} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(z,t)} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \frac{\partial(\varphi_3\,\varphi_4)}{\partial(t,x} + \text{—}$

Or $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(x,y,z,t)}$ a pour mineurs $\frac{\partial(\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_4)}{\partial(x,z,t)}$.

appel A_{ik} le min obtenu en supprim i.ème ligne et K.ème colon

on a $\Delta = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{vmatrix}$. C'est encor un mineur de $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & & & \\ A_{31} & & & \\ A_{41} & \cdots & & \end{vmatrix}$

Loi des coef de e^{ex}. Dérivée n.ème est de la forn

On trouve $e^{ex}(a_n e^{nx} + a_{n-1} e^{(n-1)x} + \cdots + a_2 e^{2x} + a_1 e^x)$

En fait. $x=0$, on a $e(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1)$. Cherch

$a_n + a_{n-1} + \text{—} a_2 + a_1$. On a

$e^{e^x} = 1 + \frac{e^x}{1} + \frac{e^{2x}}{1.2} + \frac{e^{3x}}{1.2.3} + \text{—} + \frac{e^{px}}{p!} + \text{——}$

Différentions n fois cette exprer

on a $0 + \frac{e^x}{1} + 2^n \frac{e^{2x}}{1.2} + 3^n \frac{e^{3x}}{1.2.3} + \text{—} + p^n \frac{e^{px}}{p!} + \text{——}$

Posons $e^x = z$ — Soit

(A) $e^z(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \text{---} + a_1 z)$

$= \frac{z}{1} + q^n \frac{z^2}{1.2} + g^n \frac{z^3}{1.2.3} + \text{---} + p^n \frac{z^p}{1.2 \ldots p} + \text{---}$.

on peut en tirer $a_n + a_{n-1} + \text{---}$

Connd $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \text{---} + a_1 z$ et div. par $1-z$

on a $\dfrac{a_n z^n + \text{---} + a_1 z}{1-z} = a_n \Sigma z^{n+p} + a_{n-1} \Sigma z^{n+p-1} + \ldots + a_1 \Sigma z^{p+1}$

Le coef de Σz^{n+1} sera $a_1 + a_2 + \text{---} + a_n$ (pour $p=1$).

Pour $p = q$, on a $a_n^{n-1} + \text{---}$

$n = p$ ———————

Il faut donc le coef de z^{n+1} dans le produit.

Partons du développem (A). On a

$\dfrac{a_n z^n + \text{---} + a_1 z}{1-z} = (a_n z^n + \ldots + a_1 z) e^z \cdot \dfrac{e^{-z}}{1-z}$; on conn le dével

du 1er fact $(a_n z^n + \text{---} a_1 z) e^z$. Dével.

$\dfrac{e^{-z}}{1-z} = 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3} + \text{---}$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \text{———}$

Multipl membre à membre, opérat permise par que 1er série a ses termes posit et la 2e absol convergt en rempl terme par val absolues donc toutes deux absolum convergt On a

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{-z}}{1-z} = {} & 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} - \text{---} \\ & + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} \\ & + z^2 - \frac{z}{1} + \ldots \\ & + z^3 - \text{---} \end{aligned}\right\} = \Sigma \alpha_p z^p,$$

α_p étant la somme des $p-1$ prem termes du développement de e^{-z}. (C'est facile à voir. — Alors facile de trouver

$$1^n \cdot \alpha_n + \frac{2^n}{1.2}\alpha_{n-1} + \frac{3^n}{1.2.3}\alpha_{n-2} + \cdots + \frac{n^n}{1.2\ldots n}\alpha_1 \quad (\text{et } \alpha_1 = 1).$$

En mult cela par n, on aurait la somme de la série

$$\frac{n^n}{1.2\ldots n}.$$

Si on avait pris coef de z^{n+2} au lieu de z^{n+1}, on aurait même expres. On aurait donc d'autre expres de la val du coef de z^2 cherché.

Il y a une 2ème méthode — On part de la dér. n^ième de $\varphi(e^x)$. On pose $e^x = u$, on a $\varphi(u)$.

$\varphi' e^x$, $\varphi'' e^{2x} + \varphi' \cdot e^x$, ..., $a_n \varphi_n e^{nx} + \ldots + a_1 \varphi' e^x$.

Les coef. $a_n, \ldots a_1$ sont les mêm que plus haut. Il faut exprimer ces coef. Ils sont indép de la forme de φ, on pose $\varphi(u) = u^z$. D'où

$$z^n = a_n \cdot z(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1) + a_{n-1} z(z-1)(z-2)\cdots(z-n+2) + \ldots + a_2 z(z-1) + a_1 z$$

identité. Ordinairement on rempl a_1 a_2 — par $\frac{a_1}{1}$, $\frac{a_2}{1.2}$, $\frac{a_n}{1.2\ldots n}$. Par ce cela on calcule les coef successivement en fais. $z=1$, $z=2$, — $z=n$ dans cette expres de $1^n = a_1$, — $= a_2$ — —, etc et en faisant la somme on trouve précisément l'expres indiquée plus haut.

Changer de variables. $x \frac{d^2 f}{dx^2} + y \frac{d^2 f}{dy^2}$

en supp $x+y = u$, $y = uv$.

Pour trouver $\Sigma \frac{u^p}{1.2 \dots p}$, on peut considérer, au lieu de e^x, $e^{x_1 x_2 \dots x_p}$, et dériver successivement par rapport à $x_1, x_2, \dots x_p$. On a des dérivées, on identifie, mais cela suppose qu'on ait la dérivée d'une série en prenant les dérivées des termes.

Considérons $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$, convergente, mais la dérivée $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots$ n'est pas convergente. Et même si la seconde est convergente, ça ne prouve pas qu'on ait le droit de dériver. Supposons la 1ère convergente $S = S_n + R_n$, R_n tend vers zéro. Donnons à x un accroissement, on a

$$\Delta S = \Delta S_n + \Delta R_n,$$

d'où

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\Delta S_n}{\Delta x} + \frac{\Delta R_n}{\Delta x},$$

et $\frac{\Delta R_n}{\Delta x}$ tend vers zéro quand Δx tend vers zéro; mais il ne faut pas en conclure que $\frac{\Delta R_n}{\Delta x}$ tend aussi vers zéro quand n tend vers l'∞. Si on fait tendre d'abord Δx vers zéro, on a la lim $\frac{dR_n}{dx}$, puis on fait tendre n vers l'∞; on peut avoir une autre limite.

On peut dire que $\frac{dR_n}{dx}$ est nul seulement si, pour n suffisamment grand, on a $\frac{\Delta R_n}{\Delta x} < \varepsilon$, et $\frac{dR_n}{dx}$ tend vers zéro.

Or c'est le cas dans une série absolument convergente développée suivant les puissances croissantes de x. Supposons $S = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + \dots$ cette série absolument convergente, somme ne dépend pas de l'ordre des termes; série des modules

$$(1) \quad A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \dots + A_n X_n + \dots$$

est également convergente. Mais supposons tous les coefficients a positifs, pour ne pas compliquer les détails, autrement on prendrait (1) $x = \alpha$ convergente, elle est convergente pour $x < \alpha$. Donc

$$a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots$$

est convergente.

et on peut prendre K tel que $a_n x^n < K$, $a^n x^n < K\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$,
x étant $< \alpha$, $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$ est < 1. Considd $\frac{\Delta R_n}{\Delta x}$: je change x en
$x+\Delta x$ dans la série à partir du $n^{ième}$ terme, on peut
prendre $x + \Delta x < \alpha$, puisque $x < \alpha$ et Δx vers zéro.

$$\frac{\Delta\left(a_n x^n\right)}{\Delta x} = a_n\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} x + \cdots + x^{n-2}\Delta x + x^{n-1}\right]$$

$$< n a_n \left[x+\Delta x\right]^{n-1}$$

$$< n K \frac{(x+\Delta x)^n}{\alpha^n}.$$

Donc $$\frac{\Delta R_n}{\Delta x} < \sum_{p=n}^{p=\infty} pK\left(\frac{x+\Delta x}{\alpha}\right)^p .$$

Or la série $\sum pK\left(\frac{x+\Delta x}{\alpha}\right)^p$ est convergente (car lim du rapp d'un
terme au préc est $\frac{x+\Delta x}{\alpha} < 1$.

Donc $\frac{\Delta R_n}{\Delta x} < \sum pK\left(\frac{x+\Delta x}{\alpha}\right)^p < \rho_n$, or ρ_n est le
reste, on peut prendre $\rho_n < \varepsilon$, et on a $\frac{\Delta R_n}{\Delta x} < \varepsilon$.
Et on peut dér. chaque terme pour avoir la dér. de la série.

Dér. $n^{ième}$ de $\frac{1}{(1+x^2)^p}$ est $\frac{P_n}{(1+x^2)^{p+n}}$, P_n degré n.
Quelles sont les propr des polyn P_n. Considd.
$\sin n\varphi$ et $\cos n\varphi$. Ils peuv être repré. par poly homog
en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ de degré n. Il y a un lien intime
entre ces polyn et P_n. ~~Cappp~~ On a

$$(1+x^2)^p = (x+i)^{-p}(x-i)^{-p},$$

expriv dér. $n^{ième}$ par
form de Leibnitz. On a une somme de termes
qui sont termes constts dér. d'ordre q et une d'ordre r,
avec $q+r = n$. On a donc

$(-1)^q (x+i)^{-p-q} p(p+1)\cdots(p+q-1)$

$(-1)^r (x+i)^{-p-r} p(p+1)\cdots(p+r-1)$

Le coef est le nomb de comb de n lettres q à q ou r à r.

$\frac{n!}{q!\,r!}$. Donc on a $(-1)^n n! \sum \frac{p(p+1)\cdots(p+q-1)}{1.2\cdots q} \cdot \frac{p(p+1)\cdots(p+r-1)}{1.2\cdots r} (x+i)^{-p-q}(x+i)^{-p-r}$

Posons $A_q = \frac{p(p+1)\cdots(p+q-1)}{1.2\cdots q}\,\frac{p(p+1)\cdots(p+r-1)}{1.2\cdots r}$. Ce coef est sym en q et en r. On peut donc réunir le term en $(x+i)^{-p-q}$ et $(x+i)^{-p-r}$.

on a $(-1)^n n! \sum_{q \geqslant r} A_q \left[(x+i)^{-p-q}(x-i)^{-p-r} + (x+i)^{-p-r}(x-i)^{-p-q}\right]$

$P_n = (-1)^n n! \sum A_q \left[(x+i)^{n-q}(x-i)^{n-r} + (x+i)^{n-r}(x-i)^{n-q}\right]$

on a ~~effet~~ en fact $(x+i)^{n-q}(x-i)^{n-q}$; on a

$P_n = (-1)^n n! \sum A_q (1+x^2)^{n-q}\left[(x-i)^{q-r} + (x+i)^{q-r}\right]$.

Introd ici la variable φ. On pose $x = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, on a

$x+i = \frac{e^{i\varphi}}{\sin\varphi}$, $x-i = \frac{e^{-i\varphi}}{\sin\varphi}$, d'après Moivre.

$1+x^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi}$. $P_n = (-1)^n n! \sum \frac{A_q}{\sin^{2n-2q}\varphi} \sin^{q-r}\varphi \left(e^{i\varphi(q-r)} + e^{-i\varphi(q-r)}\right)$

$q-r = n-q$.

$P_n = 2(-1)^n \frac{n!}{\sin^n\varphi} \sum A_q \cos(2q-n)\varphi$.

Si nous conn $\cos n\varphi$ en poly ~~en~~ hom de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, on les portera là-dedans, on aura les coef de P_n.

Supp en partic $p=1$. Que devient A_q ? On a $1.2\cdots q$ —

$P_n = 2(-1)^n \frac{n!}{\sin^n\varphi} \sum \cos(2q-n)\varphi$

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$. Dériv. n fois, on a

$$\frac{P_n}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right)$$

$$P_n = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right] . \quad \text{Or} \quad x+i = \frac{e^{i\varphi}}{\sin\varphi}$$

$$\left[e^{(n+1)i\varphi} - e^{-(n+1)i\varphi}\right] /$$

Donc

$$P_n = (-1)^n n! \; \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin^{n+1}\varphi} . \quad \text{Donc coef de } P_n \text{ sont ceux}$$

de $\sin(n+1)\varphi$ — —. Considt le cas particul où $p=1$

et comparons-y cette formule . 2 cas n pair et impair

n impair : on a $\Sigma \cos(2q-n)\varphi = \cos n\varphi + \cos(n-2)\varphi + \dots + \cos\varphi = S$,

mult par $2\sin\varphi$.

$$2S\sin\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi + 2\cos(n-2)\varphi\sin\varphi + \dots + 2\sin\varphi\cos\varphi$$

on a

$$2S\sin\varphi = \sin(n+1)\varphi + \sin(n-1)\varphi + \dots + \sin\varphi$$
$$-\sin(n-1)\varphi - \sin(n-1)\varphi - \dots - 0 .$$

D'où $S = \frac{\sin^{n+1}\varphi}{2\sin\varphi}$, et $P_n = (-1)^n n! \; \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin^{n+1}\varphi}$.

Pour n pair, on a presque même résult : seulement chaque terme doit être divisé par 2 et on doit diviser par 2 le dernier terme.

Supp p entier, non égal à 1. On a exprès les simples qui $\Sigma A_q \cos(2q-n)\varphi$. Ces expr sont fondées sur

Décomp en élém. simples :

$$\frac{A}{(1+x^2)^p} = \frac{A_p}{(x+i)^p} + \frac{A_{p-1}}{(x+i)^{p-1}} + \dots + \frac{A_1}{x+i}$$

$$+ \frac{B_p}{(x-i)^p} + \frac{B_{p-1}}{(x-i)^{p-1}} + \dots + \frac{B_1}{(x-i)}$$

Différ n fois.

$$\frac{P_n}{(1+x^2)^{h+n}} = (-1)^n \sum \frac{(h+n-1)!}{(h-1)!}\left[A_h (x+i)^{-h-n} + B_h (x-i)^{-h-n}\right]$$

mult par $(1+x^2)^n$.

$$P_n = (-1)^n \sum \frac{(h+n-1)!}{(h-1)!} \left[A_h (x+i)^{p-h} + B_h (x-i)^{p-h} \right]$$

Cherch les coef A_h et B_h. Posons $x = y - i$, $x+i = y$

On dér. suiv. puis. croiss. de y A_p , A_{p-1} — sont les coef des puis. nég. de y. On a

$\frac{1}{y^p (y-2i)^p}$ + or dér. pième de $\frac{1}{y-2i}$ est $(-1)^p p! \frac{1}{(y-2i)^p}$

Or $\frac{1}{y-2i} = \frac{(-1)}{2i} \frac{1}{1 - \frac{y}{2i}} = (-1) \left[\frac{1}{2i} + \frac{y}{(2i)^2} + \cdots \frac{y^k}{(2i)^k} \right]$.

Dér. p fois. on a $\frac{k!}{(p-k)!}$, etc. Si h est pair, A_h et B_h sont égaux et de même signes ; autrem de signes contr

On a $\sum A_h \cos(p-h)$; on si de sig contr $A_h \sin(p-h)$.

On a donc un polyn en cos et sin — à term alternés —

P_n satisfait à une éq différ. du second ordre

C'est un cas partic d'un théor plus général

$y = (x-a)^{-\alpha} (x-b)^{-\beta}$. Différent

$(x-a)(x-b) y' + \left(\alpha (x-b) + \beta (x-a) \right) y = 0$.

$P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$. Donc en posant $P_n(y) = z$

$P_n z'' + Q_1 z' + Q_0 \zeta = 0$. Posons $z = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu t$,

on a encor éq du second ordre ou a

$P_2^2 t'' + P_2 Q_1 t' + \ldots = 0$. coef rationnels et polyn de degré au plus égal à 4. Si on partic $\lambda = -\alpha - n$

$\mu = -\beta - n$ t est un polyn entier en x

et on a $P_2 t'' + R_1 t' + R_0 t = 0$.

— Exercice. On pose $y=(x-a)^{\alpha}(x-6)^{-\beta}$, $z=(x-a)^{\alpha-n}(x-b)^{-\beta-n}t$
trouver toutes ces éq du 2e ordre.

Exercices. Constr la tang. en un point d'une cissoïde ou d'une strophoïde appliq de la géom infinitésimale

Démontrer l'identité suiv. On pose $t=\frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c}$

$u=\frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}$. Démontrer $\frac{dt}{dx}\frac{du}{dy}-\frac{du}{dx}\frac{dt}{dy}=\frac{\Delta}{(a''x+b''y+c'')^3}$

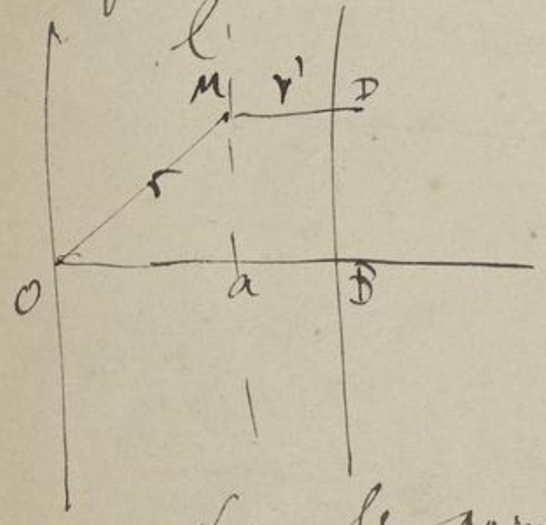
$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

Dém. l'ident $\frac{1}{2}\log\left[1+2x\cos\varphi+x^2\right]=x\cos\varphi-\frac{x^2}{2}\cos 2\varphi+\frac{x^3}{3}\cos 3\varphi+\cdots-\frac{x^n}{n}\cos n\varphi+\cdots$ (forme de Moivre),

pour $x<1$ et pour $x=1$. Faire voir que la série du 2e membre est absolum converg pour $x<1$ et semi-converg pour $x=1$ (elle change quand on change ordre des termes).

Lieu des points dont le prod des dist à 2 points fixes d'une droite fixe est const

$rr'=K^2$.



$\frac{l-r}{l}=\frac{K^2}{x-a}$. En réal $\frac{l\pm r}{l}=\frac{K^2}{x-a}$

4 val pour r. Ou peut prendre tantôt + tantôt − moins donc 4 valeurs.

M sur un cercle qui a O pour centre 2 points d'inters de droite OM avec courbe

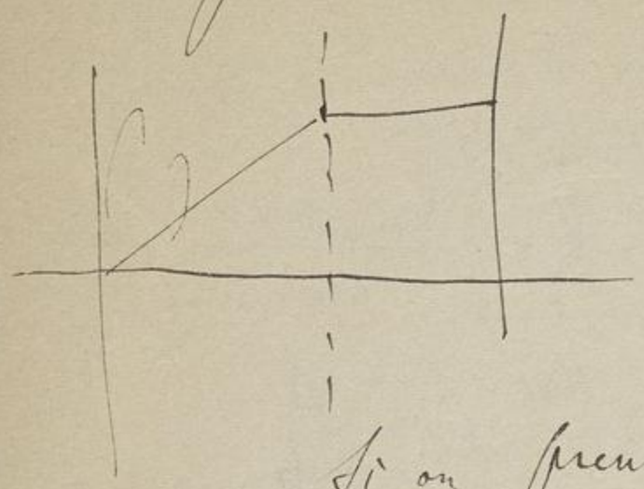
Sous le point situé à l'∞, on voit que la dist à droite BD tend vers zéro.

La dist d'un point O est ∞, prod indéterm, donc point à l'inf fait partie du lieu

Point D est double donc droite coupe en réalité en 4 points

Il y a des cas où cet ordre de considér est très utile

Quels sont les points à l'∞ dont la dist au point O est nulle ?

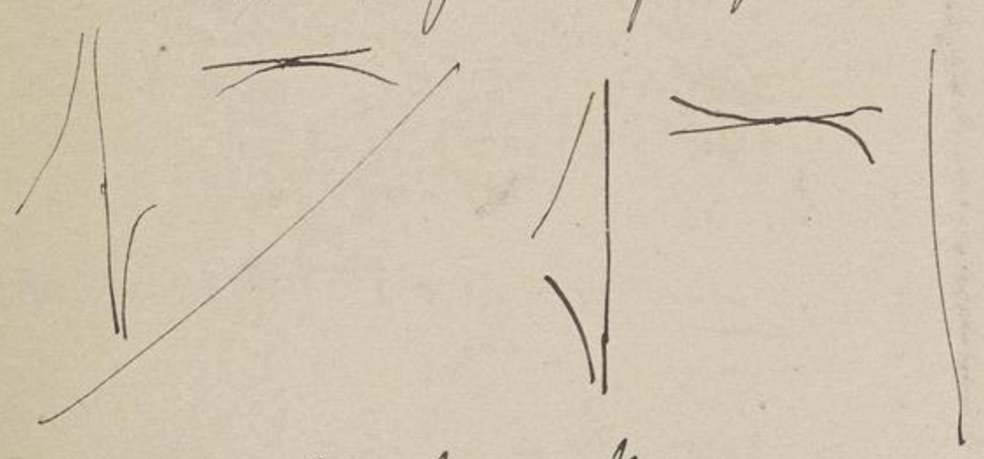


$$(x^2+y^2)(a-x)^2 = K^4$$

$$y^2 = \frac{K^4}{(a-x)^2} - x^2$$

$x=a$ est asympt ; 2 branches de chaque côté.

Si on prend perspective de courbe, on a un point —



2 branches réelles ou imag

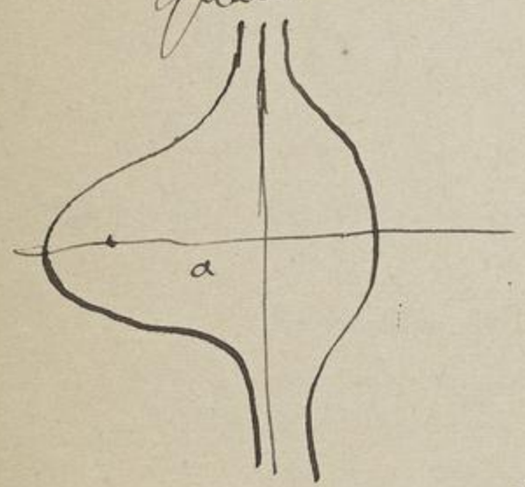
Pour réelles, il faut

$$\left(\frac{K^2}{a-x} - x\right)\left(\frac{K^2}{a-x} + x\right) > 0 \; ; \qquad (x^2 - ax + K^2)(-x^2 + ax + K^2) > 0$$

$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4K^2}}{2}$, $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4K^2}}{2}$ toujr réelles l'une +, l'autre — ;

la point est la plus grande et plus grande que a

quand les imag ! courbe a la forme ci-contre



a

a-t-on des tang paral à ox.

$\frac{df}{dx} = 0$. $x(a-x)^2 - (x^2+y^2)(a-x) = 0$

~~$a^2x - 2ax^2 + x^3 - a^2x + ax^2 - ay^2 + x^3 + xy^2 = 0$~~

Div. par $a-x$ qui ne convient pas !

$x(a-x) - x^2 + y^2 = 0$, $ax - x^2 - x^2 + y^2 = 0$,

$2x^2 - ax - y^2 = 0$. ! ~~K^4~~ , $(ax - x^2)(a-x)^2 = K^4$! $x(a-x)^3 = K^4$.

a-t-on des val de x réelles satisfaisant à cette équat —

$(a-x)^3 - 3(a-x)^2 x = 0$! $a - x - 3x = 0$, $x = \frac{a}{4}$

$\frac{3^3}{4^4} a^4 \geq K^4$ condit de réal des rac ; si ~~$x = K^4$~~ —

Quand on a $f(x,y)=K$, pour points d'inflexion on forme le Hessien et on élim K. Mais ici différent

$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ⟶ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (puisque $y' \neq 0$),

élim y'. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. (A) Tournons

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$ le fact x a y ante Efois.

on remplace donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ par $x(a-x) - 2(x^2+y^2)$.

$(2(x-a)^2 - 2y^2 = 0$ / on pourrait le prévoir. Si m est le degré de $f(x,y)$, le degré de l'équat (A) est ~~$m(m-1)^2(m-2)$~~ /

ici ~~$6+2=8$~~ on peut mettre (A) sous forme d'un déterm

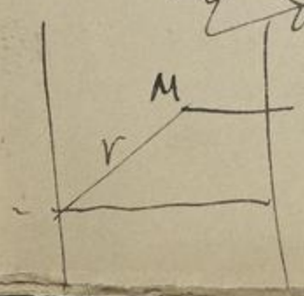
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ / c'est le Hessien où le dernier ~~terme~~ remplacé par zéro.

Degré $3(m-2)$. = ici $3m-2 = 6$; pour $K=0$, 4 droites par orig

or tous les points d'une droite sont des points d'inflexion donc la droite fait partie du lieu et comme le lieu est du 6^{e} ordre il reste une courbe du 4^{e} ordre. Ces 4 droites seront les tang en O : on peut le prévoir. Les tang aux points doubles sont tang au lieu des points d'inflexion. Si on prend le pt double pour orig, on a pour terme de degré le moins élevé le 4^{e} degré. — Une courbe du 4^{e} ordre qui présente un point double se compose de 2 droites. Donc ces cond. suffisent pour montrer que le lieu des points d'inflex se compose de 4 droites. Tang en un point

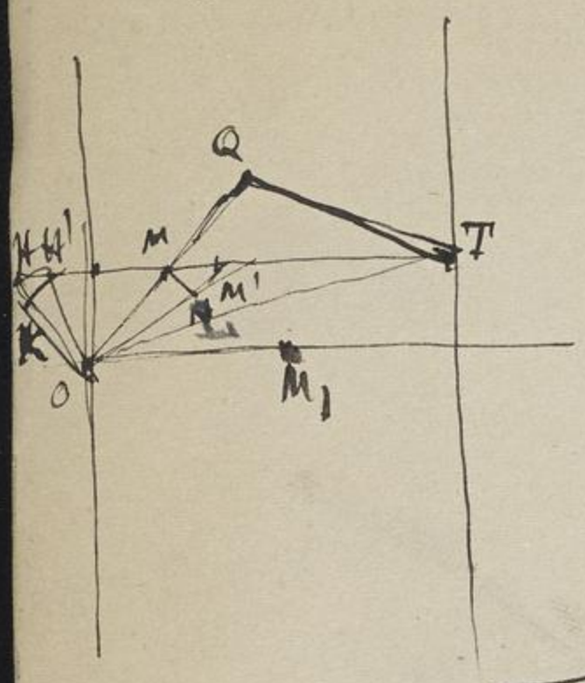
$rr' = K^2$ $\quad r\,dr + r'\,dr' = 0$ /

$r\frac{dr}{dt} = -r'\frac{dr'}{dt}$ — $\frac{dr}{r'} = -\frac{\frac{dr'}{dt}}{\frac{dr}{dt}}$ / donc on prolong



lay d'une quant égale, on mène une perpend

jusqu'à rencontre avec droite fixe ; on joint ce point à M, c'est la tang. —



Tang au point d'infl. — Lieu de ce point

Coupent OH et OH'. On a $HH' = 2MM'$.

H et H' sym par rapp. à M et M' par rapp. à T.

angles $\widehat{MOM'} = H'OK$. $\frac{KH'}{HH'} = \frac{OH}{OM}$

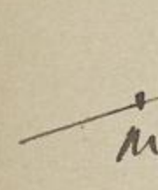
Tri. $KH'H$ semblable à HOM. $\frac{KH'}{HH'} = \frac{HK}{OH}\frac{OM}{HM}$

$\frac{MT}{MM'} = \frac{OH}{HM}$ Divisons $\frac{HH'}{MM'} = \frac{OH^2}{OM^2}$ P.

$\frac{OH}{OM} = \sqrt{\frac{HH'}{MM'}} = \sqrt{2}$. Donc tri. OHM reste toujours semblable à lui-même — De même OMT toujours semblable à lui-même car $\frac{MT}{OM} = \frac{HM}{OM}$, et angle M supplém. de l'autre H'MO.

Donc T décrivant droite D, M décrit lieu semblable, une droite. — Le point milieu M_1 est un point de la droite.

Soient $f(x,y) = c$, les courbes dont on cherche lieu des points d'inflexion. Si on veut que la tang en M soit axe des x, il faut $\frac{df}{dx} = 0$,



et si on veut cela aussi en M', il faut

$\frac{d^2f}{dx^2} = 0$. Or formule des pts d'infl

$$\frac{df^2}{dy^2}\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dxdy} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{df^2}{dy^2} = 0$$

or on voit que cette éq est bien vérifiée, et par suite que le point M est d'inflexion

D'ailleurs par un point passe une seule courbe $f(x,y) = c$ et deux branches touchent MT en M ; et il faut que elles

sorent de part et d'autre. Or les convex. sont de signes contr. comme on voit, donc en P entre M et M' on a un point d'inflex ——

Le lieu est ici un cert nombre de droites. Or les courbes sont $(y-a)^q(x^2+y^2)=k^2$. Or sorent

$(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1)(\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2)(\alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3)(\alpha_4 x+\beta_4 y+\gamma_4)=K$

Le lieu des pts d'infl est un cert nomb de droites)

4e degré, éq des points d'inflex est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

, en rendant homog par rapport de z.

Or 6e ordre. Donc

lieu ~~des~~ est du 6e ordre. Or en réduisant K à 0, on a 4 droites. Donc elles font partie du lieu et il reste une courbe du 2e ordre. Or en diff. en x et y on a 2 éq qui donn le point double. Ces courbes passent en ce point et y ont même tang que la courbe elle même; ce sont donc les tang au point double et le lieu se réduit à 6 droites.

Déterm fonct z_1 z_2 fonct de u_1, u_2, u_3 fonctions de x_1, x_2. On veut $\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(x_1,x_2)}$ en fonct de A, B, C, A', B', C'.

On a le déterm

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \sum \frac{\partial z_2}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots & \sum \frac{\partial z_2}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$\sum \frac{d z^q}{du_i} \frac{du_i}{dx_1}$ On a ici q déterm dont 6 s'annulent

si 3 ne s'annulent pas. $= AA' + BB' + CC'$.

Généri. soient $z_1\ z_2 \cdots z_n$ de p variables $(p > n)$ $u_1\ u_2 \cdots u_p$ / que sont fonct de $x_1\ x_2 \cdots x_n$. Considér.

Le Déter dont terme généri. est $\frac{dz_i}{dx_k}$. On a

$$\frac{dz_i}{dx_k} = \frac{dz_i}{du_1}\frac{du_1}{dx_k} + \cdots = \sum \frac{dz_i}{du_r}\frac{du_r}{dx_k} \quad r = 1, 2, \cdots p$$

Le déter est formé de som parallel. Un tel déter en se dével suivant par rapp à ses diff colonnes peut se mettre sous forme de p^n déterm (p à la puiss n). Si dans chacun des colon de ces déter, on a $\frac{dz_i}{du_r}$ #, ce déterm. est nul. Il reste

$$\sum \frac{d(z_1 \cdots)}{d(u_{\alpha_1} \cdots)} \times \sum \frac{d(u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \cdots u_{\alpha_n})}{d(x_1 x_2 \cdots x_n)}$$

Les nombs $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n$ peuvent être toutes les combs de val depuis 1 jusqu'à p.

On peut donner une autre démonst reposant sur une propr des déterm. Reron en déter à 6 colon

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 0 & 0 \\ g & h & k & 0 & 0 & 0 \\ l & m & n & p & q & r \\ l' & m' & n' & p' & q' & r' \\ l'' & m'' & n'' & p'' & q'' & r'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \left| \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix} \right|$$

Prenons le dével de ce déter

$$\left[\, a \,\middle|\, \quad \middle|\, - b \,\middle|\, \quad \middle|\, \cdots \,\right]$$

Le théor vrai pour s colonnes, on a chacun de ces déter est égal à un mineur multiplié par l'élém restant

On a $\left[a \begin{vmatrix} e & f \\ k & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & g \\ f & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & k \end{vmatrix} \right], \begin{vmatrix} p & q & r \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$

c'est $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & k & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ C'est général.

appliq

Dévelop

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \frac{\partial z_1}{\partial u_1} & \frac{\partial z_1}{\partial u_1} \\
0 & 1 & 0 & \frac{\partial z_2}{\partial u_2} & \frac{\partial z_2}{\partial u_2} \\
0 & 0 & 1 & \frac{\partial z_3}{\partial u_3} & \frac{\partial z_3}{\partial u_3} \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \phi & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 & \phi
\end{vmatrix}$$

$$\sum 1 \times \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_2, u_3)} \times \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2)}$$

on peut dével autrem. On mult 1ère col la 2e mult par $\frac{\partial z_1}{\partial u_1}$, fois 4e col, j'ai

la 3e par $\frac{\partial z_1}{\partial u_3}$, la 1re par $\frac{\partial z_1}{\partial u_2}$.

Je formerai 5e col en retr la 1re col

et on a $\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2}
\end{vmatrix}$$

on a $\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & & & \end{vmatrix}$

Dér. part de Z en X, Y quand on a relat linéaires.

$X = ax + by + cz$
$Y = a'x + \text{———}$. On donne p, q, r, s, t.
$Z = a''x + \text{———}$

On demande dér. de Z : P, Q, R, S, T.

Meth génér. $dZ = P\,dX + Q\,dY$
$dz = p\,dx + q\,dy$

Substituant à différents puis égalant exprès

on a P à Q.

Sous dér. seconde, quelques-uns ont pris

$d^2Z = R\,dX^2 + 2S\,dX\,dY + T\,dY^2$,
$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$,

on n'a pas le droit d'écrire ces 2 relat à la fois. Supp accroissem dx et dy, il en résulte dX, dY, dZ. Donc nouvel accroissem égal aux préc dx, dy, il en résulte

$d^2X = d^2x + d^2X + d^2y + d^2Z + d^2z + d^2Z$

on n'a pas le droit de supposer que les 2 accr sont égaux. En tirer par exemple $Z = f(X)$,

et $X = f(x)$. Car en appliq on aurait $d^2X =$

$d^2Z = \frac{d^2Z}{dX^2} dX^2$ et $d^2Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ —— . Et de là

on tirerait $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} \frac{\partial Z^2}{\partial x^2}$. Ce qui est faux. —

Voici alors comment on peut faire —

Rem Déc. prem — On peut résoudre en x, y, z.

on introd. les mm de $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$. On a pour $\Delta = 1$

$x = AX + A'X + A''Z$, $y = BX +$ —— , $z = CX + \dots$

de façon que $A = b'c'' - b''c'$, $A' = cb'' - bc''$ ——

Donne à X accr dX en laiss y const —

$dx = (A + A''P)\, dX$, $dy = (B + B''P)\, dX$.

$dz = (C + C''P)\, dX = p\,dx + q\,dy$. Elim dx,

$P(C'' - A''p - B''q) = Ap + Bq - C$.

ou en pos. $C'' - A''p - B''q = D$, $DP = Ap + Bq - C$

et $DQ = A'p + B'q - C'$.

Diff $X = ax + by + c$, etc

$dX = (a + c'p)\, dx + (b + cq)\, dy$

$dY = (a' + c'p)\, dx + (b' + c'q)\, dy$

Dirons dx et dy en fonct de dX et dY.

$D\, dx = (b' + c'q)\, dX - (a' + c'p)\, dY$

$D\, dy = -(b + cq)\, dX + (a + cp)\, dY$

d'où $(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) D^2 = r[(b' + c'q)^2 dX^2 - 2(b' + c'q)(a' + c'p)\, dX\,dY + (a' + c'p)^2 dY^2]$

$+ 2s[(b + cp)(b' + c'q)\, dX^2 + (b' + c'q)(a + cp)\, dX\,dY + (a + cp)(b + cq)\, dX\,dY$

$+ t[(b + cq)^2 dX^2 - (b + cq)(a + cp)\, dX\,dY + (a + cp)^2 dY^2]$

Or d'après d^2x, d^2y, d^2z. On a

$$d^2Z = R\,dx^2 + 2S\,dX\,dY + T\,dy^2.$$

$$d^2x = A''\,d^2Z$$

$$d^2y = B''\,d^2Z$$

$$A''p\,d^2Z + B''q\,d^2Z + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = C''\,d^2Z$$

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = D\,d^2Z.$$ Remplaçons par leurs valeurs, et égalons les coeff ; on a

$$D^3R = r(b'+c'q)^2 - 2s(b'+c'q)(b+cq) + (b+cq)^2 t$$

$$D^3R = \begin{vmatrix} r & s & b+cq \\ s & t & b'+cq \\ b+cq & b'+c'q & 0 \end{vmatrix}$$

De même $D^3S = \begin{vmatrix} r & s & a+cp \\ s & t & a'+c'p \\ b+cq & b'+c'q & 0 \end{vmatrix}$

$$D^3T = \begin{vmatrix} r & s & a+cp \\ s & t & a'+c'p \\ a+cp & a'+c'p & 0 \end{vmatrix}.$$

Telles sont les expres de R, S, T sous forme de déterm

$RT - S^2$ est un invariant et égal à $rt - s^2$, en effet $rt - s^2 = 0$ est sont. déval. Or la propr est projective.

Meth gén : pour montrer qu'un quant est un invariant — on fait subst linéaire, il faut montrer que $rt - s^2$ ne change pas. On montre

qu'il ne chang pas pour une subst partic, et par
suite pas pour toute combin de cette subst part
Or la subst. donnée équivaut à $X = x + \alpha y$ et
$Y = y$ avec $Z = z$. Une autre subst conserve à
permuter X et Y, ou bien X et Z. En fait ces
permut, sont comb ces 3 opér. ~~tant de~~ un cert
nomb de fois, on a $X = ax + by + cz$, etc
Démont donc que $rt - s^2$ ne chang pas pour chacune
quelc de ces substitut. Or cela est facile pour
la 1 opér. qui consiste à permuter X et Y, puisqu'il ya
dym ont les 2 variables - Pour $X = x + \alpha y$,
on a R qui ne varie pas, et donc $rt - s^2$ se
change en $RT - S^2$. Reste la 2e opérat quand on
permute X et Z; On a $x = Z$, $y = X$, $y = Y$;
Dans D C'' est nul, $A'' = 1$, $B'' = 0$. Donc
$D = A'' B'$. Alors les expres $D^3 R$ se simplif

Exercices pour mercredi. Lieu des pts d'inflexion des diverses conchoïdes
d'une même droite par rapp à un même point.
Trouver ce que devient $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$,
quand on rempl x, y, z par X, Y, Z définies
par $X = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $Y = \alpha' x +$ ——
$Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$; on suppr. que α, β, γ
α', β', γ', $\alpha'' \beta'' \gamma''$ sont cosinus direct
de 3 droites rectang (Changem de coord rectang

Dérivée $n^{ième}$ de $(x-a)^n(x-b)^n(x-c)^n$.

que devient $\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dt & dt^2 & dt^3 \\ dy & d^2y & d^3y \\ dt & dt^2 & dt^3 \\ dz & d^2z & d^3z \\ dt & dt^2 & dt^3 \end{vmatrix}$ où x, y, z

sont 3 fonct de t, quand on rempl t par u liée à t par $t=\varphi(u)$; ou t, quand on rempl x, y, z par 3 fonct X, Y, Z liées à x, y, z par

$X = ax+by+cz$, $Y = a'x+b'y+c'z$, $Z =$ —

ou a, b, c, a', b', c', a' —— sont des Constantes.

(Propriété d'invariants).

Soit déterm $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d & \cdots & u & \cdots \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \cdots & \cdots & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l_k & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{vmatrix}$ (1)

Dans le Déterminant se trouvera le terme développem de $(-1)^{un} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & \cdots \\ c_2 & d_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & l_k \end{vmatrix} \times D$ (2)

D'tant le mineur obtenu en barrant dans Δ les lignes et colonnes des éléments de $\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & \cdots \\ c_2 & d_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & l_k \end{vmatrix}$

c'est à dire $\begin{vmatrix} a & b & u & \cdots \\ \cdots & \cdots & u_{k+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ en effet tous les termes du produit D font partie du déterm Δ comme formés en prenant seul élément dans chaque ligne de Δ ; le signe est le même, il suffit de considérer que la somme est alternée et

Prenons $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{vmatrix}$ cherchons comment le Déterminant D entre dans le déterminant Δ. On prend un élément dans chaque ligne et chaque colonne. On peut donc faire $a_1 b_2 f_3 a_3 b_4 f_5 a_5 b_6 f_4$ et $c_1 d_2 e_3, c_4 d_5 e_6, c_6 d_6 e_6$

D $= \begin{vmatrix} c_2 & d_2 & e_2 \\ e_3 & \text{——} & \\ c_4 & \text{——} & e_4 \end{vmatrix}$ entre dans le déterminant D. Dans le développement

égaux à zéro. Reste

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 & f_5 \\ a_6 & b_6 & 0 & 0 & 0 & f_6 \end{vmatrix}$$

On s'y comporte comme dans Δ. aux éléments de la 1ère ligne ajoutons ceux de la seconde, de ceux de la seconde retranchons ceux de la 1ère de ceux de la seconde ajoutons ceux de la troisième, retranchons ceux de la 3e de ceux de la 2e,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_2 & d_2 & e_2 & f_1 \\ -a_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & -f_1 \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_2 & d_2 & e_2 & f_1 \\ -a_1 & -b_1 & c_3 & d_3 & e_3 & -f_1 \\ +a_1 & b_1 & c_4 & d_4 & e_4 & f_1 \\ -a_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & -f_1 \\ a_5 & b_5 & 0 & 0 & 0 & f_5 \\ a_6 & b_6 & 0 & 0 & 0 & f_6 \end{vmatrix}$$

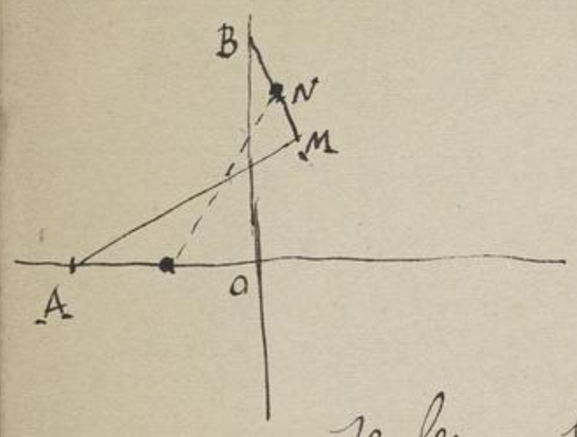
$$+ \begin{vmatrix} c_2 & d_2 & e_2 & a_1 & b_1 & f_1 \\ c_3 & d_3 & e_3 & -a_1 & -b_1 & -f_1 \\ c_4 & d_4 & e_4 & a_1 & b_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 & -f_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & f_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 & f_6 \end{vmatrix} = -D D_1 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & f_1 \\ a_5 & b_5 & f_5 \\ a_6 & b_6 & f_6 \end{vmatrix}$$ qui sont obtenus en barrant dans Δ les lignes & colonnes de D.

On a: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 1 & 0 & a'' & b'' \\ 0 & 0 & 1 & a''' & b''' \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ On a $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & a'' & b'' \\ 1 & a''' & b''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Big| \quad \Big| + -$

Donc $(a_1 b_2 - b_1 a_2)\begin{matrix}(a'b''-b'a'') \\ +(a_2 b_3 - b_2 a_3)(\quad)+ -\end{matrix}$

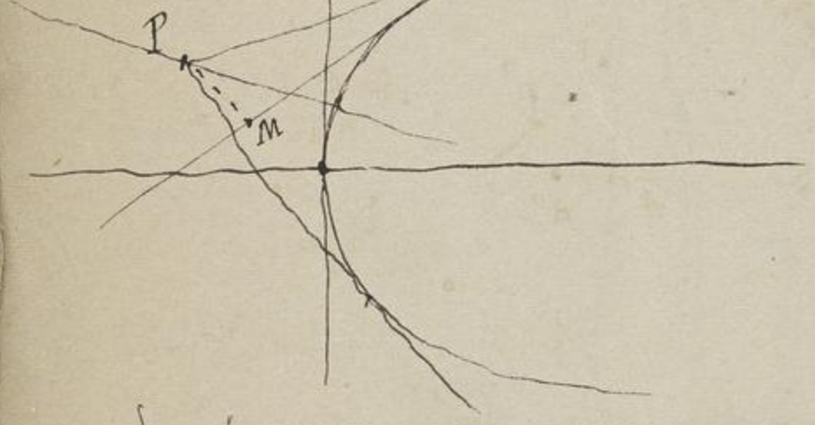
Propriété vue plus haut Cte terme fonct.

Tang en un point d'une cissoïde ou d'une strophoïde. On démontr
d'abord Ces courbes sont des podaires de la parabole

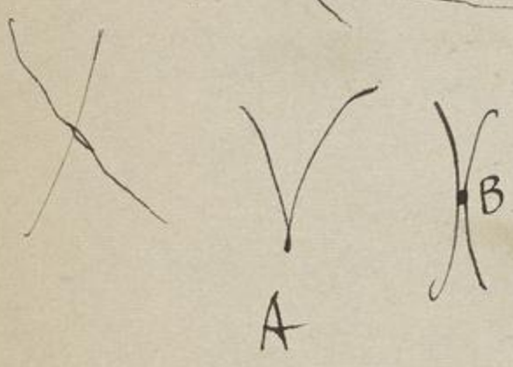


M engendre une cissoïde, N une strophoïde
Considt un point lié invariablement à la figure
AMB. Cherch la tang. à ce point; ~~On a ce~~
point engendre une podaire de parabole: on a
donc aisément sa tangente. On a donc non
seulem la tang en M et N, ~~mais en tout point d'~~,

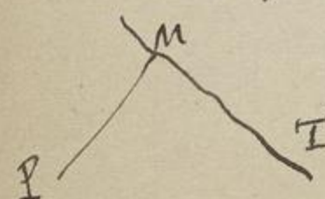
Quelle est la nature des podaires d'une parabole?
Quel est son degré? On mène des droites par P; on mène à la
parabole des tang perp à cette droite,
or on a une seule tang telle.
Donc P est double, car de P deux
tang à la parabole. ~~et ce sont~~
~~les tang à ce point~~ Le lieu est du
2e degré. Pour que le pt double soit
réel, il faut P extér. à parabole.



En gén. quand 2 tang se confondent
on a un point de rebrou — A, ou un
point B — Mais B est impossible pour 2e ord

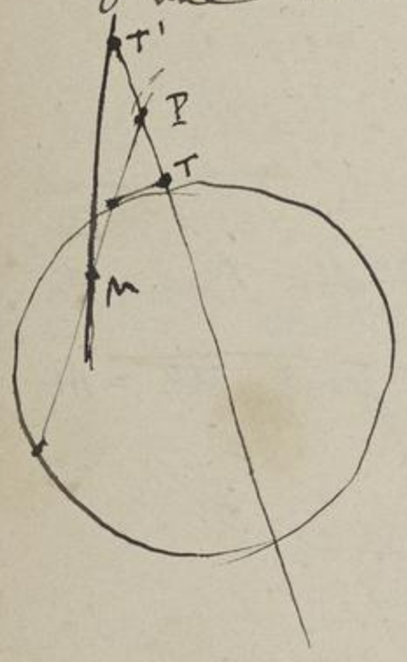


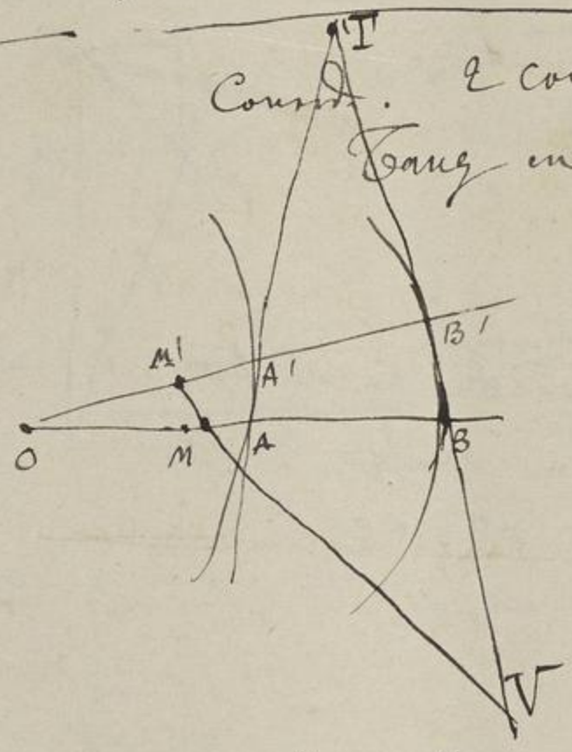
Donc on a un pt de rebroussem.
Pour que M aille à C∞, il faut tang rejetée à l'∞
(mais sa lim étant paral à ox) alors PM perp à ox;
on a ainsi 2 direct — Enfin PM et MT parallèles, les droites
perp à elles-mêmes sont $y = \pm x\sqrt{-1}$, ce sont les paral aux
asympt du cercle, pts circulaires de l'∞. ~~Donc toute~~
Réciproq — courbe courbe du 2e ordre ~~passant~~ ayant
2 pts doubles, 2 à l'∞. On a à trouver l'enveloppe de MT;
quelle est la classe de la courbe? Comb de tang.
par un point? ~~Et~~ nous allons prendre une infin
de pts et ces points nous les prendrons circulaires
à l'∞. MT étant menée, PM est déterm



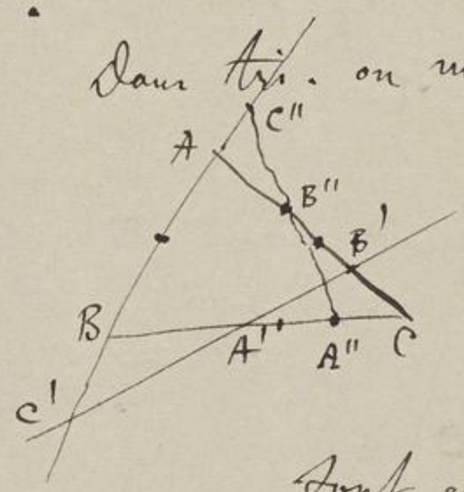
∴ ~~en combien de~~ Elle coupe combien des points M
en un seul point. — Quels sont les points où la

droite de l'∞ touche la courbe. Pour que MT soit à l'∞, il faut M à l'∞. Quand donc un point M de la courbe à l'∞. Si M est circul à l'infty il est sur $y = \pm x\sqrt{-1}$, alors MT n'est plus rejetée à l'∞, parce que 2 droites quelc par M sont perp entre elles. Donc 2 tang. — (quand on veut classer on prend droite fixe par un point de cette droite on mène tang, et on voit que les points de contact de l'intersect viennent se confondre pour p posit. avec le point de la droite) la classe est m+p.). On voit que l'envel. de MT est une podaire de parabole, et peut être engendrée à la manière d'une cissoïde





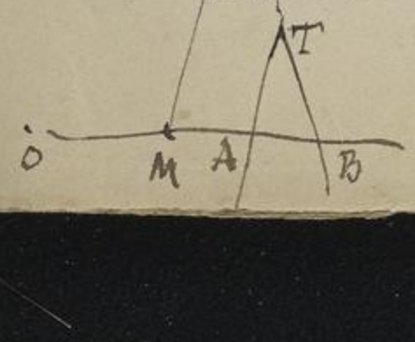
Dans Aff. on mène transversale on prend les symétrs de A' B' C' par rapport aux milieux correspondants A'', B'', C''. Ils sont en ligne droite.



~~Dr ou AC''.~~ Il faut montrer $\dfrac{AC''.CB''.BA''}{BC''.AB''.CA''} = 1$.

$\dfrac{AC'.CB'.BA'}{BC'.AB'.CB'} = 1$. ~~Cela~~ Donc — —

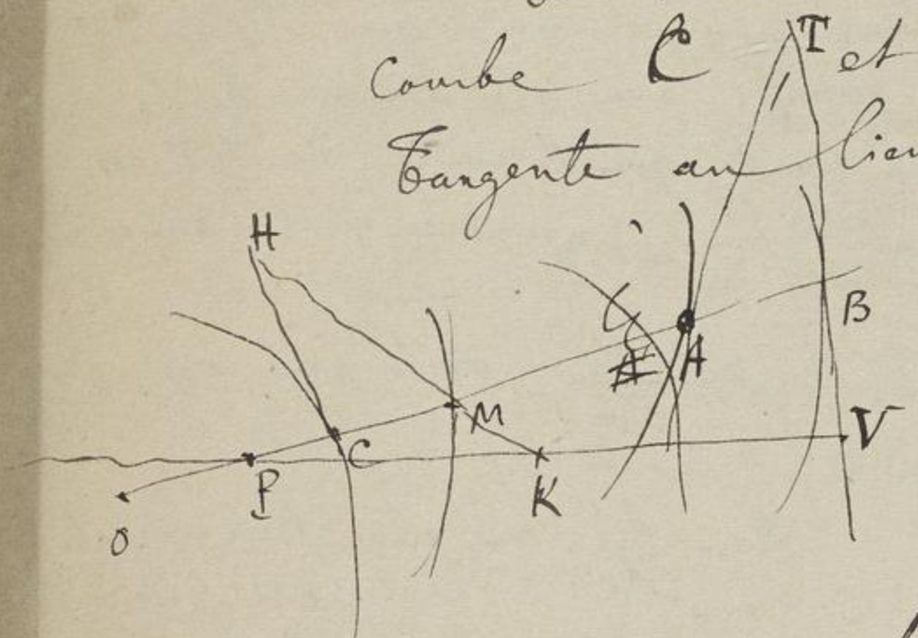
Alors si A et A' se confs, c'est la tang en A, de même BB' tang en B, et MM' tang en M. D'où la construction de la tang MM'. Cette tang ne dépend pas de la forme gén. des courbes A et B, mais seulement des tang en A et B: on peut si l'on veut remplacer courbe B par sa tang et courbe A par cercle passant en O, or on a alors une courbe à génerat cissoïdale — Donc courbes conchoïdales se réduisent aux générations cissoïdales.



Soient 2 droites AT et BT; et OM = AB, lieu de M est une hyperbole.

Car on voit que la courbe est du second degré et que les
direct asympt sont réelles et paral aux 2 droites. On aura
la tang en M ~~en prenant T~~

On donne 2 courbes A et B, une sécante, puis une
courbe C et enfin M tel que cM = AB.

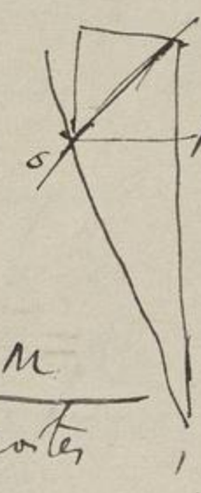


Tangente au lieu de M.

Prenons oP = cM = AB.

On mène PV, (BV = BT).

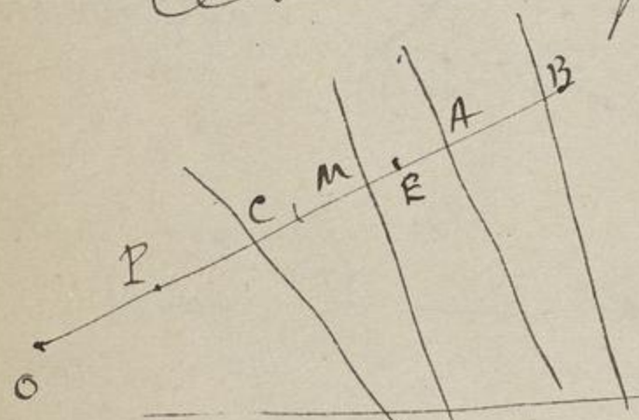
On a

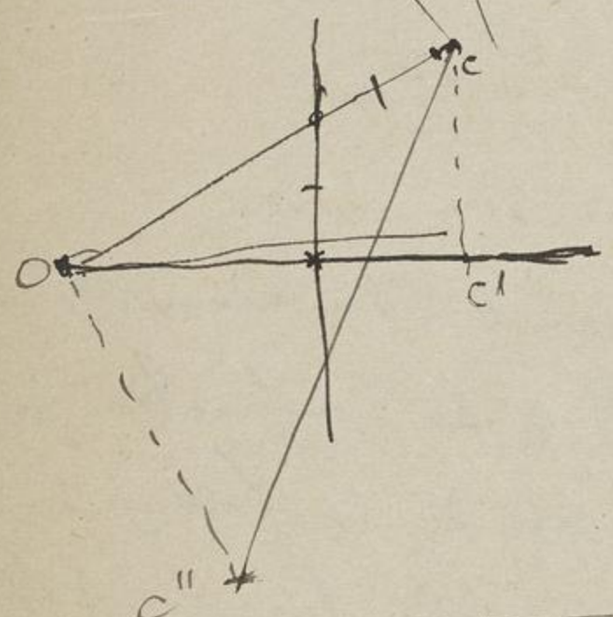


étant permises.

on prend ME = AB

Ce serait encore plus facile si C et M
Si quatre droites,
~~On~~ OP = CE





oc et oc' sont les 2 vit relat et
d'entraînement. On démontre facilement
que oc est la vit. relat de C et que
la vit. d'entraînement de C (perpend à oc)
est égale à oc'.

On pose $t_1 = \frac{X_1}{X_{n+1}}$, $t_2 = \frac{X_2}{X_{n+1}}$, ... $t_n = \frac{X_n}{X_{n+1}}$,

avec $X_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + .. + b_i x_n +$. Calculer le fonctionnel —,

Exercice relatif à $-\frac{1}{2}\log(1 - 2x\cos\varphi + x^2) = x\cos\varphi + \frac{x^2}{2}\cos\varphi + ..$

$+ \frac{x_n}{n}\cos n\varphi +$ —

On peut dévelop par Mac-Laurin. On calcule les
dériv des succes $y = -\frac{1}{2}\log(\quad)$,

$$y' = -\frac{1}{2}\,\frac{2(x-\cos\varphi)}{1-2x\cos\varphi+x^2} = \frac{\cos\varphi - x}{1-2x\cos\varphi+x^2}$$

Quand on a une fonct rationn pour avoir dér. $n^{ième}$, on décomp. en fonct simples.

$x^2 - 2x\cos\varphi + 1 = 0$, $x = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$

on a $y' = \dfrac{A}{x-e^{i\varphi}} + \dfrac{B}{x-e^{-i\varphi}}$, Calcul A. B s'obtiendra en y changeant i en $-i$. On a $\dfrac{\cos\varphi - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}$, $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$

$\dfrac{\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

Cherch. dér. $n^{ième}$ de y',

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2}(x-a)^{-n+1}\cdot = \frac{(-1)^n 1.2\ldots n}{2}\left(\frac{1}{(x-e^{i\varphi})^n} + \frac{1}{(x-e^{-i\varphi})^n}\right)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\left(\frac{1}{e^{ni\varphi}} - \frac{1}{e^{-ni\varphi}}\right) = 1.2\ldots(n-1)\,\frac{e^{ni\varphi}+e^{-ni\varphi}}{2} = \cos n\varphi$$

coef de x^n $\frac{y^{(n)}}{1.2\ldots n} \frac{1.2\ldots n-1}{1.2\ldots n}\cos n\varphi$, alors $\frac{\cos n\varphi}{n}$. Qual est le term complément. ?

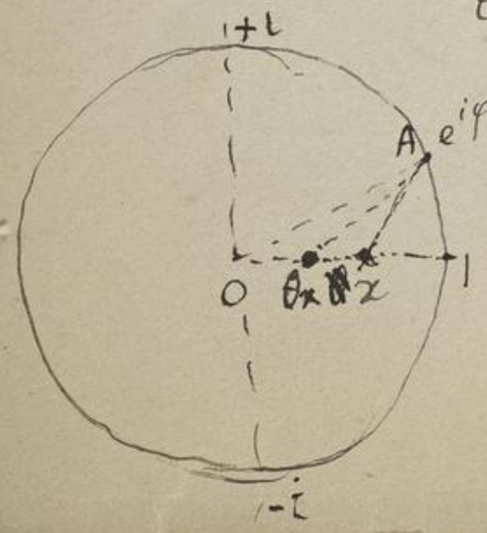
$$R_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{1.2\ldots n}{2}\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\left(\frac{1}{(e^{i\varphi}-\theta x)^{n+1}} + \frac{1}{(e^{-i\varphi}-\theta x)^{n+1}}\right)$$

Ce reste tend-il vers 0, Je vais dém. que

$\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{x}{e^{i\varphi}-\theta x}\right)^{n+1}$ tend vers zéro, alors l'autre terme

qui ne diffère que par chang de i en $-i$ tend vers zéro.

Considr. mod $\dfrac{x}{e^{i\varphi}-\theta x}$. Cercle de centre O, rayon 1



Suppr x extér. à ce cercle, $\dfrac{x}{e^{i\varphi}-\theta x}$ peut être >1, et on ne peut dém. que R_n tend vers zéro, et effectivement il ne tend pas vers zéro. Prenons x intér., on peut le supp réel car autrem on changerait φ en $\varphi+$ — . + Le mod $(e^{i\varphi}-\theta x)$ = dist. de $e^{i\varphi}$ à θx

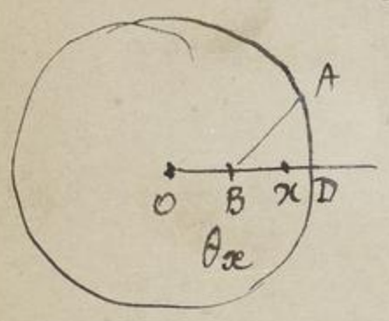
mod $\frac{x}{e^{i\varphi}-\theta x}$ est <1, quand x est <1 et positif. Tant que Ax pas plus petit que αx, on voit que R_n tend vers zéro, et la forme du reste que nous avons adoptée convient. Ainsi elle ~~ne~~ convient pour $x < \frac{1}{2}$. Il faut employer l'autre forme pour $x > \frac{1}{2}$: c'est $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n}(1-\theta)^{n+1} f^{(n+1)}(\theta x) =$

$R_n = \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n}(1-\theta)^n \cdot \left(\frac{1}{(e^{i\varphi}-\theta x)^{n+1}} + \frac{1}{(e^{-i\varphi}-\theta x)^{n+1}}\right)$. Et envisageons

seulement $\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(e^{i\varphi}-\theta x)^{n+1}}$ / $\left[\frac{x(1-\theta)}{e^{i\varphi}-\theta x}\right]^n \frac{x}{e^{i\varphi}-\theta x}$ qui ne devient pas infini, car il faudrait $-e^{i\varphi} = \theta x$, or $e^{i\varphi}$ est imag et x non.

mod $\frac{x-\theta x}{e^{i\varphi}-\theta x}$. On doit avoir $AB > Bx$,

mod $(x-\theta x)$ est Bx, et mod $(e^{i\varphi}-\theta x) = AB$.



Or cela a lieu dans tous les cas, ~~sauf~~ (D) alors le dév. n'a plus lieu pour $\varphi = 0$, Supp $x = 1$, mais pour toutes les autres valeurs. —

Cherchons la série dérivée de la 1ère, et cherchons son reste, il est la dér. par rapp à x du reste de la 1ère.

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}\frac{e^{-i\varphi}}{1-xe^{-i\varphi}}$, dont le terme est $\frac{e^{i\varphi}}{1-xe^{i\varphi}}$

$e^{-i\varphi} + xe^{-2i\varphi} + x^2 e^{-3i\varphi} +$ ——
$+ e^{i\varphi} + xe^{2i\varphi} + x^2 e^{3i\varphi} +$ ——

$= \cos\varphi + x\cos 2\varphi + x^2 \cos 3\varphi +$ ——

quand x plus petit que 1, on a
quand $\frac{dR_n}{dx} < K$, quel que soit n.
$\lim \frac{dR_n}{dx} = 0$, donc on peut prendre $\frac{dR_n}{dx} < \varepsilon$.

Supp le cas le plus difficile $x = 1$.

On a $\lim R_n = 0$, car les 2 membres nul ; on a

$$R_n(1) - R_n(x) + R_n(x) - R_n(0)$$

or $R_n(1) - R_n(x) = R_n(\xi) - R_n(\eta)$, on supp que x ait val déterm entre 0 et 1, on ~~supp $0 < \xi < x < \eta$~~, supp $1 > \xi > x > \eta > 0$.

or on a là la série de Taylor. $R_n(1) = 0$, $R_n(\xi) <$ ~~K~~

$1 - x < \frac{1}{qK}$, $R_n(1) < \varepsilon$, donc $\lim R_n$ nulle ———

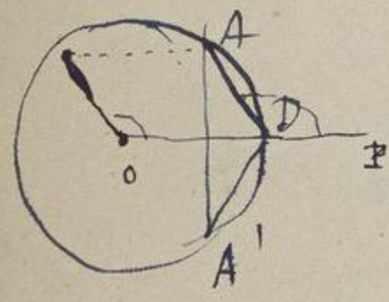
Cherch Lim. de $x \sin\varphi + \frac{x^2 \sin 2\varphi}{2} + x^3 \frac{\sin 3\varphi}{3} + \cdots$.

C'est la précéd où on a rempl les cos par sinus.

Rempl cosφ par $\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, on a ~~non~~ le log $\frac{x + e^{i\varphi}}{x - e^{-i\varphi}}$

$x e^{i\varphi} + \cdots = 1 - x e^{i\varphi} \cdots$ / $1 - x e^{-i\varphi}$, en faisant la différ. on a ~~Σ~~ $\sin\varphi + x^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} + \cdots = \Sigma \frac{1 - x e^{i\varphi}}{1 - x e^{-i\varphi}}$.

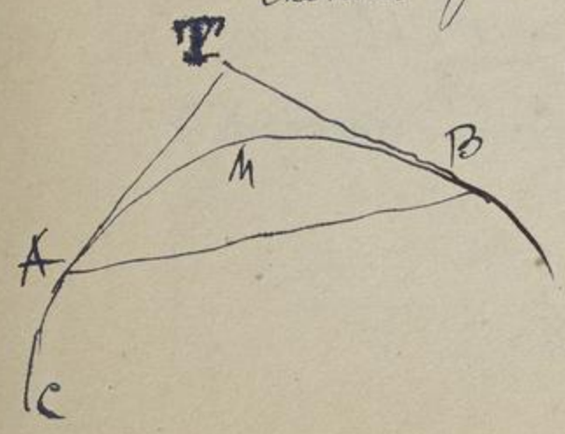
Sous $x = 1$, on a $\Sigma \frac{1 - e^{i\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}$. Le mod est 1.



$e^{i\varphi}$ en A, $A' e^{-i\varphi}$, mod $+e^{i\varphi}$ est AD, mod $1 - e^{-i\varphi}$ est A'.

Argum de $\frac{1 - e^{i\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}$ est l'angle ADA'. C'est la val de la série.

Exercices pour mercredi — On donne une courbe C et dans cette courbe une corde mobile AB. On demande de construire le point où AB touche son enveloppe



Définir du mouvem de AB : 1° que AB est constante ; 2° problème arc AMB est constant, 3° cire AMB est constante ; 4° angle ATB est constant.

Je suppose que les nombres $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ forment une série de nombres positifs réels et décroissants.

Démontrer $\mod(a_0 + a_1 e^{i\varphi} + a_2 e^{2i\varphi} + \dots + a_n e^{ni\varphi}) < \left[\mod 2a_0 \over \mod(1 - e^{i\varphi})\right]$.

On donne l'équat $rt - s^2 = 0$, $\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 0$. On demande ce qu'elle devient quand on y rempl x et y par ρ et ω déf par $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$.

Séparer les rac réelles des équat suivantes

$$x = 2\sin^2 x + 1$$

$$x(e^x - 1) = e^x + 1$$

$$x^2 + e^{2x} = 2x$$

---

x, y, z fonct de t et $t = \varphi(u)$. Calculer le déter

$$D = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & — & — \\ \frac{d^3x}{dt^3} & — & — \end{vmatrix}.$$

On a $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2} =$ ——

On remplace —, puis on transf ce déter en ajout à cet colon les autres multipliées par facteurs convenables, et on arrive à

$\Delta\left(\frac{du}{dt}\right)^6 = D$, où Δ est le déter formé avec les coefficients de D avec t.

On peut encore appliq. règle de Cauchy sur mult. des déterm

2e applic $X = ax + by + cz$, $Y = a'x + b'y + c'z$, $Z = a''x + b''y + c''z$. Considérons le déterm Δ' formé avec X, Y, Z comme D avec les x, y, z. On a

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt} & a\frac{d^2x}{dt^2} + — \\ a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt} & \\ a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} & \end{vmatrix}$$

On a $\Delta' =$ prod de deux déterminants

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^3x}{dt^3} & \frac{d^3y}{dt^3} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix}.$$

Supp maintenant qu'on fasse les 2 substitut. Soient

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & & \\ & & \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dt} & \frac{dY}{du} & \frac{dZ}{du} \\ \frac{d^2X}{du^2} & \cdots & \\ \cdots & & \end{vmatrix}.$$

Cherch $\frac{\Delta}{\Delta_1}$. Soient maintenant. $\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & - \\ = & - \end{vmatrix}$. On a $\Delta = \Delta' \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^6$

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\left(\frac{du}{dt}\right)^6}{\delta}, \quad \text{car } \Delta_1 = \Delta' \delta. \quad \left(\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \right)$$

Si on avait fait un changt rectang de coord, n'aurait-on pas trouvé d'autres invariants? Prenons

$$S = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad \text{c'est } \frac{ds^2}{dt^2}. \quad \text{Ici } \delta = 1$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ a pour coef $a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$. ——, ainsi $\frac{ds^2}{dt^2}$ ne change pas. Chang la vari indép. on a $\frac{ds^2}{dt^2} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^2$ au lieu de $\left(\frac{du}{dt}\right)^6$.

Quels seraient les autres invariants? Prenons

$$T = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2, \quad \text{d'appel cela } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

$$\begin{vmatrix} X' & X'' \\ Y' & Y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax' + by' + cz' & ax'' + by'' + cz'' \\ a'x' + b'y' + c'z' & \end{vmatrix}$$

appel A, B, C, A', B', C', —— déterm de $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

$= - C''y'x'' + C''x'y'' + B''(\quad) + A''(\quad)$

$\Sigma^2 + \Pi^2 + H^2 + Z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. C'est un invariant
(p.r. x, y, z)

Chang la variable on a $\left(\frac{du}{dt}\right)^6 \times \left|\begin{array}{} \\ \\ \\ \end{array}\right|$.

Ainsi ils admett pour fact $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{du}{dt}\right)^6$.

Forme des invar. absolus. on a $\frac{\Delta}{T}$ et $\frac{\Delta}{S^3}$.

$\frac{\Delta}{T} = 0$

$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$. Calcul $\frac{d^2V}{dX^2} + \frac{d^2V}{dY^2} + \frac{d^2V}{dZ^2}$

$X = ax + by + cz$, $Y = a'x + \quad$, $Z = a''x + \quad$, a, b, c
cos de 3 direct rectang. Invariant absolu Pourait-on le prévoir?

Considérons $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, inverse de la dist de l'orig à (x, y, z). Cette express
satisfait à l'équat donnée. On a on dérive. $-x.R^{-\frac{3}{2}}$

$-R^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x R^{-\frac{5}{2}} . 3x^2$.

$R^{-\frac{5}{2}}\left[2x^2 - y^2 - z^2\right) + R^{-\frac{5}{2}}\left[2y^2 - z^2 - x^2\right] + R^{-\frac{5}{2}}\left[\quad\right] = 0$

Considérons maint $\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}$, on a le même résult,
elle satisf. Ces expres satisf aussi, si on les mult
par coef constants et si on fait leur somme.
Donc il y a-t-il d'autres équat du 2e ordre à laquelle
satisfont des expressions de cette forme $\Sigma \frac{A}{\sqrt{\quad}}$.
La forme de cette expression reste la même pour un chang rectang
et par suite satisfait à cette équat (potentiel).
Si V est la température $V + dV$ au bout de dt, $\frac{dV}{dt}$ est
une const multipliée par $\frac{d^2V}{dx^2} + \quad$).

Dér. p^ième de $(x-a)^n (x-b)^n (x-c)^n$.

Formule de Leibnitz généralisée à un prod de 3 facteurs.

$$\frac{d^p(uvw)}{dx^p} = \sum \frac{p!}{\alpha!\beta!\gamma!} \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} \frac{d^\beta v}{dx^\beta} \frac{d^\gamma w}{dx^\gamma}, \quad \alpha+\beta+\gamma = p.$$

$u = (x-a)^n$, $v = (x-b)^n$, $w = (x-c)^n$.

$$U = p! \sum \frac{n!}{(n-\alpha)!\,\alpha!}.$$

$$n(n-1)\cdots(n-\alpha+1)(x-a)^{n-\alpha} = \frac{n!}{(n-\alpha)!}(x-a)^{n-\alpha}.$$

$$\frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!} = C_n^\alpha, \quad U = p! \sum C_n^\alpha C_n^\beta C_n^\gamma \cdot (x-a)^{n-\alpha}(x-b)^{n-\beta}(x-c)^{n-\gamma}.$$

$$\sum \frac{D_u^p}{p!} = \sum C_n^\alpha C_n^\beta C_n^\gamma (x-a)^{n-\alpha}(x-b)^{n-\beta}(x-c)^{n-\gamma}.$$

sans condit. relat à $\alpha+\beta+\gamma$. alors

$$= \sum C_n^\alpha (x-a)^{n-\alpha} * \sum C_n^\beta (x-b)^{n-\beta} * \sum C_n^\gamma (x-c)^{n-\gamma}.$$

Donc $= (x-a+1)^n (x-b+1)^n (x-c+1)^n$.

A priori: rempl x par $x+h$, par Taylor on a

$\sum \frac{h^p D^p(u)}{p!}$, et pour $h=1$, on a cette expression

On aurait pu remarq que dér. n^ième est un polyn de degré $2n$ en x, et calculer les coef de ce polyn par form de récurrence — Cette dér. satisf. à éq différ. linéaire du 3e ordre

Der. $n^{ième}$ de $y = (x-a)^n (x-b)^n (x-c)^n$. (Hermite).

$z = \frac{d^n y}{dx^n}$, $(x-a)(x-b)(x-c) = P$.

$y = P^n$. , $\frac{y'}{y} = n \frac{P'}{P}$.

$Py' = nP'y$. Différentions deux fois

$Py''' + 2P'y'' + P''y' - 2nP''y' - nP'''y = 0$

(1) $Py''' + (2-2n)P'y'' + (1-2n)P''y' - nP'''y = 0$.

Cherch l'éq en z. On a au moyen de (1)

$$\left.\begin{aligned} & Pz''' + \frac{n}{1}P'z'' + \frac{n(n-1)}{1.2}P''z' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}P'''z \\ & + (2-n)P'z'' + (2-n)\frac{n}{1}P''z' + (2-n)\frac{n(n-1)}{1.2}P'''z \\ & + (1-2n)P''z' + (1-2n)\frac{n}{1}P'''z \\ & - nP'''z. \end{aligned}\right\} = 0$$

$Pz''' + 2P'z'' - \frac{n^2+n-2}{2}P''z' - \frac{n}{3}(2n^2+3n+2)P'''z = 0$

On peut en déduire formule de récurrence pour calculer les coef de z. On pose

$z = \sum a_p x^p$. On substitue, et on a un polyn que doit être identiq nul, on égale à zéro coeffts

Mais on peut simplifier en posant $P = x^3 - 1$,

$P' = 3x^2$, $P'' = 6x$, $P''' = 6$.

$(x^3-1).z''' + 6x^2 z'' - (x^2+n-2)3x z' - \frac{n}{3}(2n^2+3n+2)2z = 0$

$z' = \sum p a_p x^{p-1}$, $z'' = \sum p(p-1) a_p x^{p-2}$,

$z''' = \sum p(p-1)(p-2) a_p x^{p-3}$.

on substitue, z est de degré $2n$. Prenons un coef quelc du polyn, par ex le coef de x^p, et écrivons qu'il est nul.

$$p(p-1)(p-2)\,a_p - (p+3)(p+2)(p+1)\,a_{p+3} + 6p(p-1)a_p$$
$$- 3(n^2+n-2)\,a_p - 2n(n^2+3n+2)\,a_p = 0.$$

On a a_p et a_{p+3} on peut donc, connaissant les 3 prem ou les 3 dern coef de z, calculer les autres. Or ce sont les coef de la puis. x^{2n}, de la puis. x^{2n-1}, et de x^{2n-2}. Or le coef de x^{2n} est la dér. $n^{ième}$ de x^{3n}, c'est $\frac{3n(3n-1)\cdots 1}{2n!}$. Puis le coef de x^{2n-1} est $(x^3-1)^n =$

$x^{3n} - \frac{n}{1} x^{3n-3} + \cdots$

Donc comme a_{2n}, on a a_{2n-3}, a_{2n-6}, $\cdots a_{2n-3K}$, K étant entier tel que $a_{2n-3K} > 0$. Mais si $a_{2n-3K} < 0$, cela signifie un coef nul; alors $p < 0$ et $p+3 \geq 0$, la formule donne $a_p = 0$.

Simplifions la formule. On aura

$a_p = A_n^p\, a_{p+1}$, en appel. A_n^p la fract rationnelle en n et p.

Trouver dérivée $n^{ième}$ de $z = \varphi(x^3)$.

$z' = 3x^2 \varphi'(x^3)$, $z'' = (3x^2)^2 \varphi''(x^3) + 2.3x\, \varphi'(x^3)$.

$z''' = 2.3\, \varphi'(x^3) + 2.3.x\, \varphi'(x^3).(3x^2) + (3x^2)^3 \varphi'''(x^3) + 2(3x^2) 6x \varphi''$

$z^n = (3x^2)^n \varphi^n + x^{2n-3} \cdot \varphi^{(2n-3)} + \cdots$

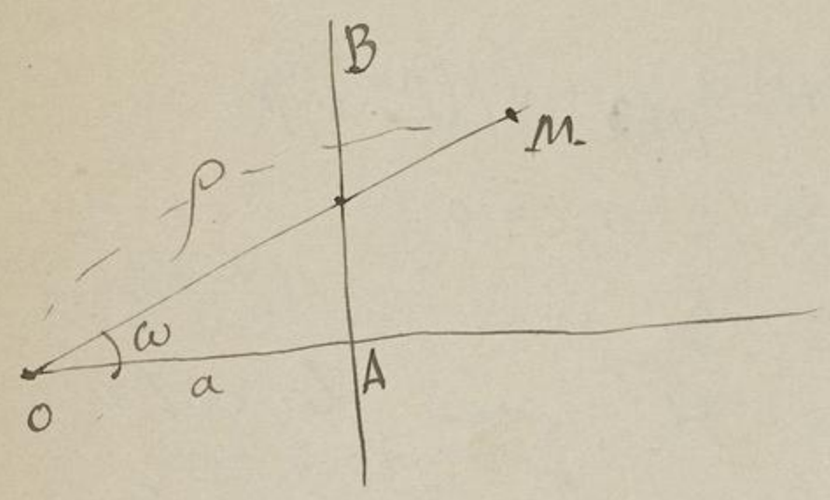
$z^{(n)} = \sum A_p x^{2n-p} \varphi^{(n-p)}$.

Démontrons cela. Dérivons

$z^{(n+1)} = \sum A_p (2n-3p)\, x^{2n-3p} \varphi^{(n-1)} + A_p\, x^{2n-3p+2} \varphi^{(n-p+1)}$

ainsi la loi est générale. — Comment trouver A_p ? On prend
fouet partie -

Lieu des points d'inflexion des conchoïdes d'une droite.



$$\rho = \frac{a}{\cos\omega} + l \cdot \quad \text{Points d'inflex}$$

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 0 \cdot$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\omega}{a + l\cos\omega}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{-\sin\omega(a+l\cos\omega) + l\sin\omega\cos\omega}{(a+l\cos\omega)^2} = \frac{-a\sin\omega}{(a+l\cos\omega)^2}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \cancel{a\sin\omega(a+} - \frac{a\cos\omega}{(a+l\cos\omega)^2} + \frac{2a\,l\sin^2\omega}{(a+l\cos\omega)^3}$$

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{\cos\omega(a+l\cos\omega)^2 - a\cos\omega(a+l\cos\omega) - 2al\sin^2\omega}{(a+l\cos\omega)^3} = 0$$

$$\cos\omega(a+l\cos\omega)l\cos\omega - 2al\sin^2\omega = 0 \cdot$$

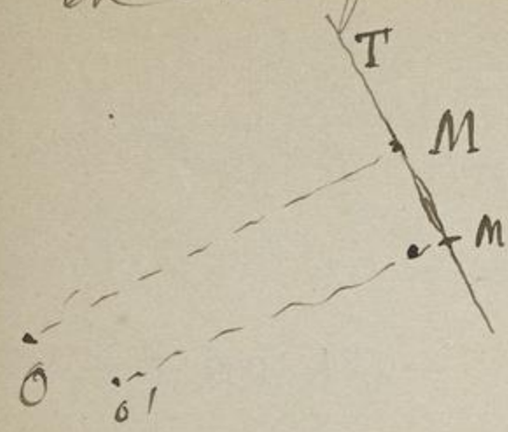
$$\rho\cos^3\omega = 2a\cos^2\omega \cdot \qquad \text{On en repart aux coord rect}$$

$$\cancel{\rho\cos\omega = 2a} + \qquad x^3 - 2ay^2 = 0 \quad , \text{ parabole cubique}$$

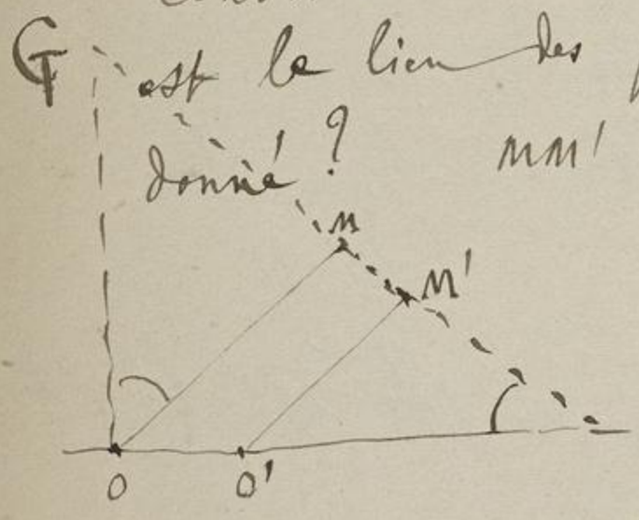
Pour $l=0$, on a une variété : deux fois la droite AB
et $x^2+y^2=0$ (point de l'infini) ; pour $l=\infty$, la conch se réduit à
une droite (droite de l'infini) et à $\cos\omega = 0$, parallèle à AB par O,
(qu'on obtient 2 fois). —

On peut dire : M appart à un syst invariable
dont un point décrit AB et dont la droite OM passe
par O. A un inst donné, quand le déplacem
de cette fig invar, chacun de ces points décrit une

traject. Quels sont ceux qui à l'inst donné se trouvent en un point d'inflex de leur trajectoire ?



Supp que M soit un point d'inflex de sa traject O centre instant de rotation. M' point infin voisine, il est à dist du 2e ordre de tang MT, donc sur MT. Norm en M', l'angle des 2 norm OM et O'M' est du second ordre ; et en transportant le point M' sur la tang, on n'a pas altéré cette condit. Ainsi OM et O'M' doivent être paral. Quelle est le lieu des points M satisfaisant à cette condit., à l'instant donné ? MM' est la long de l'arc, c'est OM × α, α étant l'angle infiniment petit de rotat

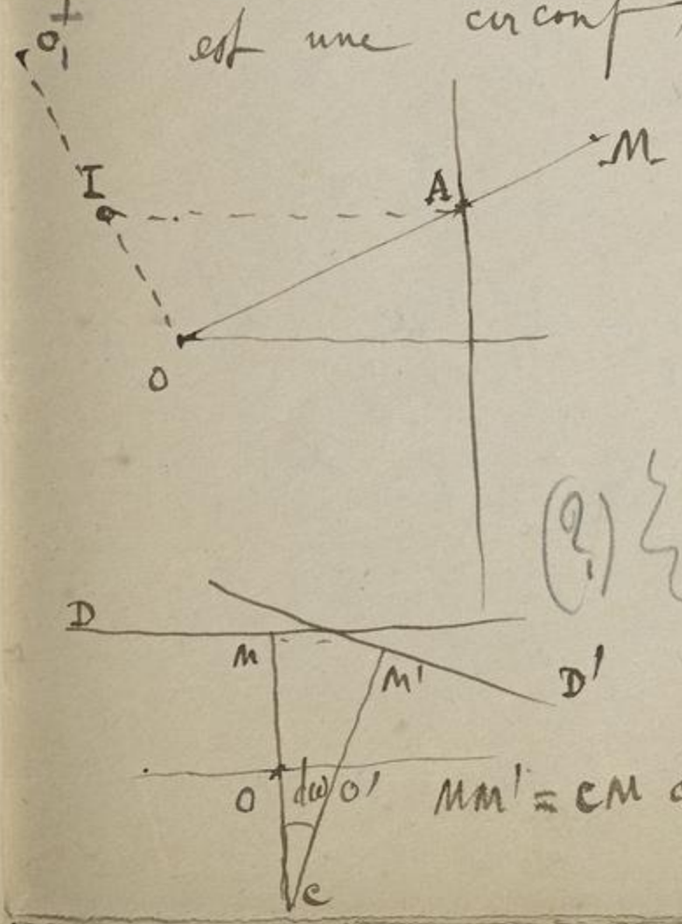


Donc on a $\frac{MM'}{OM}$ = Const. K à cet instant

Quel est le lieu de ces points M ?

$\frac{MM'}{OM}$ est Const, OO' égalem. On a

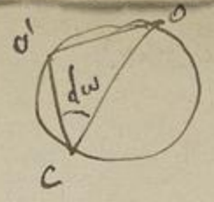
$\frac{OG}{OM} = \frac{OO'}{MM'} = K$. Donc OG est const. Donc le lieu des points M est une circonf qu'on appelle la circonf des inflexions.



A est un un point d'inflex de sa traj. I est le centre instantané. La circ des inflex passe par ces 2 points I et A. Parmi $IO'_1 = IO$: le disque passe aussi par O'_1. En effet,

Cherchons le lieu des centre de courbure (?) l'enveloppe d'une droite ? On a $MM' = CM\,dw$. Donc lieu de C est une circonf passant par O et O', alors on connaît une corde du cercle on peut trouver son diam

Le diam est $\frac{OO'}{\sin d\omega} = \frac{OO'}{d\omega}$.

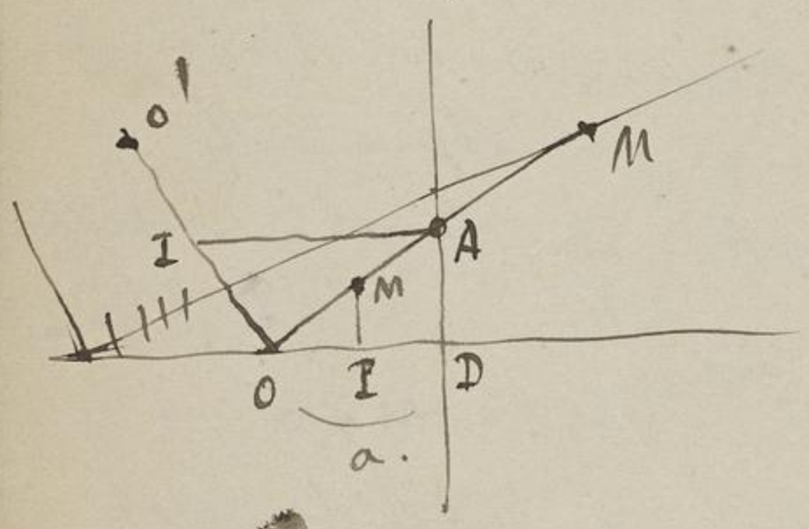


De même dans notre cas, $OG = \frac{OO'}{d\omega}$. Donc circonf tang. en O' de O par rapp à I. Donc la circ des inflex passe par O', symét de la circonf des inflex. Elle est déterm. Donc on a 3 points de la

$OM \cdot OA = 2 \cdot \overline{OI}^2$.

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OA}{OD}$$

$$\frac{OI}{OA} = \frac{MP}{OP}.$$



$$OP \cdot \frac{\overline{OA}^2}{OD} = 2 \cdot \overline{OA}^2 \cdot \frac{\overline{MP}^2}{\overline{OP}^2}.$$

$OP = 2a \cdot \frac{y^2}{OP^2}$ ou $x^3 = 2a y^2$.

On peut aussi obtenir l'élém de surface d'une conchoïde d'une courbe donnée. ——

Exercice pour mercredi. On donne l'équation

$$\alpha_1 x_1 \frac{dF}{dx_1} + \alpha_2 x_2 \frac{dF}{dx_2} + \alpha_3 x_3 \frac{dF}{dx_3} = 0$$

α_1 α_2 α_3 constantes. Que devient-elle, quand on pose $z_1 = L x_1$, $z_2 = L x_2$, $z_3 = L x_3$; (logarithmique)

on bien encore quand on pose $y_1 = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3}$,

$y_2 = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3}$, $y_3 = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} x_3^{\delta_3}$.

Sommer la série $x \sin\varphi + \frac{x^3 \sin 3\varphi}{3} + \frac{x^5 \sin 5\varphi}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi}{2n+1} + \ldots$. Cas où $x = 1$.

On Consd z comme var imag repré par un point dans un plan ; a, b, c 3 const imag (3 points fixes), on consd fonct $(z-a)(z-b)(z-c)$; et on demande d'étudier forme des courbes

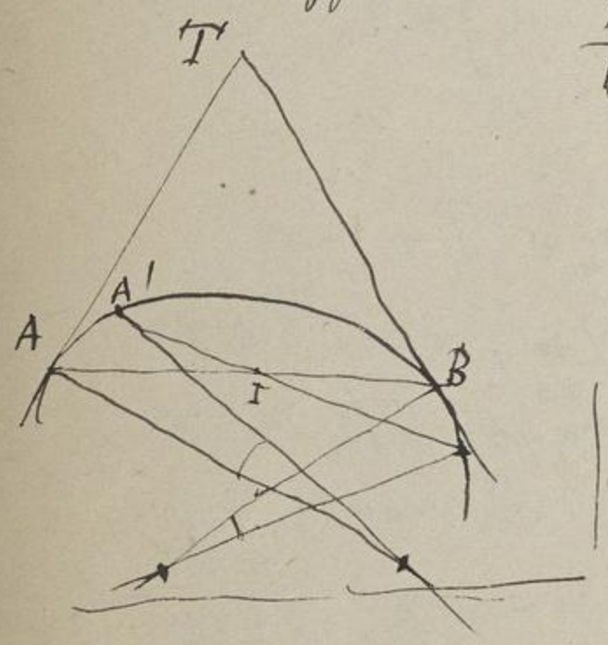
$\mathrm{mod}(z-a)(z-b)(z-c) = \text{const}$, $\arg(z-a)(z-b)(z-c) = \text{const}$

Dév. par Maclaurin $\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$. Montrer que le développement de la forme

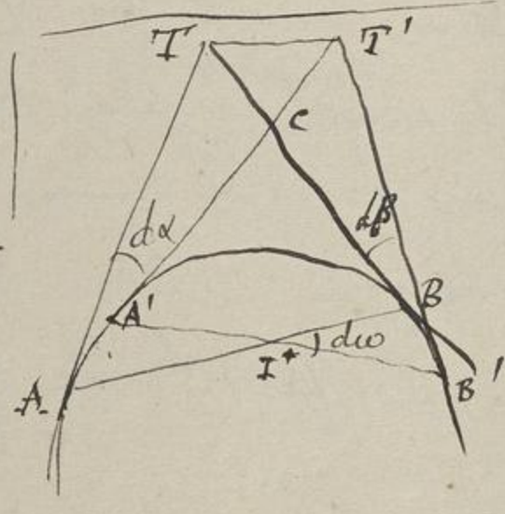
$$\sum \frac{x^n P_n}{c^{n+\frac{1}{2}}},$$

P_n étant polynôme et homog de degré n par rapp à a, b et à $d = \sqrt{b^2-ac}$. Calculer les coef de P_n.

Angle ATB const. Soit où AB touche son enveloppe



$\dfrac{AI}{BI} = \dfrac{AA' \sin\alpha}{BB' \sin\beta}$, AI et BI sont entre elles comme les proj. des ray de courbure sur AB.



Les tri. ATB et A'T'B' ont même aire.

$TCA'A + AIA' = \cancel{TCBB'} + T'CBB' + IBB'$

$AIA' = \overline{AI}^2 \dfrac{d\omega}{2}$

$IBB' = \overline{BI}^2 \dfrac{d\omega}{2}$

$TCA'A = \overline{AT}^2 \cdot \dfrac{d\alpha}{2}$, $T'CBB' = \overline{BT}^2 \cdot \dfrac{d\beta}{2}$.

$d\alpha = \dfrac{AA'}{R}$, R ray de courb en A ; $d\beta = \dfrac{BB'}{R'}$.

$AI = AA' \dfrac{\sin\alpha}{d\omega}$, $d\omega = \dfrac{AA' \sin\alpha}{AI} = \dfrac{BB'}{BI} \sin\beta$.

D'où, en rempl. $AT^2 \cdot \frac{AA'}{R} + \overline{AI}^2 \cdot \frac{AA'}{AI} \sin\alpha = \overline{BT}^2 \cdot \frac{BB'}{R'} + BI\ BB' \sin\beta$.

$\overline{AT}^2 \cdot \frac{AI}{R\sin\alpha} + AI^2 = \frac{BI}{R'\sin\beta} + \overline{BI}^2$, ~~D'après~~ en rempl par quant

propost. Cette relation permet de construire le point I.

$a_0 + a_1 e^{i\varphi} + a_2 e^{2i\varphi} + \dots + a_n e^{ni\varphi} + \text{—} \text{—}$

$a_0, a_1, a_2 \dots$ positifs et décroissants ; je dis

$$\text{mod}\left(a_0 + a_1 e^{i\varphi} + \dots\right) < \frac{2a_0}{\text{mod}\left(1 - e^{i\varphi}\right)}.$$

On a ~~$a_0(1 + e^{i\varphi} +$~~

Considr $\text{mod}\left(1 - e^{i\varphi}\right)\left(a_0 + a_1 e^{i\varphi} + \dots + a_n e^{ni\varphi}\right)$

ou mod $a_0 + a_1 \left| e^{i\varphi} + \dots \right. + a_n \left| e^{ni\varphi} \cdot + a_n \right.$ — —
$\quad -a_0 \qquad\qquad\qquad\quad -a_{n-1}$

$< \text{mod}\, a_0 + \text{mod}(a_0 - a_1) + \dots + \text{mod}(a_{n-1} - a_n) + a_n = 2a_0$

Donc

Considr. $a_0 + a_1 e^{i\varphi} + a_2 e^{2i\varphi} + \dots + a_n e^{ni\varphi} + \dots$

Suppt φ diff de Zéro ou d'un mult de 2π, car alors $e^{i\varphi} = 1$,
A le 2e membre de l'inégal plus haut étant ∞,
celle-ci ne peut servir à rien. Démontr que
la série présente est convergente. On dém que $S_{n+p} - S_n$
est $< \varepsilon$, pour toute val donnée de p, quand n est
suffiz grand

$$S_{n+p} - S_n = a_n e^{ni\varphi} + a_{n+1} e^{(n+1)i\varphi} + \dots + a_{n+p-1} e^{(n+p-1)i\varphi}$$

$$= e^{ni\varphi}\left[a_n + a_{n+1} e^{i\varphi} + \dots + a_{n+p-1} e^{(p-1)i\varphi}\right].$$

$$\text{mod}\left(S_{n+p} - S_n\right) < \frac{2a_n}{\text{mod}\left(1 - e^{i\varphi}\right)}$$, or a_n tend vers Zéro, donc

Envoyag les séries $a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi + \cdots$

et $a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + \cdots + a_n \sin n\varphi + \cdots$

Elles sont conv. parce que elles sont la partie réelle et la partie imag de la précédente (bien entendu on supp encore φ diff de 0 ou d'un multple de 2π).

Généralisons, en supposant simplem la série

~~mod a_0~~ + mod $(a_0 - a_1)$ + mod $(a_1 - a_2) + \cdots$ + mod $(a_{n-1} - a_n) \cdots$

convergente, et que mod a_n tende vers zéro pour $n = \infty$.

Cherch une lim supér - du module de cette expres

Soit $S = \text{mod}(a_0 - a_1) + \text{mod}(a_1 - a_2) + \cdots$

on a $\dfrac{\text{mod}\{a_0 + S + \text{mod}\, a_n}{\text{mod}(1 - e^{i\varphi})}$ comme lim supér.

Et pour $a_0 + a_1 e^{i\varphi} + \cdots$, on a

mod $(a_{n+1} - a_n) + \cdots +$ mod $(a_{n+p-1} - a_{n+p-2})$

on a ici une série de term de la série S et on commence an n^{ie} term donc cela est $< R_n$ en appel ainsi le reste de S, donc

$\dfrac{\text{mod}\{a_n + S + \text{mod}(a_{n+p+1}}{\text{mod}(1 - e^{i\varphi})}$ qui tend vers zéro. Donc

$a_0 + a_1 e^{i\varphi}$ est convg aussi que les 2 séries en sin et cos.

Equat $x = 2\sin^2 x + 1$. $y = x - 2\sin^2 x - 1$,

y est continu. appl Rolle $y' = 1 - 4\sin x \cos x$

$= 1 - 2\sin 2x$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$ et

$(2K+1)\pi - \frac{\pi}{6}$. Et pour $8x = \frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{2}$ et $(2K+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$.

On prend val posit. et moins que 3 $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$. (?).

$x = 1 - \cos 2x$. , signes de substitution de ces valeurs

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$	une rac
	$-$	$-$	$-$	$+$

En gén. soit $x = f(\sin x, \cos x)$. f(entier en $\sin x$ et $\cos x$)
on prend $y = x - f$ et on dresse. $y' = 1 - f'$, c'est une
éq algébr par rapp à $\sin x$, et on peut la résoudre

Soit $x(e^x - 1) = e^x + 1$.

$x = \frac{e^x+1}{e^x-1}$. Différent on décomp d'abord $\frac{e^x+1}{e^x-1}$,

et il reste à différent $\frac{2}{e^x-1}$; on a

$1 = -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$. Mais $\frac{e^x+1}{e^x-1}$ n'est pas continue pour $x=0$

On peut néanm appliq le procédé général.

Différent 2 fois. On a

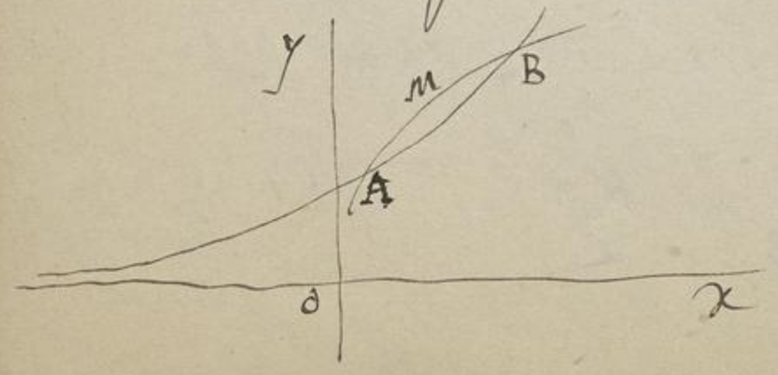
$e^x - 1 + x e^x = e^x$ | $e^x + e^x + x e^x = e^x$.

$2 + x = 1$. une racine α. Subst $-\infty$, 0 $+\infty$
$+$ $-$ $+$

2 rac, et 2 seules sans qu la dér. 1ère n'a qu'une
racine

Méthode génér. Pour séparer rac de $f(x, e^x) = 0$

On prend $f(x, y) = 0$ et $y = e^x$.



Soit AMB la courbe $f(x, y) = 0$.
Cond la fonct $\frac{y}{e^x}$ ou ye^{-x}.
En A et en B, la valeur de
ye^{-x} est 1. Donc dans l'interv.

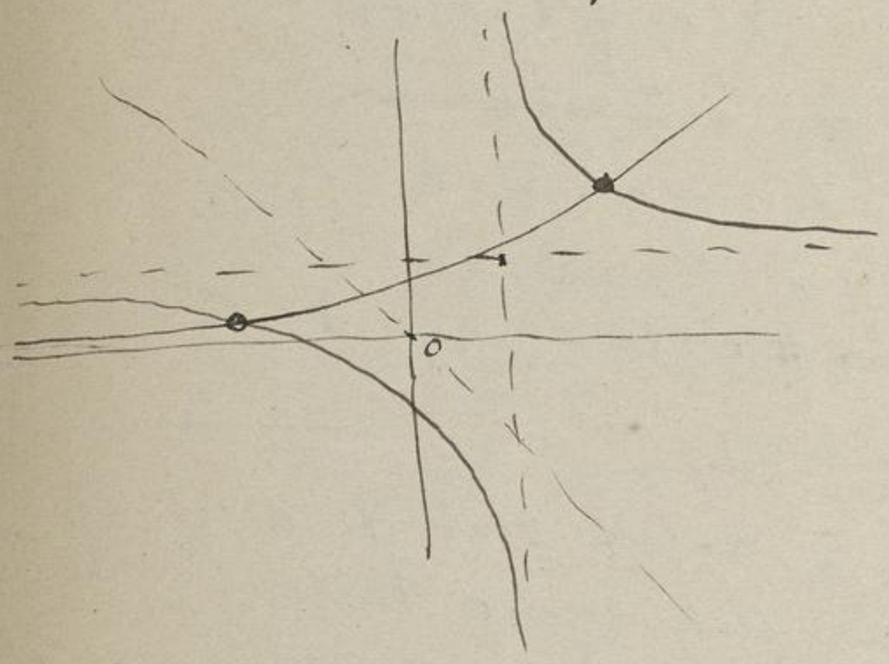
un max, ou un minim. Exprimons cela : dér. nulle

$\frac{dy}{dx} e^{-x} - y e^{-x} = 0$, d'où $\frac{dy}{dx} = y$,

or $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{df}{dy} + \frac{df}{dx} = 0$ ou $y \frac{df}{dy} + \frac{df}{dx} = 0$

appliquons à . $x(e^x - 1) = e^x + 1$,

ou (1) $xy - x = y + 1$, hyperb équil. dont asympt parallèles aux axes et passent par $x=1$, $y=1$. En subst 0, on a -1, on subst les coord du centre, on a le centre est opté . à courbe .

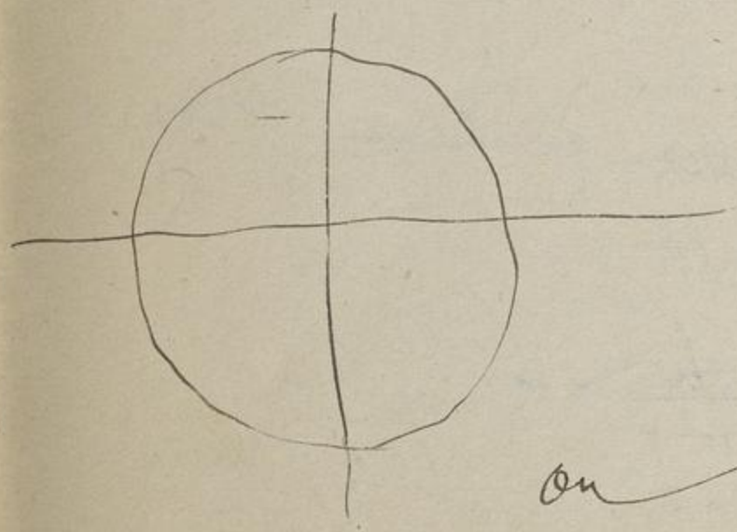


On a $y - 1 + y(x-1) = 0$

(2) $xy - 1 = 0$, et en tenant compte de (1) , on peut rempl (2) par $x + y = 0$. Donc il n'y a pas de points donnés par l'inters. des 2 courbes.

En coup par $y = e^x$ on a 2 ~~subs~~ intersect . Cela revient à substituer $-\infty$, $1-\varepsilon$, $1+\varepsilon$ et $+\infty$.

Prenons $x^2 + e^{2x} = 2$, $x^2 + y^2 = 2$,



cercle . Formons $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y = 0$

$2x + 2y^2 = 0$, parabole ; on rempl y^2 par $2 - x^2$, on a

$x + 2 - x^2 = 0$, $x' = -1$, $x'' = 2$.

On substitue ces 2 vals ; intt de subst 2, car ray. du cercle est $\sqrt{2}$. Subtit. $-\sqrt{2}$, -1, $\sqrt{2}$

~~Dans~~ on a $+$, $+$, les 2 rac sont imaginaires

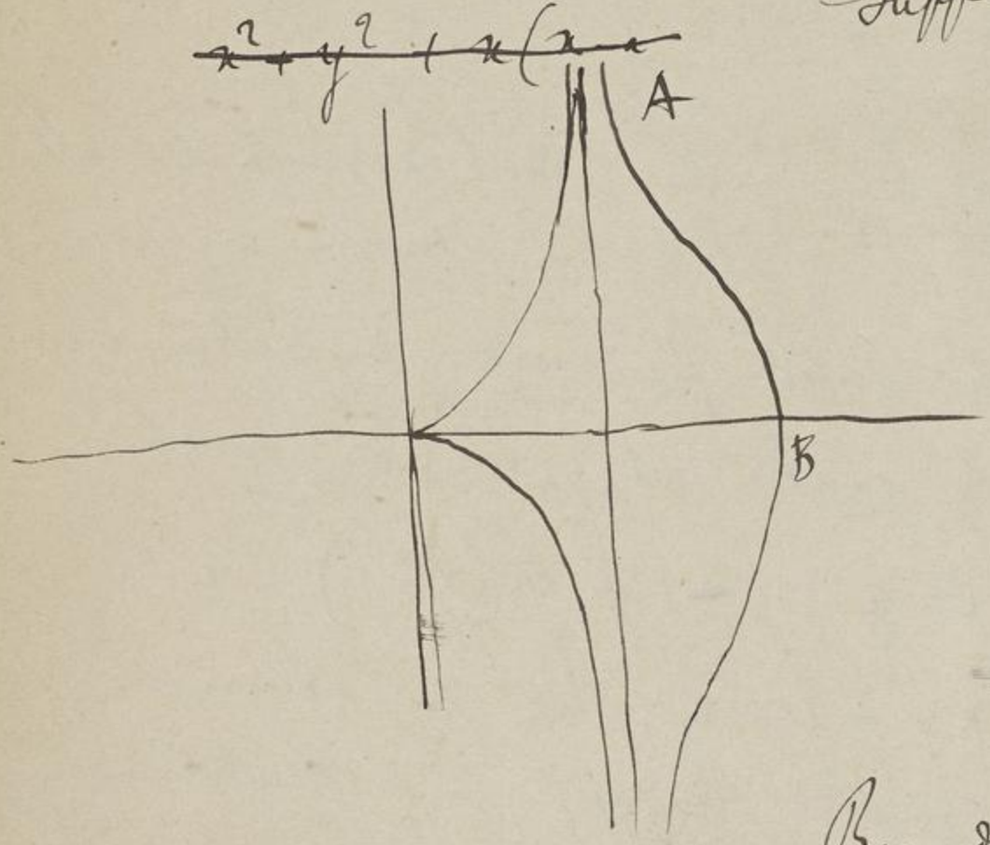
C'est tout à fait général

~~Cissoïde~~ Conchoïde. $\rho = \frac{a}{\cos\omega} + b$, $x = a + b\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$, alors on peut prendre $(x-a)^2(x^2+e^2x) = b^2x^2$.

$2(x-a)(x^2+y^2) + 2x(x-a)^2 - 2b^2x + 2y^2(x-a)^2 = 0$.

Suppr (pour simplifier) $b = a$.



on peut résoudre en y^2 :

$$y^2\left[(x-a)^2\cdot 2 + x - a \cdot + \quad\right] \quad ;$$

$$y^2 = \frac{x\left[x(x-a)+(x-a)^2-a^2\right]}{(x-a)^2\left[(x-a)+1\right]}$$

Il faut cette expression soit ≥ 0.

au numér, on a $x = 0$ et

$x^2 - ax + x^2 - 2ax + a^2 - a^2$.

$2x^2 - 3ax = x^2(2x-3a)$ | $x^2 = 0$, $x = \frac{3a}{2}$.

Rac du dén. $a-1$ a, num $\frac{3a}{2}$.

x peut varier de $a-1$ à a, on ne peut de a à $\frac{3a}{2}$, puis on peut de $\frac{3a}{2}$ à $+\infty$. On peut rejeter tout ce qui est au-dessous de l'axe des x. On prend de $a-1$ à a.

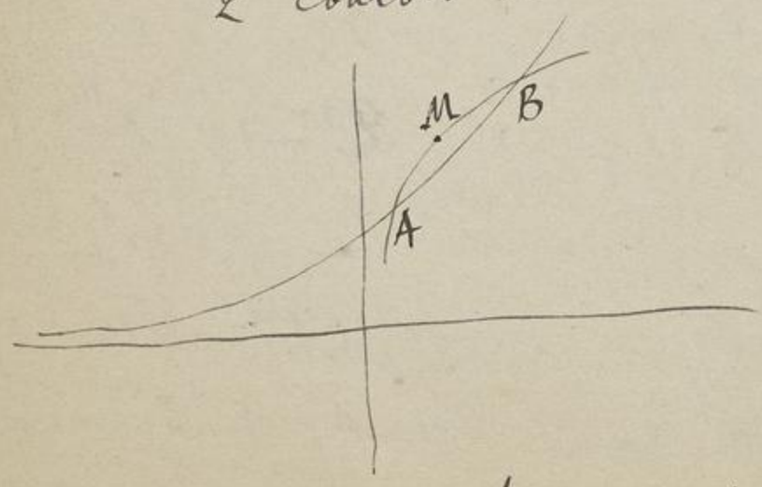
Suppr $a = 2$. On ~~fera~~ subst la val de y^2 dans l'équat.

Ce sera assez long.

Prenons équat $f(x, \operatorname{tg}x) = 0$. Sépar les rac

on pose $y = \operatorname{tg}x$. on a $f(x, y) = 0$. Les intersc de ces

2 courbes sont les rac de l'éq donnée.



~~Explication~~ ~~Soit~~ est nulle

~~$\frac{dy}{dx}\cos x + y\frac{1}{\sin^2 x} = 0$~~

Posons $y = \operatorname{tg}(x+z)$, et z devra passer par un maxim ou un minim

On a $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2} + \operatorname{tg}^2(x+z) = 1 + y^2$, ou

$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}(1+y^2) = 0$. On a éliminé la transcendante.
Il faudra subst les val des ponts d'infers, et aussi les val qui rendent infini $tg x$.

Revenons $f(x, \sin x, \cos x) = 0$
on exprim $\sin x$ et $\cos x$ en fonct de $tg \frac{x}{2}$, ce qui se fait rationnellement et on revient au cas précédent.

$rt - s^2 = 0$. Changer de variables en posant
$x = \rho \cos w$, $y = \rho \sin w$. P, Q, R, S, T déf. de
z en ρ et w. Calculs longs en employ. méthode générale
On peut simplif comm suit:

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$$

on peut supposer les accr. d^2x et d^2y nuls,
alors $rt - s^2 = 0$ exprim que d^2z est un carré parfait.
exprimons cela. Il faut chercher expressions de d^2x,
d^2y, d^2z. On a

$$dx = d\rho \cos w - \rho \sin w\, dw$$
$$dy = d\rho \sin w + \rho \cos w\, dw.$$

Résolv. en $d\rho$ et dw. On mult par $\cos w$ et $\sin w$,

$$d\rho = dx \cos w + dy \sin w.$$

pour avoir $\rho\, dw$ on mult par $-\sin$ et $\cos$,

$$\rho\, dw = -dx \sin w + dy \cos w.$$

Différ. encor en suppos $d^2x = d^2y = 0$,

$$d^2\rho = -dx \sin w\, dw + dy \cos w\, dw = \rho\, dw^2$$
$$\rho\, d^2w + d\rho\, dw = -dx \cos w\, dw - dy \sin w\, dw = -d\rho\, dw.$$

on $\rho\, d^2w = -2\, d\rho\, dw$.

exprimons d^2z.

$$d^2z = P\,d^2p + Q\,d^2\omega + R\,dp^2 + 2S\,dp\,d\omega + T\,d\omega^2 .$$

Rempl d^2p et $d^2\omega$ par leurs valeurs -

$$d_2^2 = R\,dp^2 + 2\left(S - \frac{Q}{\rho}\right)dp\,d\omega + \left(T + \rho P\right)d\omega^2 .$$

Cela est un carré parf donc

$$\left(S - \frac{Q}{\rho}\right)^2 = R\left(T + \rho P\right) .$$

En gén. faisons un changem de var quelc en rempl. x et y par X et Y (nouvelles vari)

$x = \varphi(X,Y)$, $y = \psi(X,Y)$.

P', Q', R', S', T' , P'', Q'', R'', S'', T'' les dér. de x et y par rapp à X et Y , dér. qui sont données.

On a d^2z qui doit être carré parf quand d^2x et d^2y sont nuls. Envisag simultanément $d^2z = 0$, $d^2x = 0$, $d^2y = 0$.

Ces éq ont en gén. 2 rac données par $r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$, ici ces rac sont égales

$$d^2z = P\,d^2X + Q\,d^2Y + R\,dX^2 + 2S\,dX\,dY + T\,dY^2$$

$$d^2x = P'\,d^2X + \text{——}$$

$$d^2y = P''\,d^2X$$

Exprim que ces 3 quant sont nulles

La relat sera exprim en dX et dY ; il faut élim d^2X, d^2Y.

$$\left|\begin{array}{lll} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{array}\right| = 0 \qquad R\,dX^2 + 2S\,dX\,dY + T\,dY^2$$

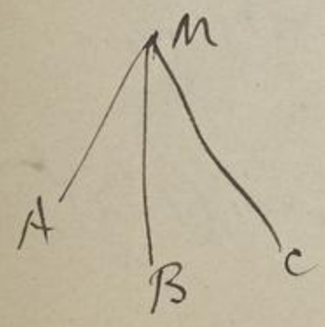
Exprim que cette éq a ses rac égales Le coef de dX^2 est le déterm. $(P\ Q\ R)$. On a $(P\ Q\ R)(T, Q, T) = (P, Q, S)^2$

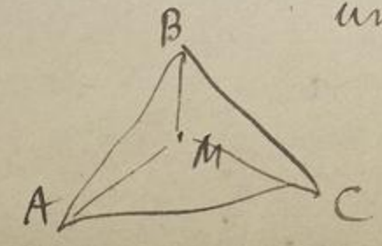
Soit le changement total $x = \varphi(X, Y, Z)$,
$y = \psi(X, Y, Z)$, $z = \theta(X, Y, Z)$, Z est la nouvelle
fonct. Suppr Z exprimée en fonct de X, Y; et
remplacer dans ces expr Z par cette valeur, on aura
l'éq $(P, Q, R)(P, Q, T) = (P, Q, S)^2$. Il s'agit donc
de la transformer. - C'est un peu long

Exemple : $x = \rho \cos\varphi \cos\psi$, $y = \rho \sin\varphi \cos\psi$,
$z = \rho \sin\psi$. Prenons comme nouvelles variables φ et ψ,
et ρ comme nouvelle fonct : ce qu'il y aurait de
plus court serait de prendre nouvelle variable $\rho\cos\psi = \zeta$
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; $r = \rho\cos\psi$, $z = \rho\sin\psi$.
On exprime que d^2x et d^2y sont nuls ;

$d^2z = r\,d\varphi^2$, $r\,d^2\varphi = -r\,dr\,d\varphi$,
$d\rho = dr\cos\psi + dz\sin\psi$, $\rho\,d\psi = -dr\sin\psi + dz\cos\psi$
On dérive ; on sait d^2z est nul et d^2r nullent par
on a ainsi $d^2\rho$ et $\rho\,d^2\psi$. Il reste une éq du 2e ordre
qui contient $d^2\rho = P\,d^2\varphi + Q\,d^2\psi + R\,d\varphi^2 + 2S\,d\varphi\,d\psi + T\,d\psi^2$,
expression qui cont dr, on le remplace par sa val
$dr = d\rho\cos\psi - \rho\,d\psi\sin\psi$, or $d\rho = P\,d\varphi + Q\,d\psi$,
donc on a éq du 2e ordre en $d\varphi$, $d\psi$. —

Exercices pour mercredi. Constr tang au lieu des points M
tels que la somme des dist de ces points
à 3 points donnés soit Constante.





On envoie un tri. ABC,
un point M à l'intérieur
Trouver le minimum de la somme
$\overline{MA}^m + \overline{MB}^m + \overline{MC}^m$. Gergonne t. XIV, 418

Dém. qu'une fonct $V(x,y,z)$ de 3 var qui est continue ainsi que toutes ses dérivées, et qui satisfait à $\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0$ ne peut avoir ni maximum ni minimum -

Supp que l'on ait $z=F(y)$, $y=\varphi(x)$, de telle façon que z soit fonct de x; démontrer que pour trouver $\frac{d^{n+2}z}{dx^n}$, il suffit de rempl t par x dans l'expres. $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p!}\frac{d^p z}{dy^p}\cdot\frac{d^n(\varphi(x)-\varphi(t))^p}{dx^n}$

$\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$? posons $d=\sqrt{b^2-ac}$. On a

$=\frac{\sqrt{-a}}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ en posant $\frac{ax+b}{d}=y$.

Posons $y+k=\frac{ax+b}{d}$, $y=\frac{b}{d}$, $k=\frac{ax}{d}$.

$\frac{1}{\sqrt{1-(y+k)^2}}$. posons $y^2=z$, $(y+k)^2=z+K$.

on a $=\frac{\sqrt{-a}}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(z+K)}}$; développons par Taylor:

suiv. puis. de K.

Considd d'abord plus simplem, $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$. On a

$\frac{1}{\sqrt{1-z}}=(1-z)^{-\frac{1}{2}}$.; dér. $n^{ième}$ $(-1)^p\cdot p(p-1)\dots(p-n+1)(1-z)^{p-n}$;

posons $\frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2^n}=\frac{\varphi(n)}{2n}$. On a

$\frac{\varphi(n)}{2^n}(1-z)^{-(n+\frac{1}{2})}$. On a donc (car on fait $K=0$ dans la valeur de la dérivée),

$\frac{\sqrt{-a}}{d}\cdot\sum\frac{\varphi(n)}{n!\,2^n}\frac{K^n}{(1-z)^{n+\frac{1}{2}}}$. Il faut dével maintenant

K^n. On a $(y+h)^2 = z+K$, $y^2+2hy+h^2 = z+K$

$K = h(2y+h)$, $K^n = h^n\sum\frac{n!}{p!(n-p)!}h^p\cdot(2y)^{n-p}$

On a donc $\frac{\sqrt{-a}}{d}\sum\frac{\varphi(n)}{2^p\cdot p!(n-p)!}\frac{h^{n+p}(2y)^{n-p}}{(1-z)^{n+\frac{1}{2}}}$.

Rempl y par $\frac{z}{2}$ + on a

$1-z = 1-y^2 = 1-\frac{b^2}{d^2} = \frac{-ac}{d^2}$; $(1-z)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{-ac}{d^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{n+\frac{1}{2}}(ac)^{n+\frac{1}{2}}}{d^{2n+1}}$

On a $\frac{\sqrt{a}}{1}\cdot\sum\frac{\varphi(n)\cdot(-1)^n\,(ac)^n\,h^{n+p}\cdot b^{n-p}d^{n+p}}{2^p\cdot p!(n-p)!\,(ac)^{n+\frac{1}{2}}}$

Il faut rempl h par $\frac{ax}{d}$. On a

$\sum\frac{\varphi(n)\cdot(-1)^n b^{n-p}\cdot a^p\cdot x^{n+p}}{2^p\cdot p!(n-p)!\,c^{n+\frac{1}{2}}}$.

Il faut s'occuper de la Converg. de cette série, et voir si la fonct est représ. par cette série. Ou bien, démontrons que la fonct proposée est développable par la formule de Mac-Laurin, alors il sera dém. par là que la série est Converg pour cela, nous allons effectuer ce dével par un autre procédé directement.

Décomp. ax^2+bx+c en 2 fact du 1er degré. Ainsi on peut supp $a=1$, on a $(x-\alpha)(x-\beta)$. On a donc $\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$, et supp α et β réels, pour fixer les idées. On peut trouver dér. nième par Leibnitz.

$(x-\alpha)^{-\frac{1}{2}}(x-\beta)^{-\frac{1}{2}}$. On a

~~$(x-\alpha)^{-(n+\frac{1}{2})}(x-\beta)^{-\frac{1}{2}} + \frac{n}{1}(x-\alpha)$~~

$$D_n (x-\alpha)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \varphi(n)\ (x-\alpha)^{-(n+\frac{1}{2})}$$

Alors on a $\sum \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{(-1)^n}{2^n} \varphi(n-p)\,\varphi(p)\,(x-\alpha)^{-(n+p+\frac{1}{2})}(x-\beta)^{-(p+\frac{1}{2})}$.

On cherche le coef de x^p et / ou égal x à 0 dans le dével, ~~et~~ on a le développt cherché.

Suppr deux fonct $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \text{---} = \varphi$

et $\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \text{---} = \psi$. Suppr les dévelopt par Taylor pour $x \leqslant 1$. Démontrer que le produit $\varphi\psi$ est toujours dével par Mac Laurin. On considère les restes. Suppr que pour $x=1$, φ soit Converg ou semi-converg, elle se réduit alors à $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \text{---}$; φ étant Converg le terme général tend vers zéro ; et on a $\mathrm{mod}\,\alpha_n < K$, quelque soit n. Alors, quand x est réel ou imag mais de module < 1, on a $\mathrm{mod}\,\alpha_n x_n < K.\,\mathrm{mod}\,x^n$

$< K\rho^n$. / ρ étant mod de x —

Or $K\rho^n$ est absol converg puisq ~~série~~ prog géométr de $\rho < 1$.

Donc si φ est converg, et ψ également $\varphi\psi$ sera égal au prod des 2 séries obtenu par multipl ordin —

D'ailleurs, On a rigoureusement

$$\varphi\psi = \alpha_0(\beta_0 + \beta_1 x + \text{---}) + \alpha_1 x(\beta_0 + \beta_1 x + \text{---}) + \alpha_n x^n(\beta_0 + \beta_1 x + \text{---}) + \text{---}$$

on multipl chaque terme par une série —

Or c'est une série à double entrée. Soient A_0, A_1 ——
B_0, B_1 —— X les mod de $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ x,
Considd. $\phi = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 +$ ——, on a dém. que cette
série est converg de même $\psi = B_0 + B_1 X +$ ——
alors $\phi\psi = A_0 (B_0 + B_1 X +$ ——$)$
$A_1 X (B_0 + B_1 X +$ ——$)$
$+ \cdot \cdot - - -$

Cela est rigoureux, car on a multp chaq terme de ϕ par ψ et rempl ψ par sa valeur ——. Cette série $\phi\psi$ est absolt converg. Or chac de ses terme est le module des termes de $\varphi\psi$. Donc $\varphi\psi$ est converg

Dével. par Maclaurin $F(y^2)$ suivant puis. de h.
Posons $(y+h)^2 = z + K$ et $y^2 = z$. ((C'est un procédé très bon pour calculer
dér. $m^{\text{ième}}$). On a

$$F(z) = \sum \frac{K^n}{n!} F_n' \qquad K = 2hy + h^2 = h(2y+h)$$

$$= \sum \frac{h^{n+p} (2y)^{n-p}}{p!\,(n-p)!} F_n' \,.$$

Ord suiv. puis. croiss de h, et en cherchant le coef de h^m, on a la dér. $m^{\text{ième}}$. On a

$$\sum \frac{m!\,(2y)^{2n-m}}{(m-n)!\,(2n-m)!} F_n' \,.$$ Il resterait à faire voir que le développem est possible

Considd exp suiv. puis. croiss de z
$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 +$ ——, posons

Supposons : $z = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots$

Quand le dév. de z finit est possible, celui du produit
l'est — Donc le dév. de z^p est possible et commence
par $\gamma_p x^p$. — On a $z^p = \gamma_1 x^p + \cdots$

Supp que $\beta_0, \beta_1 \cdots$ sont > 0, la série des est conv.
car on a $\alpha_0 + \alpha_1 \Sigma \beta_p x^p + \alpha_2 \Sigma \gamma_p x^p + \cdots$

Cette série est absolum converg, quand on n'a pas rempl.
z^p par $\gamma_1 x^p$. Rempl par modules

$A_0 + A_1 \Sigma \beta_p x^p + A_2 \Sigma \gamma_p x^p + \cdots$

tous les termes sont posts et chaq terme est le mod
des term correspondant . Donc ~~celle~~ absol conv, la 1re est conv.

alors le dével en h est converg.

Supposons : $x = \beta_1 x + \beta_2 x^2 +$ ———

Quan

l1

par

Supp

Car

Co

21

Ton

Des

Supposons : $x = \beta_1 x + \beta_2 x^2 +$ ———

Que

l'

par

Supp

Car

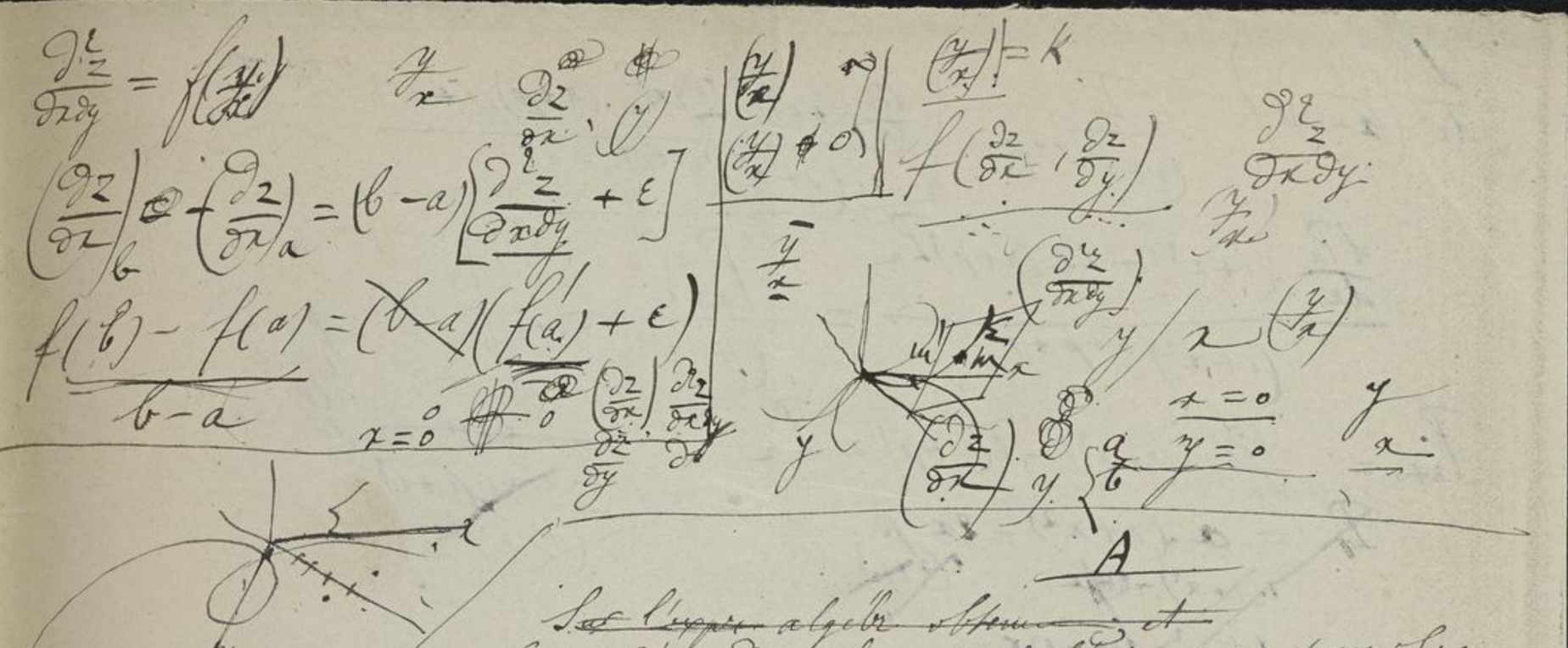
Co

21

1

To

Des



A

Sur l'expr. algébr. obtenue et
Considér. des valeurs où $\frac{y}{x} = 0$ pour les
quelles f et $\frac{y}{x}$ sont déterm. et finies, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ étant donc
des différ. ent indépendantes, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ est une
fonct. déterminée et finie des différ. étant donc
des différ. ent indépendantes. $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ étant donc
fonct. déterminées et finies des différ. ent indépendantes et des valeurs
des différ. ent indépendantes et des valeurs
$\frac{d^2z}{dx\,dy}$ nous donne la forme algébr. de cette fonct. On
peut alors se proposer de rechercher ce que devient le résultat de
Les valeurs quand x et y tendent vers 0 suivant une loi
déterminée. La valeur finale dépend de la limite du
rapp. de y à x et nous voyons qu'elle est inf. gr.
pour $\lim \frac{y}{x} =$ une rac. du dénom., nulle pour $\lim \frac{y}{x} =$ une rac.
du numér., finie et $\neq 0$ pour toute autre. Si $\lim \frac{y}{x} = 0$ ou
si $\lim \frac{y}{x} = \infty$ on obtient un partic. les val. que l'on
aurait obtenues en calculant $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ soit comme
dérivée de $\frac{dz}{dx}$ par rapp. à y, ou $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ comme dér.
de $\frac{dz}{dy}$ par rapport à x — car dans le 1er cas il
est permis de suppos. dans $\frac{dz}{dx}$ x nul ou différ. de y.
et la limite de $\frac{x}{y}$ est naturelle — nulle. De même
pour le 2e cas.

Supposons : $x = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots$

Quan

l'

par

Supp

Car

Co

2'

Et

Do

Les

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{n+p}}\right) \quad \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+p}} \quad \left|\ \frac{\frac{dP_n}{dx}(1+x^2)^{n+p} - 2x P_n \cdot (n+p)(1+x^2)^{n+p-1}}{(1+x^2)^{2(n+p)}}\right.$$

$$\frac{\frac{dP_n}{dx}\cdot(1+x^2) - 2x(n+p)P_n}{(1+x^2)^{n+p+1}} = \frac{P_{n+1}}{(1+x^2)^{n+p+1}}$$

$$P_{n+1} = \frac{dP_n}{dx}\cdot(1+x^2) - 2(n+p)\,x\,P_n$$

$$= \alpha\cdot(1+x^2) - 2x\,\beta$$

$$1 + x^2 - 2(n+p)x = 0$$

$$x = (n+p) \pm \sqrt{}$$

$$P_2 = 1 + x^2 - 2(p+1)x^2$$

$$P_3 = -2(p+1)x\cdot(1+x^2) - 2(p+2)\left[1 + (2p+3)x^2\right]$$

$$1 - (2p+1)x^2$$

$$2x - 4(p+1) - 2(2p+1)x$$

$P_1 = 0$ $\quad \frac{dP_1}{dx} = 0$

$$-2x(n-) - 2x(n+1)$$

$$(1+x^2)^{n+2}$$

$$\sum(x-a_2)\cdots(x-a_n)(1+x^2) - 2(n+p)x\sum(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})(x-a_n) + (-1)^{n-1}\cdot 1_{n-1}$$

$$\alpha \quad 0 \quad \beta$$

$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$

$$C_n^{n-1}x^{n+1} - 2(n+p)\left[C_n^{n-1} - 2(n+p)\right]x^{n+1}$$

$$n - 2(n+p)$$

$$-(n+2p)$$

$x_4)-(x$

Supposons : $x = \beta_1 x + \beta_2 x^2 +$ ——

Quan

l1

par

Supp

Car

Co

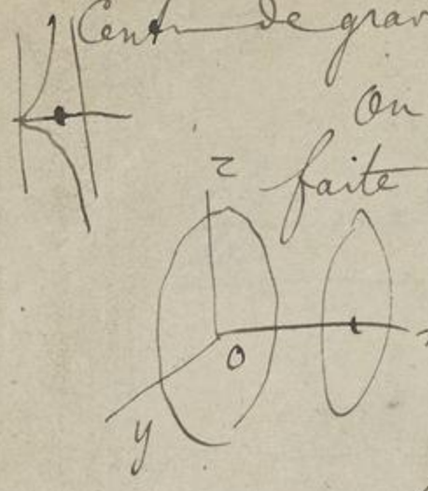
21

,

To

Des

Centre de gravité de l'aire de la cissoïde de Dioclès : $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$.



On consid un solide tel que l'aire de la section
z faite dans ce solide par le plan $x=h$ ait une expres
de la forme $a+bh+ch^2$. appel V volu
de ce solide entre les plans $x=0$, $x=h$,
trouver que $V = \frac{h}{6}(S_0 + S_1 + 4\Sigma)$
S_0 sect par $x=0$, S_1 sect par $x=h$, Σ sect
par plan $x=\frac{h}{2}$. Trouver en fonct de S_0 S_1 Σ l
le rapp des dist du centre de grav du vol aux 2
plans $x=0$ et $x=h$. — Applog cas forme au Cone, au
tronc de cône) au segm sphérique.

Mouvem des points matér. Etud mouvement dans un
plan horizont de 2 points matér. de masses m et m',
liés par un fil de long constante qui passe par un
anneau fixe O. Calculer tension du fil. Former
équat qui donne valeurs extrêmes des rayons vecteurs
Dans quels cas peut-on effectuer complètem l'intégra

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = \varphi(x,y) \end{cases}$$

Démontrer que $J = \frac{1}{D}$.

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\partial y}{\partial X} & 1 - \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dy}{dY} - \frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dY}\cdot\frac{dX}{dx} - \frac{dy}{dX}\cdot\frac{dx}{dY} + \frac{dy}{dY}\cdot\frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dX}\cdot\frac{dY}{dy}$$

$$\frac{dy}{dY}\left(\frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dy}\right) - \frac{dy}{dX}\left(\frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dy}\right)$$

$$\frac{dy}{dY} - \frac{dy}{dX} = \left(\frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dY} - \frac{dy}{dX}\right)$$

$$\frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dy} = 1$$

$$\frac{dy}{dY} - \frac{dy}{dX} = 0$$

$$\frac{dy}{dY} = \frac{dy}{dX}$$

$$1 = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$1 = \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$0 = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$0 = \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial X}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{D} \qquad \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{D}$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial X}{\partial y} \\ 1 & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}}{+D} = \frac{\frac{\partial X}{\partial y}}{+D} \qquad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & 1 \end{vmatrix}}{-D} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}}{-D}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{D}\frac{\partial Y}{\partial y} & -\frac{1}{D}\frac{\partial X}{\partial y} \\ -\frac{1}{D}\frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{1}{D}\frac{\partial X}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2}\cdot D = \frac{1}{D}$$

Mardi, à 10 ½

Jeudi, 2 à 3.

Poincaré

Conférences d'Analyse.

II.

M. Poincaré.

Trouver le maximum et le minimum de l'expression $x^2+y^2+z^2+t^2$, où x, y, z et t sont des variables liées entre elles par les relations

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2=1$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t=0.$$

Discuter pour savoir si ce max. et ce min existent.

Calculer le maxim et le minim et en général les variat de $\dfrac{e^{-x^2}+x^2+y^2}{e^{-y^2}+x^2+y^2}$

Trouver la condit. pour que les traject orthog. des courbes $f(x,y)=\text{const.}$ (Relat entre x, y et dérivées) tournent au point x, y leur concavité vers les y positives.

Envisageons $F(x,y)$ de 2 variables, continue et finie ainsi que toutes ses dérivées, et satisfaisant

$$P\frac{d^2F}{dx^2}+2Q\frac{d^2F}{dx\,dy}+R\frac{d^2F}{d^2y^2}=0$$

P, Q, R polyn entiers en x et y tels que pour toutes les val réelles de x et y on ait $PR>Q^2$.
La fonct F ne peut avoir ni maximum ni minimum

Sommer la série $x\sin\varphi+\dfrac{x^3}{3}\sin 3\varphi+\dfrac{x^5}{5}\sin 5\varphi+\ldots$

Dérivons $x\cos\varphi+x^3\cos 3\varphi+x^5\cos 3\varphi+\ldots$

Considd. la série $x\sin\varphi+x^3\sin 3\varphi+x^5\sin 3\varphi+$

Mult celle-ci par $\sqrt{-1}$ et ajoutons, en posant $x(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z$. On a

$z + z^3 + z^5 + \ldots$, progression dont somme est $\frac{z}{1-z^2}$, à condr que $\mod z < 1$. Alors revenons à x et φ ; on a $\frac{x e^{i\varphi}}{1 - x^2 e^{2i\varphi}}$; cherchons la partie réelle de cette quantité ~~est~~ ;

$$x e^{i\varphi} \frac{(1 - x^2 e^{-2i\varphi})}{(1 - x^2 e^{2i\varphi})(1 - x^2 e^{-2i\varphi})} = \frac{x e^{i\varphi} - x^3 e^{-i\varphi}}{1 - 2x^2 \cos 2\varphi + x^4} ,$$

la partie réelle est $\frac{x \cos\varphi - x^3 \cos\varphi}{1 - 2x^2 \cos 2\varphi + x^4}$, elle représ. la série dérivée de la série donnée. Or cela est la dérivée de $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x \sin\varphi}{1 - x^2}$ par rapp à φ , en effet dérivons ceci , on a $\frac{1}{2} \frac{\frac{2x}{1-x^2} \cos\varphi}{1 + \frac{x^2 \sin^2\varphi}{(1-x^2)^2}} = \frac{1}{2} \frac{2x \cos\varphi (1-x^2)}{(1-x^2)^2 + x^2 \sin^2\varphi}$

$$= \frac{1}{2} \frac{x \cos\varphi - x^3 \cos\varphi}{1 - 2x^2 + x^2 \sin^2\varphi + x^4} = \frac{1}{2} \frac{x \cos\varphi - x^3 \cos\varphi}{1 - 2x^2 \cos 2\varphi + x^4} ,$$ et la const d'intégration est nulle.

Mais a-t-on le droit d'intégrer de la sorte une série ? Prenons $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + R_n$ en supp u_0 , u_1 , $\ldots$ u_n fonct de x , on a identiquem

$$\int S\,dx = \int u_0\,dx + \int u_1\,dx + \ldots + \int R_n\,dx$$; il suffit que $\int R_n\,dx$ tende vers zéro. Or pour cela il ~~suff~~ faut que l'on puisse prendre n assez grand pour que $R_n < \varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on veut, et cela quel que soit x. —

Mais la méthode précédente nécessite l'intégration

d'une expres compliquée. Or voici une méthode plus facile.

Consid $x\cos\varphi + x^3\frac{\cos 3\varphi}{3} + x^5\frac{\cos 5\varphi}{5} + \text{———}$

et $x\sin\varphi + x^3\frac{\sin 3\varphi}{3} + x^5\frac{\sin 5\varphi}{5} + \text{— —}$

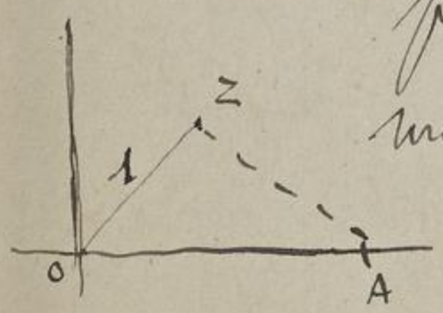
Mult la 2e par i, et ajoutons, on a

$$z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \text{———} \quad \text{———} + R_n$$

Différentions en z, on a $1 + z^2 + z^4 + \ldots = \frac{1}{1-z^2}$

pour $\mathrm{mod}\, z < 1$, et le reste $R_n = \frac{z^{2n+2}}{1-z^2}$. Or quelle est l'intégr de $\frac{1}{1-z^2}$? On a $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2(1-z)} + \frac{1}{2(1+z)}$

dont l'intégr est $\frac{1}{2} L\frac{1+z}{1-z}$; on peut rempl z par sa valeur et chercher la partie réelle — Mais auparavant peut-on prendre $\int_0^z \frac{z^{2n+2}}{1-z^2}\,dz < E$, pour $n = \infty$; en prenant l'intégr le long d'une droite, et en supp $\mathrm{mod}\, z = x < 1$. Evidemment on le peut. Supp $\mathrm{mod}\, z = 1$ mais φ non égal à 0 ou à π. On prend une lim supér. du module de la quant sous signe $\int$. On a $\mathrm{mod}\, z^{2n+2} = x^{2n+2}$, φ est constant dans l'intégr $\mathrm{mod}\, \frac{z^{2n+2}}{1-z^2}$ puisqu'on intégr le long d'une droite, donc $\mathrm{mod}\, dz = dx$, $\mathrm{mod}\,(1-z^2) = \mathrm{mod}\left(\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1+z}\right)$



$1-z$ ne peut devenir nul, ni $1+z$; donc $\frac{1}{1-z}$ et $\frac{1}{1+z}$ ne deviennent pas infinis, donc on a $K x^{2n+2}dx$, donc $< K\int_0^1 x^{2n+2}dx = \frac{K}{2n+3}$, dont limite est zéro. — Alors on prend partie réelle

autre moyen On dével par Mac-Laurin l'expres
$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}$ suiv. puis. croiss. de x. Mais ce développem est-il possible?

Consid une fonct dével suivant puis. croiss de z,

$$F = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots \quad ,$$

et supp ce dével possible pour $z<1$; et supp que z soit dével en x

$$z = \beta_0 x + \beta_1 x^2 + \cdots$$

pour une certe val de x
et supp de plus $\beta_0 + \beta_1 \cdots \beta_p$ posit. Je dis que
F sera dével, pour cette valeur de x, suiv. les puis.
croiss. de z. On consid les puis. succ de z.

$$z^2 = \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x^3 + \cdots$$
$$z^3 = \gamma_1 x^3 + \cdots$$
$$\{$$

Soient $A_0, A_1 \ldots A_n$ les mod de $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$.
La série $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ est converg. On dém. en effet
que si F est conv pour $z<1$, cette série l'est aussi.
Et la série est absol converg ; mais chac de ses term
est le module de l'autre

Il suffit donc ici de constater que $\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}$
n'a dans son dével. que des termes positifs. Or c'est
ce qui a lieu si $\sin\varphi$ est >0. Or réciproquement la
même chose a lieu, si tous les termes sont <0,
c.à.d. si $\sin\varphi$ est <0.

Si $x<1$, on a $2x\sin\varphi < 1-x^2$
d'où $\sin\varphi < \frac{1-x^2}{2x}$, chacun le moindre de $\frac{1-x^2}{2x}$
est constam positif on trouve ainsi une certe limite

Reste à trouver quelle est celle des valeurs de l'arc tg qui doit être développée. Soit α l'arc tang compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. On a arc tg $= \frac{\alpha}{2} + K\frac{\pi}{2}$; montrons que K est une constante, entière ; ce doit être une fonct continue de x et de φ. En effet α est une fonct cont de x et φ, pourvu que l'on n'ait pas $x = \pm 1$, ce qui rend l'arc ∞ ; or

Faisons tendre x vers 1 ; on le supp positif. $\frac{2x \sin\varphi}{1-x^2}$ tend vers l'∞ ;

x tend vers 1 par val inf à 1. Si $\sin\varphi > 0$, α a $+\infty$, si $\sin\varphi < 0$, $-\infty$. Si vers $+\infty$, α tend vers $+\frac{\pi}{2}$, dans le cas cont vers $-\infty$. On a

$\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} + \cdots$ tend vers $\frac{\pi}{4}$ si $\sin\varphi$ est posit c.-à.d si φ entre 0 et π, et vers $-\frac{\pi}{4}$ si φ entre π et 2π. Donc la série est une fonct discontinue de φ ; et pourtant chaque terme est une fonct continue de φ.

On serait tenté de dire, on a

$S = u_0 + u_1 + \cdots + R_n$ dont termes sont fonct

Contin de x ; donc à x val inf voisines

$S' = u'_0 + u'_1 + \cdots + R'_n$, d'où

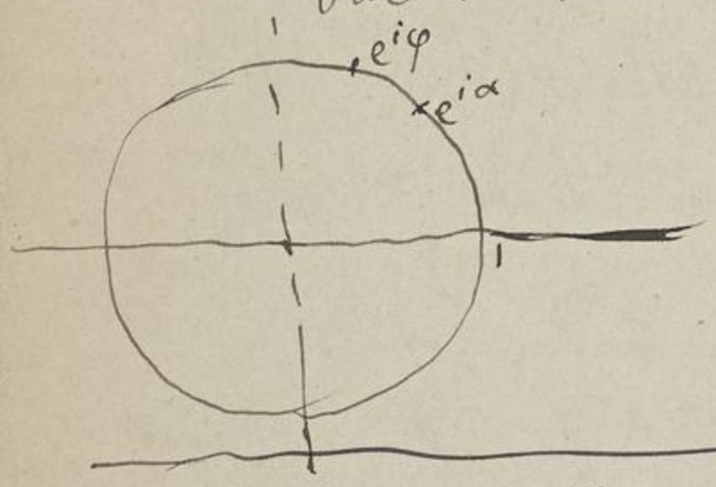
$S' - S = (u'_0 - u_0) + (u'_1 - u_1) + \cdots$

on peut prendre $u'_0 - u_1 < \varepsilon$; donc $R_n - R'_n < \varepsilon$, donc $S' - S < \varepsilon$. Ce raisonn est faux. Car on peut prend n assez grand pour que $R_n < \frac{\varepsilon}{2}$, $R'_n < \frac{\varepsilon}{2}$, quand x fixe. Mais si x variable, la val telle que $R_n < \frac{\varepsilon}{2}$ et $R'_n < \frac{\varepsilon}{2}$ peut ne plus convenir, quand

x s'approche indéf de sa val primitive — Donc on ne peut dire $R_n - R'_n < \varepsilon$.

Construire une série égale à α, quand φ est compris entre 0 et α, et égale à 0 dans le cas contr.

On considère $\log \frac{1-r}{1-e^{i\alpha}}$, son argum est const quand r varie de 0 à α, ou de α à 2π; mais pas la même valeur dans les 2 cas.



Si V est cont. ainsi que ses dér, et si $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$, elle n'a ni max. ni minim

En effet, si un max ou un min, on peut le supposer pour $x=y=0$. Car si pour $x=\alpha$, $y=\beta$, on change x en $x-\alpha$, y en $y-\beta$, et cette éq est encor vérif

$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots$ Σ term du degré $0, 1, 2 \dots$

Exprim que V satisf ident à $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy} = 0$, on a

ident $\frac{d^2V_0}{dx^2} + \frac{d^2V_0}{dy^2} + \frac{d^2V_1}{dx^2} + \frac{d^2V_1}{dy^2} + \frac{d^2V_2}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dy^2} + \dots = 0$.

d'où $\frac{d^2V_2}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dy^2} = 0$, $\frac{d^2V_3}{dx^3} + \frac{d^2V_3}{dx_3} = 0$, car terms homog

Soit V_n degré n en x et y — on a $\frac{d^2V_n}{dx^2} + \frac{d^2V_n}{dy^2} = 0$,

Suppl que ce soit le premier qui

Posons $x = \rho \cos\omega$, $y = \rho \sin\omega$. On a $V_n = \rho^n \varphi(\omega)$, et je dis que $\varphi(\omega)$ n'est pas constamment de même signe et s'annule

L'éq $\frac{d^2V_n}{dx^2} + \frac{d^2V_n}{dy^2} = 0$ se transf en $\frac{d^2V_n}{d\rho^2} + \frac{d^2V_n}{d\rho}\frac{1}{\rho} + \frac{d^2V_n}{d\omega^2}\frac{1}{\rho^2} = 0$

Or $\frac{d^2V_n}{d\rho^2}$ est $n(n-1)\rho^{n-2}\varphi(\omega)$, $\frac{dV_n}{d\rho} = n\rho^{n-1}\varphi(\omega)$.

Donc $\frac{d^2V_n}{d\omega^2} = \rho^n \varphi''(\omega)$. Donc on a, après réduct,

$\varphi''(\omega) + n^2\varphi(\omega) = 0$. On dém aisément que la seule fonct φ satisfaisant à cela est $\varphi(\omega) = A\cos(n\omega + \alpha)$,

donc $V_n = A\rho^n \cos(n\omega + \alpha)$. Donc V_n ne prend pas conserv constam le même signe ni V par suite.

Cela est susceptible de généralisation

Posons $X = \alpha x + \beta y$, $Y = \gamma x + \delta y$, que dérivant l'éq ? on a

$$\frac{d^2V}{dX^2}\alpha^2 + \frac{d^2V}{dXdY}\alpha\gamma + \frac{d^2V}{dY^2}\gamma^2$$

donc $\frac{d^2V}{dX^2}(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + 2\frac{d^2V}{dXdY}(\alpha\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \alpha\delta)$

$$+ \frac{d^2V}{dY^2}(\gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2) = 0.$$

ou $a\frac{d^2V}{dX^2} + 2b\frac{d^2V}{dXdY} + c\frac{d^2V}{dY^2} = 0$

qu'elle conduit ainsi à (b, c), pour que V n'ait ni maxim ni minimum c'est $ac - b^2 > 0$. En effet, suppos $\gamma = 0$

$a = \alpha^2 + \beta^2$, $b = \alpha\gamma + \beta\delta$, $c = \gamma^2 + \delta^2$, on peut résoudre ce syst Donc si $b^2 - ac < 0$, cette éq est une transf de la proposée.

appliquons cela à $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$

Suppr un mien on peut le suppr pour $x=y=z=0$.

Déc. V suit. puiss croiss de x, y, z

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \text{———}$$

V_0, V_1, V_2 étant polyn int et homog de degrés $0, 1, 2$ en x, y, z et chacun satisf séparém à

$$\frac{d^2V_n}{dx^2} + \frac{d^2V_n}{dy^2} + \frac{d^2V_n}{dz^2} = 0.$$

Sous que V prés. un mays, faut et suff que le 1er poly que ne s'annule pas identiquem soit de rang pair et ~~ne~~ prés. toujs le mên signe. Suppos que ce soit V_n. Je dis qu'il ne peut prés. le mêm Lieu courbes sous $x = \xi z$, $y = \eta z$, alors $V_n = u z^n$.

u étant fonct de ξ et η. On a $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$. Donc $\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = \frac{dV}{d\xi}\frac{1}{z}$,

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{d\eta}\cdot\frac{1}{z}, \quad \frac{dV}{dz} = \frac{dV}{d\xi}\left(-\frac{x}{z^2}\right) + \frac{dV}{d\eta}\left(-\frac{y}{z^2}\right) + \frac{\partial V}{\partial z},$$

ou $$\frac{dV}{dz} = \frac{dV}{d\xi}\left(-\frac{x}{z^2}\right) - \frac{dV}{d\eta}\frac{y}{z^2} + n z^{n-1}\cdot u$$

Différent encore :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{z^2} \qquad \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{d\eta^2}\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = + \frac{d^2V}{d\xi^2}\left(\frac{x^2}{z^4} + \frac{d^2V}{d\xi\, d\eta}\frac{xy}{z^4} + \frac{d^2V}{d\eta^2}\frac{y^2}{z^4} - A\frac{dV}{d\xi}\right.$$
$$\left. - B\frac{dV}{d\eta}\right) - \text{———}$$

A, B fonct quele

on a pour $z=1$ $\frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi^2+1) + 2\frac{d^2u}{d\xi d\eta}\xi\eta + \frac{d^2u}{d\eta^2}(\eta^2+1)$.

$$+A\frac{du}{d\xi} + B\frac{du}{d\eta} + Cu = 0.$$

Je dis que le poly en ξ et η ne peut conserver le même signe (car il présenterait un minimum) soit pour $\xi=\alpha$, $\eta=\beta$, ou développerait le poly en puiss croiss de $\xi-\alpha$, $\eta-\beta$; le prem poly qui ne s'annulerait pas devrait être d'ordre pair et conserver même signe, soit U_n, celui-ci. Supp que nous ayons remplacé u par $u_n + u_{n+1} + \dots$ dans l'équat. Le déb commencera par termes d'ordre $n-2$, car

$$\frac{d^2u_n}{d\xi^2}(\alpha^2+1) + 2\frac{d^2u_n}{d\xi d\eta}\alpha\beta + \frac{d^2u_n}{d\eta^2}(\beta^2+1) = 0.$$

etc. C'est une ident en $n-2$, Donc termes d'ordre $n-2$ sont identiquement nuls.

Donc si U_n est le prem des term de degré le moins élevé, ils doivent satisf à cette équat ident^q. Alors U_n aurait un minim ou un maxim qui serait zéro, puisque U_n est pour de même signe. Il suffit de voir si $ac > b^2$, c.à.d. si

$(\alpha^2+1)(\beta^2+1) - \alpha^2\beta^2 > 0$, c'est ce qui a lieu.

Donc le théor est démontré d'une façon plus élémentaire dans toute sa généralité.

Voici d'autres méthodes qui font mieux pénétrer dans le cœur de la question

Soit un max pour $x=y=z=0$.

Posons $x = \rho\cos\alpha$, $y = \rho\cos\beta$, $z = \rho\cos\gamma$

Sous marg, il faut que $\int_{dp}^{dV} w$ val très. petites de ρ
l'expres ait Poinj. le même signe. Alors en
Coord cosα, cosβ cosγ Cons constante, on a
$\frac{dV}{dp} > 0$. , on remarq que ρ et essentiellem positif
Coord Sphère de rayon assez petit pour que $\frac{dV}{dp} > 0$
Coord un élém. w tracé sur cette sphère, qui
fait angles α, β, γ avec plans de coord
Envisageons $\int \frac{dV}{dp} w$, qui est positif, puisq
$\frac{dV}{dp}$ est > 0 pour toutes les val de α, β, γ
on peut écrire $\int \frac{dV}{dx} w \cos\alpha + \int \frac{dV}{dy} w \cos\beta + \int \frac{dV}{dz} w \cos\gamma$
car $\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dp} \cos\alpha$. Coord la 1ère somme
Projetons sur plan des yz l'élém. w, on a un cylind
inf petit paral à ox qui découp sur sphère
un second élém. infi- petit w'. On a
$\frac{dV}{dx} w \cos\alpha - \frac{dV}{dx'} w \cos\alpha = \int \frac{d^2V}{dx^2} dx dy dz$.
au point w'.
$= \int \frac{d^2V}{dx^2} dx dy dz$.
La somme doit quant 3 est nulle, ce qui est impossible
Car on a > 0 - Donc absurde de supposer un
maximum ou un minimum
On peut donner autre forme à ce
Rat. sonnen Supp espace rempli d'un fluide

dont vitesse est $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$. Combien un élém.
de surf. La quant de fluide qui y passe dans
l'unité de temps est $\underline{abcd} \cdot dy\,dz = \frac{dV}{dx}\,dy\,dz$
Considé parallélépipède on a comme quant qui passe
$\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz$ parallèlement à ox Sur la quant
paral à oz on a $\frac{d^2V}{dz^2}\,dx\,dy\,dz$, etc
Donc somme $\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right) dx\,dy\,dz$
C'est zéro. Donc il entre autant de fluide qu'il en
sort La quant de fluide dans cet espace est
constante Supp un maxim Les surf $V = \text{const}$
sont surf. fermées s'enfermant mutuellement
La vitesse serait, soit toujours dirigée vers l'intér,
ou toujours vers l'extér. Alors il sortirait toujours
du fluide sans en entrer, ou il en entrerait
toujours. Donc il y a

Cherchons démontrat rendant compte de
la nature des polyn $V_0, V_1, V_2 \ldots$
Considr V_n homog. en x, y, z de degré n.
Supp $x = \rho \cos\omega$, $y = \rho \sin\omega$. L'éq devient
$\frac{d^2V}{dz^2} + \frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\omega^2} = 0$. Alors
$V_n = \varphi(z, \rho, \omega)$. Quelle est la nature de cette
fonct par rapp à ω? Elle est par rapp à z et ρ.
homog et de degré n en z et ρ.
Pour ω, homog en $\cos\omega$ et $\sin\omega$; ou
en $e^{i\omega}$ et $e^{-i\omega}$, ou enfin en repas à $\cos$ et $\sin$

$A_m \cos m\omega + B_m \sin m\omega$. , et $m \leq n$

Considr $\varphi\left(z, \rho, \omega + \frac{2\pi}{n+1}\right)$
$\varphi\left(z, \rho, \omega + 2.\frac{2\pi}{n+1}\right)$
$\}$
$\varphi\left(z, \rho, \omega + 2n.\frac{2\pi}{n+1}\right)$.

En les ajout on a une fonct qui satisf à l'équat
si const $\neq 0$ leur somme const. paril. On a

$$\sum \cos \alpha\omega + \sum \cos\left(\alpha\omega + \frac{2\pi}{n+1}\right) + \sum \cos\left(\alpha\omega + 2.\frac{2\pi}{n+1}\right) + \ldots$$
$$= 0 \text{ , si } \alpha \leq n.$$

Donc un seul terme subsiste c'est le terme qui ne contt ni cos ni sin.
Donc fonct ne dépend plus de ω et si on
const cela con une surf et si on l'égale à zéro elle est de
révolut autour de oz.

$$V_n = \varphi(z, x^2+y^2) = \sum A_p z^p (x^2+y^2)^q \text{ , } p+2q=n$$

ou $\sum B_p . z^p (x^2+y^2+z^2)^q$, $p+2q=n$.

Le suppr. de que cette polyn satisf à l'éq proposée
On arrive à la formule de récurrence

$$(p+1)(p+2)\, B_{p+2} = B_p \cdot (ap^2+bp+c) .$$

en supp $x^2+y^2+z^2=1$, le polyn dev. $\sum B_p z^p$.
Le poly en z satisfait à l'éq

$$(z^2-1)\frac{d^2V}{dz^2} + 2z\frac{dV}{dz} - n(n+1)V = 0 \text{ ,}$$

or c'est l'éq dont le polyn de Legendre

$d^n (z^2-1)^n$. Donc nos polyn de déduis de ceux de Legendre en rendant homo

de pour maps, il faut pas de chang de sig
mais polyn de Leg a toutes ses rac réelles, donc
il ne peut avoir d'anj. mêm signe, et il en est de
même de nos polyn et par suite de V_n.

Construire le rayon de courbure de la courbe engendrée par le mouvement d'un point appartenant à une figure invariable appliquée à la conchoïde, au limaçon de Pascal, à l'ellipse, à une podaire.

Etant donnés 3 points fixes A, B, C, $r_1 r_2 r_3$ les dist d'un point M à ces 3 points, le produit $r_1^m \times r_2^n \times r_3^p$ peut-il avoir un maxim ou un minim en dehors de 0 et ∞ ?

Dévelop par formule de Mac Laurin
$(1 + 2xy + x^2)^n$ et prouver que les dével sont
de la forme $\sum P_n x^n$, P_n étant un
polyn en y de degré n et satisfaisant à l'équat différent

$$(y^2-1)\frac{d^2 P_n}{dy^2} + \alpha y \frac{dP_n}{dy} + \beta P_n = 0,$$

α, β sont des constantes.

$$F = x^2+y^2+z^2+t^2, \qquad Ax^2+By^2+\text{—} = 1,$$

$$\psi = \alpha x + \beta y \text{ —} = 0.$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{Ax^2+By^2} = F \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ou $dF = 0$ ou $Y\,dx - X\,dy = 0$

$dX - F dY = 0$, $x dx(1-AF) + y dy(1-BF) + z dz(1-CF) = 0$

~~d~~

$d\psi = 0$ ou $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$.

dx, dy, dz sont liés par cette relat — Tirons - en dz, alors dF est ident nul. Il faut donc exprimer que la 2e éq est une conséq de la 1ère. La condit est

$$\frac{x(1-AF)}{\alpha} = \frac{y(1-BF)}{\beta} = \frac{z(1-CF)}{\gamma} .$$

En retranl les 2 1ères équat on a

$$x^2(1-AF) + y^2(1-BF) + z^2(1-CF) + t^2(1-DF) = 0 ,$$

avec $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$.

Le coef de x dans la 2e et le dénom du 1er rapp dans la 1ère c'est $x(1-AF)$, c.à.d. le num du 1er rapport

Donc chaq rapport $= \frac{t(1-DF)}{\delta}$. On peut en déduire

l'équat en F. Rempl $x^2(1-AF)^2$, — par quent propal α^2, β^2, — l'éq subsiste. On aura

$$\frac{\alpha^2}{1-AF} + \frac{\beta^2}{1-BF} + \frac{\gamma^2}{1-CF} + \frac{\delta^2}{1-DF} = 0 ,$$

3e degré en F. Comb de rac réelles? Elle en a 3; car les numér. sont posatifs et dénom de la forme $x-a$.

Supp $A > B > C > D$. Substituons $\frac{1}{A} + \varepsilon$, $\frac{1}{B} - \varepsilon$.

Dans 1er Cas, (1-A le 1er terme qui donne son signe il est $\frac{\alpha^2}{-A\varepsilon}$, signe de A; les 3 autres signes de B. Il y a là une difficulté qu'on lève en supp ε au lieu de $1-AF$, on ait $F-A$, $F+B$, — on ne serait pas embarassé on aurait une rac dans chaq intervalle. Posons $F = \frac{1}{\varphi}$,

$$\frac{\alpha^2}{\varphi - A} + \frac{\beta^2}{\varphi - B} + \frac{\gamma^2}{\varphi - C} + \frac{\delta^2}{\varphi - D} = 0 ,$$

alors 3 rac entre A et B, B et C, C et D.

Ces 3 rac convien — elles à la quest? Il faut qu'elles ~~soient~~ correspond à val réelles de x, y, z, t.

ona $\frac{\lambda(1-AF)}{\alpha} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \lambda$

et $x^2+y^2+z^2+t^2=F$. Il faut que ces éq donn rac réelles pour $x\,y\,z\,t$. Alors $x\,y\,z\,t$ sont réels en mêm temps que λ. Donc condit de réalité est que F soit positive

Suppos, pour fixer idées, 3 rac positives entre $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{C}$ et $\frac{1}{D}$. Voy quelles sont celles qui corresp à un maxim, à un minim ou ni à l'un ni à l'autre

Pour abréger écrivons $\frac{\alpha^2}{A_1}+\frac{\beta^2}{B_1}+\dots=0$; pour que le produit $A_1B_1C_1D_1$ soit positif, il faut qu'un nomb pair de ces fact soit >0, donc prendre rac moyenne F ; au lieu que les rac extrêmes de F donneront $A_1B_1C_1D_1<0$.

C'est ce que nous allons retrouver

Dans d^2F, il faut tenir compte de $dF=0$, $d\varphi=0$ et $d^2\psi=0$. On peut considérer d^2x et d^2y sont nuls ainsi que d^2z. On a

$$dF=\frac{X\,dY-Y\,dX}{Y^2}, \qquad d^2F=\frac{(X\,d^2Y-Y\,d^2X)Y^2-(X\,dY-X\,dX)(\cdot)}{Y^4}$$

mais $X\,dY-X\,dX$ est nul, d'après $dF=0$. Donc

$d^2F = X\,d^2Y - Y\,d^2X$ en supprim facteur positif.

Il faut le signe de $F\,d^2Y-d^2X$. Cherch condit pour que $F\,d^2Y-d^2X=0$ ait ses rac réelles.

$X=x^2+y^2+z^2+t^2$, $dX=2(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$

$d^2X=2(dx^2+dy^2+dz^2)$, donc $d^2F=0$ se réduit à

$d^2F = A_1\,dx^2+B_1\,dy^2+C_1\,dz^2=0$. Il faut exprim $d\psi=0$,

(car dx, dy, dz ne sont pas indépend, $\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz=0$. Ces 2 éq auront-elles des rac réelles - Remplr dz par sa val, on a

$A_1\,dx^2+B_1\,dy^2+C_1\left(\frac{\alpha\,dx+\beta\,dy}{\gamma}\right)^2=0$,

$dx^2(A_1 \quad) + dy^2(\quad) + 2dxdy \quad = 0$.

Condit pour rac réelles $\dfrac{C_1^2\alpha^2\beta^2}{\gamma^4} > \left(A_1 + C_1\dfrac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)\left(D_1 + C_1\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)$

ou, en div. par $\alpha^2\beta^2$, $\dfrac{C_1^{*2}}{\gamma^4} > \left(\dfrac{A_1}{\alpha^2} + \dfrac{C_1}{\gamma^2}\right)\left(\dfrac{B_1}{\beta^2} + \dfrac{C_1}{\gamma^2}\right)$.

ou $\dfrac{A_1B_1}{\alpha^2\beta^2} + \dfrac{B_1C_1}{\beta^2\gamma^2} + \dfrac{A_1C_1}{\alpha^2\gamma^2} < 0$.

On peut simplifier cela, en mult l'inég par $\dfrac{\alpha^4\beta^4\gamma^4}{A_1^2B_1^2C_1^2}$, ce qui ne change pas les sens de l'inég

$\dfrac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{A_1B_1C_1}\left(\dfrac{\gamma^2}{C_1} + \dfrac{\beta^2}{B_1} + \dfrac{\alpha^2}{A_1}\right) < 0$. Or on a l'expr de la parenth par une éq plus haut. On a

$\dfrac{1}{A_1B_1C_1D_1} > 0$ ou $A_1B_1C_1D_1 > 0$. Cette inég est satisf pour rac moyen et non pour les rac. extrêm

Les rac extr donn un maxim ou un minim, on le verrait en poussant un peu plus loin la discussion
C'est la rac inférieure qui donn un minimum, la supér.
un maximum, et la rac moyen ne corresp ni
à un maxim ni à un minim.

Condit pour traj. orth des courbes $f(x,y) = \text{Const.}$ a tournent concavité vers y ~~positives~~ ~~négatives~~. ~~Il faut $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$~~ Il faut

et $\dfrac{d^2y_1}{dx^2} > 0$, $\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $\dfrac{dy}{dx}$ est fonct de x et de y,

à chaq val de x et y corresp un coef angul de la tang,

et $\dfrac{dy}{dx}$ est fonct de x et y. On a

$\dfrac{df}{dx} + \dfrac{df}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 0$, alors $\dfrac{dy_1}{dx}\cdot\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dy}$,

$\dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{\dfrac{df}{dy}}{\dfrac{df}{dx}}$, dér. $\dfrac{d^2y_1}{dx^2} = \dfrac{\left(\dfrac{d^2f}{dxdy} + \dfrac{d^2f}{dy^2}\dfrac{dy_1}{dx}\right)\dfrac{df}{dx} - \dfrac{df}{dy}\left(\dfrac{d^2f}{dx^2} + \dfrac{d^2f}{dxdy}\dfrac{dy_1}{dx}\right)}{\dfrac{df^2}{dx^2}}$.

Il faut le sum positif.

Max ou min de fonct f définie par

$P\frac{d^2f}{dx^2} + 2Q\frac{d^2f}{dxdy} + R\frac{d^2f}{dy^2} = 0$. Elle ne peut avoir ni max ni min, avec $PR - Q^2 > 0$

~~Déc totale de cela est~~ $\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2$,

On consid $\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} = 0$, la fonct f qui y satisfait ne peut avoir ni max ni minim — On dém le théor quand P, Q, R sont const — Ce max ou min a lieu pour $x = y = 0$, on peut le supposer. On déc f en ser de degré 1, de degré $n+1$, etc — $f = f_n + f_{n+1} + \dots$. Exp que f satisfait à l'éq proposée, identiquement. Les ter de degré $n-2$ doivent s'annuler identiquement — $P_0\frac{d^2f_n}{dx^2} + 2Q_0\frac{d^2f_n}{dxdy} + R_0\frac{d^2f_n}{dy^2} = 0$, c'est une éq de même form où P, Q, R sont des const ~~on~~ Il suffit donc de dém. le théor quand P, Q, R sont const — Ainsi considé

$P\frac{d^2f}{dx^2} + 2Q\frac{d^2f}{dxdy} + R\frac{d^2f}{dy^2} = 0$, où P, Q, R sont const — Soient

$X = \alpha x + \beta y$, $Y = \gamma y$. On a

$\frac{df}{dx} = \alpha\frac{df}{dX}$, $\frac{df}{dy} = \beta\frac{df}{dX} + \gamma\frac{df}{dY}$, dériv

$\frac{d^2f}{dx^2} = \alpha^2\frac{d^2f}{dX^2}$, $\frac{d^2f}{dxdy} = \alpha\beta\frac{d^2f}{dX^2} + \alpha\gamma\frac{d^2f}{dXdY}$,

$\frac{d^2f}{dy^2} = \beta^2\frac{d^2f}{dX^2} + 2\beta\gamma\frac{d^2f}{dXdY} + \gamma^2\frac{d^2f}{dy^2}$. On mult par $P, 2Q, R$,

et il faut qu'elle se réduise à l'éq plus haut, il faut donc $P\alpha^2 + 2Q\alpha\beta + R\gamma^2 = 1$, $Q\alpha + R\beta = 0$, $R\gamma^2 = 1$,

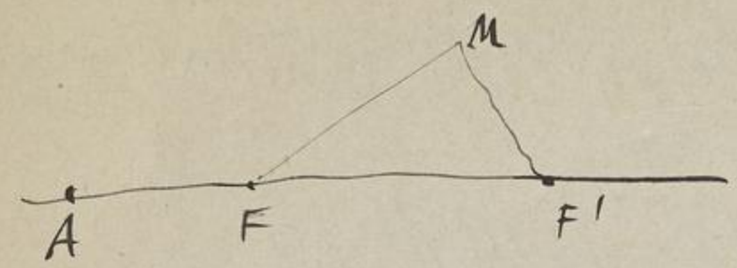
il faut $R > 0$, or on peut toujours sup $R > 0$, car on changerait les signes. Pour que l'éq ait ses racines réelles, il faut $PR - Q^2 \geq 0$, car $\beta = -\frac{Q\alpha}{R}$,

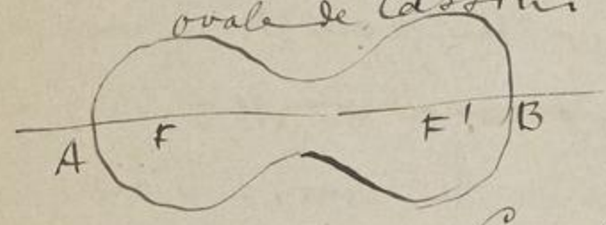
$\left(P\alpha^2 + 2\frac{Q}{R} + \frac{Q^2}{R}\right) = 1$, on $PR - Q^2 > 0$.

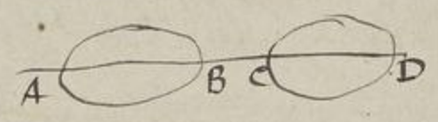
Analyse — On donne deux points F, F' ; R et R' les dist de un point M du plan à F et F'. Soit l'éq d'une courbe en coord bipolaires $\varphi(R, R') = 0$. On consid un point A de la courbe sur FF'. Calculer le rayon de courbure de la courbe en A. Applic à l'ovale de Descartes

$$\alpha R + \beta R' = \gamma$$

, et à l'ovale de Cassini $RR' = K$

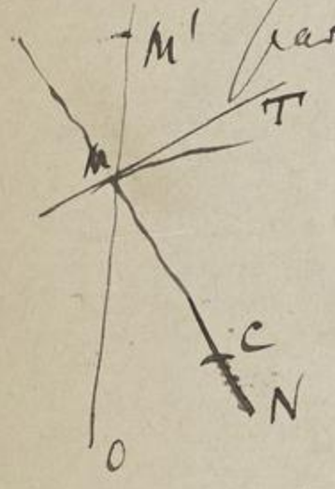






(aux points A et B de la 1ère ou aux points A, B, C, D de la deuxième).

~~Construire le~~ Conn le rayon de courbure d'une Courbe, constr le rayon de courbure de sa transformée par rayons vect réciproques.

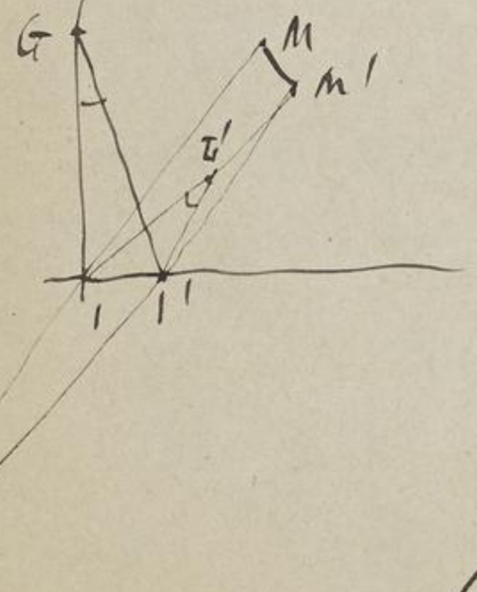


$$OM \cdot OM' = K^2$$

Applicat à la cissoïde consid comme transformée de la parabole par rayons vecteurs réciproques.

Construire les développées de la cissoïde oblique, strophoïde, limaçon de Pascal.

Const rayon de courb d'une courbe ~~engendrée~~ décrite par un point d'une courbe entraînée dans mouv épicycl



à l'inst t, I centre instant ω vit. ang. I' au bout de $t + dt$; le point G sur Π' tel que $\Pi\Pi' = IG \cdot \omega\, dt$. Norm à traj. de M est IM. Au bout de dt, M en M', MM' perp à IM, et $MM' = IM\, \omega\, dt$

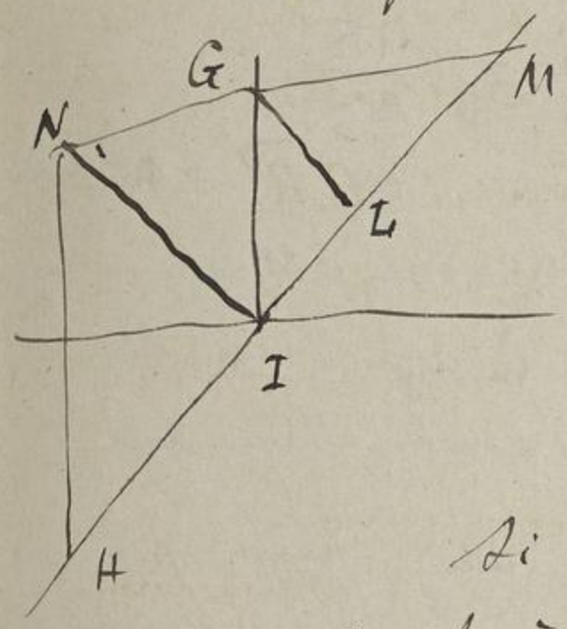
$MIM' = \omega\, dt$ .. H cent de courbure sur I' une parall à MI, $IL'I' = \omega\, dt$

les 4 points G, L', I, I' sur un cercle

Tri. semblables donnent $\frac{H'L'}{H'I'} = \frac{M'I}{M'H}$. a la cinq cercle tang

à II' en I, et L' vient en E proj. de G sur MO, et on a

$\frac{ML}{MT} = \frac{MI}{MH}$. $\overline{MI}^2 = MD \cdot MH$. Ceci donne construct de H connaissant G. — Joignons MG, menons IN perp à MI, et NH paral à IG. Car $\frac{ML}{MI} = \frac{MG}{MN} = \frac{HI}{MH}$.



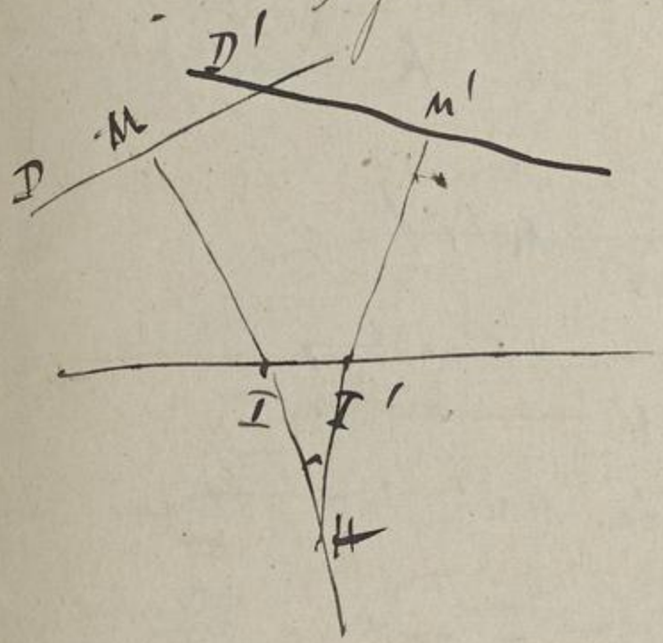
Tout revient à constr. G. Et pour cela on en cherche le lieu.

Suppr. qu'on connaît la traj d'un point M, on connaît alors H, et on a un lieu de G qui est ~~la perp~~ IG ⊥ MN

Si on conn lieu du point I, on a IG.

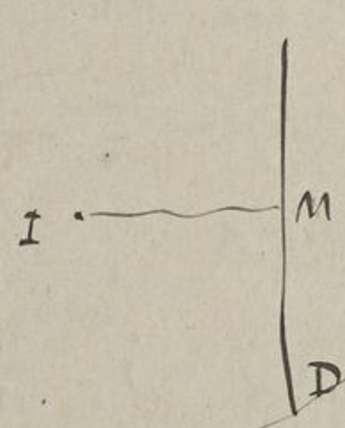
G est à l'intersn des 2.

Comm 2e lieu, suppr qu'on conn le centre de courbure de l'enveloppe d'une droite mobile. C'est une circonf D et D' inf. voisines, H centre de courbure MHM' = w dt. Donc



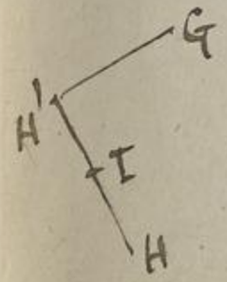
Lieu de H est un segt capable de w dt aux dessus de II'. Donc cercle sym de ILG par rapp à I.

Si on part d'un des points de la courbe mobile décrit une droite, G est sur cette droite



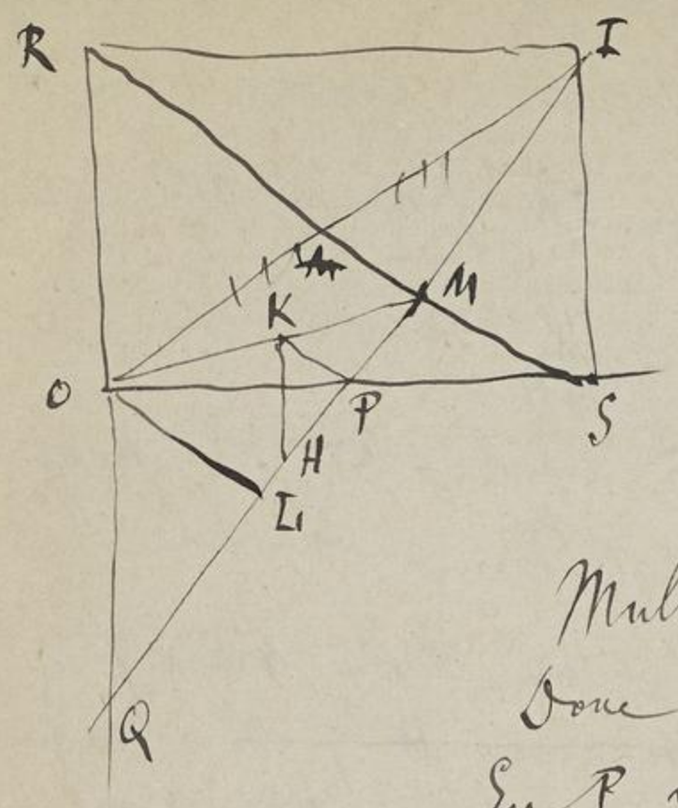
Traj. a un point d'inflexn Donc la circonf. de contf avec D, et G est sur la droite.

Si une droite mobile passe par un point fixe H, I centre inst, H sur cercle sym du cercle



des inflexn Donc une perp H'G à H'I contient G. (H' étant le symétr. de H par rapp à I.

Applicat Constr ellipse Engendrée par point de droite de long const extrem sur OR et OS rectang.



G en O. Donc de O perpend sur IM, H sera donné par $\frac{ML}{MI} = \frac{MI}{MH}$. Mais Constr.

Ari. semblable $\frac{MP}{MI} = \frac{MS}{MR}$.

Les 2 autres donnent $\frac{MQ}{MI} = \frac{MR}{MS}$.

Multpl $MP \cdot MQ = MI^2$. Or $MI^2 = ML \cdot MH$

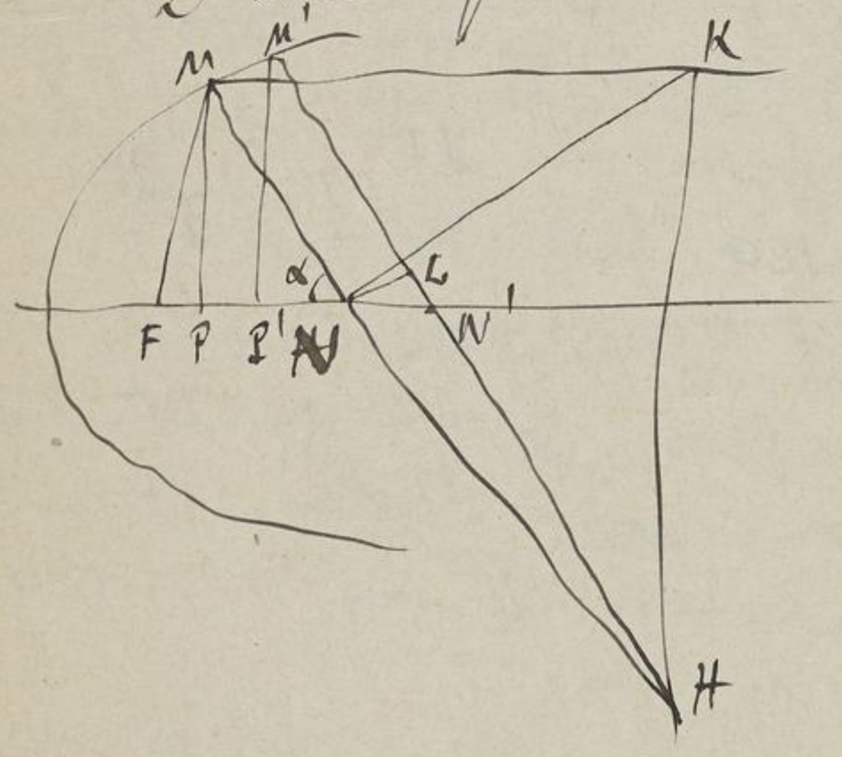
Donc $MP \cdot MQ = ML \cdot MH$. Menons OM,

En P une perp, paral KH à OQ donne H.

Car $\frac{MP}{ML} = \frac{MK}{MO} = \frac{MH}{MQ}$. Donc pour const 1 ay de

Comb d'ellipses on trace normales par P une perp, par K une parall à petit axe. — En vertu du princ de continuité, vrai pour parab et hyperbole —

D'abord parabole, dém. simple. Menons MO parall à l'∞, en M une perp à MN, en K une perp à l'axe —



En effet, MP' ;

Sous norm Const, donc $PP' = NN'$.

PP' proj. de MM' sur l'axe

MM' fait angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Donc

$PP' = MM' \sin\alpha$. Soient NL.

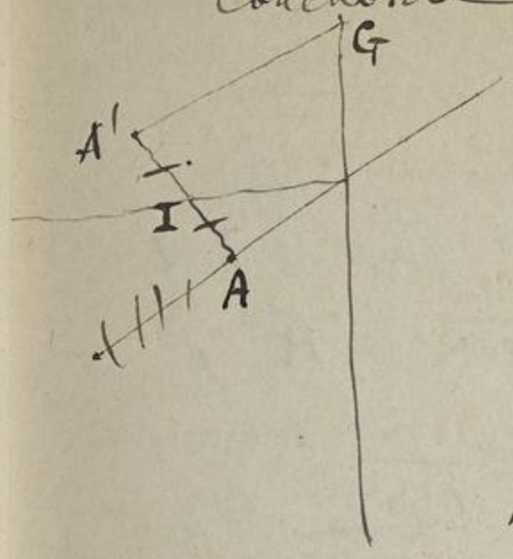
$NL = NN' \sin\alpha$, donc $\frac{MM'}{NL} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; mais $\frac{MM'}{NL} = \frac{MH}{NH}$

Dans Ari. semblable Or la construct donne précisément

$NH = \frac{KH \sin\alpha}{\sin\alpha}$, $KH = MH \sin\alpha$, donc $\frac{MH}{NH} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

quelques mots de la constr de G. dans les autres cas.

Conchoïde. La droite fixe contient G. En A' perp A'G.

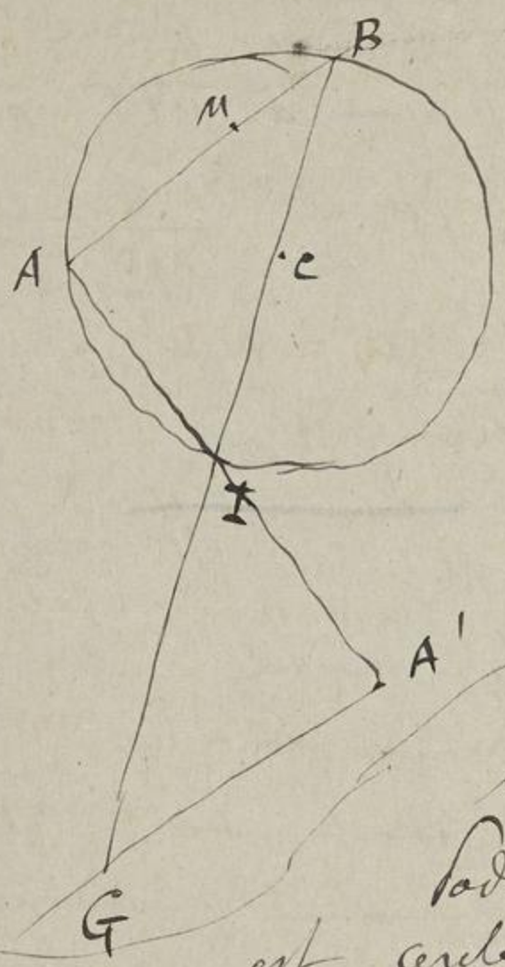


Pour limaç. de Pascal, le centre dist de rotat. est sur BC et sur perp en A, donc en I.

Le point G est sur IC d'une part A' sym de A ; G est sur perp en A'.

G est sym de B par rap. à I

Même principe pour podaires.



2.e Construct du rayon de courb de l'ellipse fondée sur principes analogues.

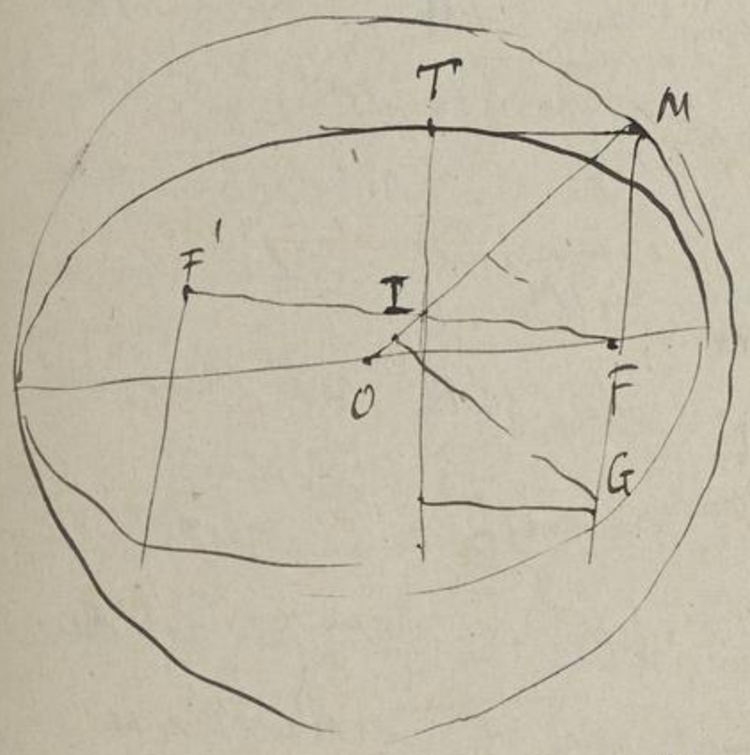
Sodaire de l'ellipse par rap à foyer est cercle sur grand axe

enveloppée par droite qui est côté d'angle droit dont côté pass par foyer ; sommet décrit cercle

Centre inst en I ; sym de F.

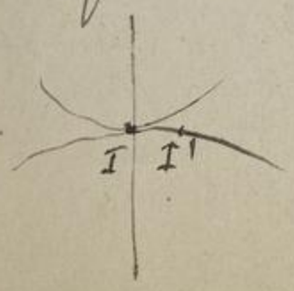
par F' parall à IT contient G ;

par $MT^2 = MO \cdot ML$, on a IL perp à MO. Mais vaut même temps contre sym de L par rapp à I ; perp à OM par L',



etc

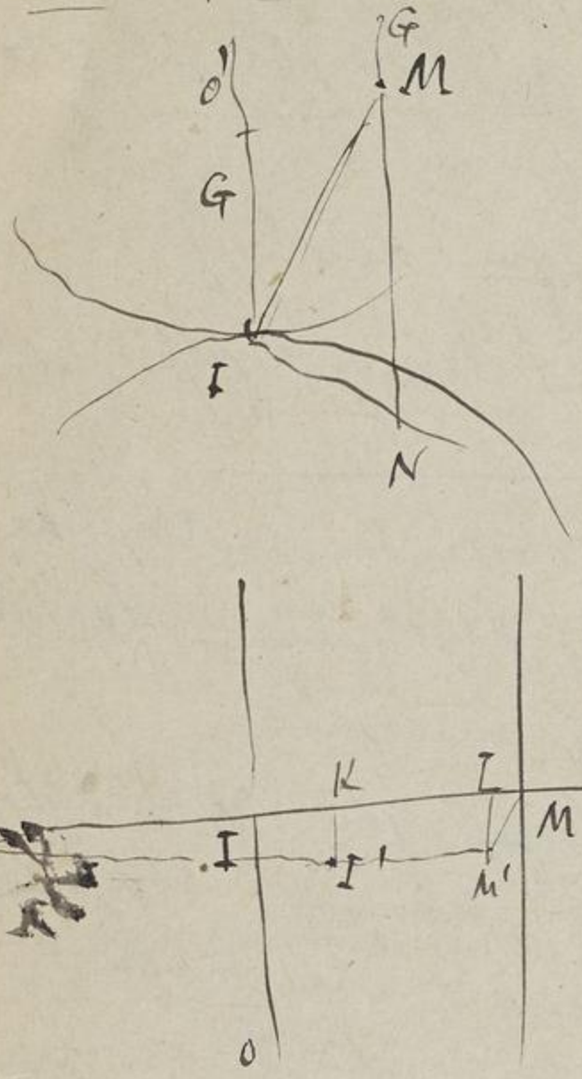
On peut toujours construire mouvement épicycloïdal engendré par roulement d'une courbe sur la courbe lieu des points I. Normale commune / centres de courbure en O' et O. Comment trouver IG ? On a $\frac{1}{IG} = \frac{\omega dt}{II'}$.



ωdt = somme des angles de contingence $= \frac{II'}{IO} + \frac{II'}{IO'}$

Donc $\frac{1}{IG} = \frac{1}{IO} + \frac{1}{IO'}$, ce qui donne G.

Supp les 2 courbes osculat en I. Rayons sont les mêmes mais on change signe de l'un, $\frac{1}{10} - \frac{1}{10'} = 0$, $10' = -10$, ? G à l'infini. Que devient le ray de courbe ? On joint M à G, paral par M à IO. en I perp à MI, on a N, par N paral à IG, ce qui donne NG, donc G est au cent de courbe lui-même, et ray de courbe nul en général. Cas exception:



supp M sur II'. La perp est IO elle-même. On a 2 droites paral pour G, donc à l'∞ dans direct IO. Et si par ce point une paral à IO, elle est indéterm, et on ne sait où elle coupe II'. On ne peut pas affirmer que ray de courb nul. Cons en effet I' infiniment voisin de I, je ne le mets pas sur IM, car IM est tangente à la tang. au lieu des points I, je ne néglige plus le 2e ordre; M vient en M', qui fait angle infiniment petit avec IO; nom IM', cent de courb en H. Sous avoir H, menons perp à IM.

$$\frac{I'H}{MH} = \frac{I'K}{IM'}$$

I'K est du point infiniment voisin à I tang, c'est du 2e ordre en général $= \frac{II'^2}{2IO}$. De même IM' est du 2e ordre en général = IL × vitesse de rotat. (non pas dans le temps t) mais au milieu de l'intervalle de t à t+dt et par dt. c'est 2e ordre donc $\frac{I'H}{MH}$ est fini, et H ne se confond pas avec M, le ray pas nul.

Comme explic que ray nul pour points en dehors de IM et pas nul sur IM. En général, pour courb a ray nul, point de rebroussement; si pt de reb

de 2e espèce diff de zéro. Donc en deh de IM
pt de rebr de 1re espèce sur IM, le cas particulier
est point de 2e espèce Donc traj. des points de IM présent
points de rebr de 2e espèce (Ces résultats peuvent se
trouver par analyse) Mais soussons plus loin cette recherche

Etud points singul des coub algéb

Soit $F(x,y)=0$. Dans le voisin de chaq point on a $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, dével suiv. puis. croiss. dt.
Si on a un point double, on a 2 exp de cette forme pour
chaq branche de courbe — si la coub était transcend, ce
que je vais supposer serait encore vrai (sauf au pôle de l'intégr logarithm par
exemple). Supp qu'elle φ et ψ s'annu au point
pour axe des x la tang au point, x et y s'annu
pour $t=0$. Alors on a $x = at^m + \dots$, $y = bt^p + \dots$
Je dis $p>m$. Car, pour $t=0$, dér. $\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = 0 = \frac{y}{x} = 0$.
Quelles sont les form de la coub suiv. val de m et p?
Pour un point ordin il faut que x chang de sig avec
t et y pas, car branch d'un même côté de sa
tang et traverse sa normale. m impl, p pair.
Si m impl et p impl, coub traverse les 2, on a
un point d'inf m pair et p impl point
de rebr de 1re espèce si pairs, rebr. 2e espèce
On a donc dér quelle est la val du ray de coub?

$$\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}$$

Num Degré $2(m-1)\cdot\frac{3}{2} = 3m-3$

Dén $m-1+p-2$, si $p-1+m-2$, $= m+p-3$
donc $R=0$, si $2m<p$; $R=\infty$, si $2m>p$;
R fini, si $2m=p$

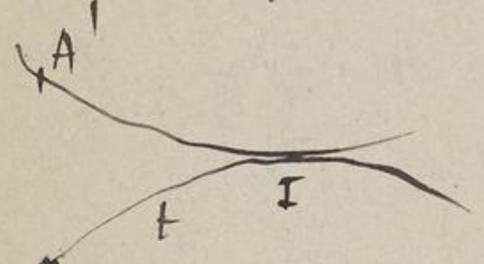
Cas le plus général. t repré le temps. Compos de
la vit. $\frac{dx}{dt}$; $\frac{dy}{dt}$. Condit. pour un pt de rebr

$m = 2$ et $p = 3$., donc $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ nuls. Dans ce cas, vit du point nul. Pour avoir réellement pt de rebr, il faut que ferm en Ω ne s'annule pas ; car on aurait

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$! son accélen étant nulle. Si on suppr vit = 0, mais accél. $\neq 0$, on a bien l'arc d'avoir point de rebrouss. Mais condit pour pt de rebr 1re espèce si $q\,m < p$ (par ex. $p = 3$), certain que 1re espèce si $p = 3$, ray nul ; si $p > 3$, au moins $p = 4$, ray de coul fini ou infini.

Donc si t est le temps, on a pt de rebr si vit = 0, accél $\neq 0$; et 1re esp si $R = 0$, 2e espèce si R fini.

Comment choisir var A ? On peut doit seulement la choisir de fac. que x et y s'expr par séries ordon suiv. puis. croiss de t. Or dans roulette, on peut prend com variable t l'arc compris entre I et un point fixe de courbe fixe — A l'pt qui était en contact avec A. Or on sait que coord d'un point peuv s'expr suiv. puis. de t, pourva que le point ne soit pas singul. Suppr I non sing pour aucune des 2 courbes



ξ et η s'expr suiv. puis. cr. de t.

De même les courbures des 2 courbes en I s'expr suiv. puis de t ce sont $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10'}$. Donc $\frac{1}{16} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10'}$, s'expr par séries suiv. puis. croiss de t. Donc vit angul de rot, qui est $\frac{11'}{16}$, s'expr suiv. puis. de t ; car Coord de I et vit angul s'expriment par puis. les coord du cent de coul aussi. Nous savons cert d'avoir point de rebr toutes les fois que vit nulle et accel $\neq 0$.

vit = IM . ω ; or quand IG inf (courbes osculat) $\frac{1}{IG} = 0$,
ω = 0, donc vit. nulle. Et l'accél ? De quoi se compose
t-elle ? La vit. de M varie parce que ω varie que I
se déplace et M aussi. Donc compose de
l'accél Celle qui vient du mouvem
de M et propor à vit. de M
(or vit nulle) donc cette compo dû par

I I'

Com I se déplace compo propor à vit ang, qui
est nulle. Donc acc ne peut être nulle que si $\frac{dw}{dt}$
est elle-même nulle. Or pour que cela ait lieu il
faut que les 2 courbes, au lieu d'être osculat du 2d ordre
aient cont du 3e ordre. On aura alors un pt de
rebroussement analytiquement mais le contact présentera
aspect d'un simple contact. Sur II', rayon
nul, point est de 1re espèce ; on dehors, 2e espèce.

Cela permet de résoudre quest suiv.
Const parabole, d'un cercle roulant à l'intér.
On const traj. des points liés à ce cercle. Lieu
des pts de rebroussement de 2e espèce de ce traj.
Il faut que le cercle soit osculat de la parab. Or rayon
de courb est différence entre 2 points sym par
rapp à l'axe (on doit suppr rayon du cercle plus
grand que rayon de courb minim). Il doit être
sur tang tang comm aux deux courbes. Donc
les 2 lieux sont les 2 tang
Si courbe mobile se réduit à droite, traj.
rés. un point de rebrous de 2e espèce
Et un pt ordin d'une courbe
ne peut par correspondre un pt d'inflexion
de la développée. On voit que la courbe
doit rés. un point de rebrous de 2e espèce

Confér. M. Poincaré. — Exercices. Trouver le lieu des points de
.P Contact des tangentes menées par un point extérieur
aux différentes coniques qui ont en un point M un
M contact du 2e ordre avec une courbe donnée.

Construire le centre de courbure d'une courbe
quand on connaît celui de sa transformée par polaires
réciproques par rapp à un cercle (Relat entre le rayon de
courb aux points correspond). Applic Cent de
courb d'une conique considérée comme transformée par
pol récipr d'un cercle. Construction de celle
connue

Soient X_0 X_1 X_2 X_3 des polynômes
1er degré en x et y ~~et sont les prem des~~ sont 4 droites. Soit
$X_0 = 0$, $X_1 = 0$ — λ un param arbitraire — l'équat

$$X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$$

est égale à l'éq d'une droite. Construire
l'enveloppe de ces droites.

Maxima et minima de $r_1^m r_2^n r_3^p$ (dist
d'un point à 3 points du plan).

Cette expression peut et finie — Donc max.
quand infinie et minima — quand nulle En dehors
de ces max et min il n'y en a pas. Car si elle
pas par max, de rien son log $V = m \log r_1 + n \log r_2 + p \log r_3$
x, y coord du point mobile — V satisfait à

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

, donc elle ne peut avoir ni max.
ni minima — Démontré courte) quand dér. des 3
prem ordres ne s'annulent pas en même temps.
X ne peut arriver ici que toutes ces dér. s'annulent
à la fois. Supp que les 3 points repré.

quant imag $z = x + iy$, $r_1 = \mathrm{mod}(z-a)$, $r_2 = \mathrm{mod}(z-b)$
$r_3 = \mathrm{mod}(z-c)$. Donc V = partie réelle de $\varphi(z)$, en posant
$\varphi(z) = m\mathrm{Lr}(z-a) + n\mathrm{Lr}(z-b) + p\mathrm{Lr}(z-c)$. Pour qu'un déc. de 3
prem ordre s'annul, il faut 2 prem déc. de φ nuls,
$\frac{d\varphi}{dz} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$, $\frac{d^3\varphi}{dz^3} = 0$, ou d'autre $\frac{d\varphi}{dz} = 0$
devrait avoir une rac triple, or cela impossible parce que
$\frac{d\varphi}{dz} = 0$ est du 2e degré, car $\frac{m}{z-a} + \frac{n}{z-b} + \frac{p}{z-c} = 0$.
en différentiant

Déval suiv. puis. croiss. de x l'expr. $(1+2xy+x^2)^m$
on prend une form qui est la général du binom

$$(1+a)^m = \sum \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!} a^p$$

Si $a > 0$ identiq, tjrs. vraie. Si a non entier, il faut $a < 1$.
De même $(1+a+b)^m = \sum \frac{m!}{m-p-q!\,p!\,q!} a^p b^q = \sum \frac{m(m-1)\cdots(m-p-q+1)}{p!\,q!} a^p b^q$
en supp m entier et > 0. Encore vrai, si m
par entier et pourt, mais $a+b < 1$. Pour le démontrer on
déval par form du binom, en supp m ent. et pourt,
on a $\sum \frac{m(m-1)\cdots(m-p-q+1)}{p+q!} (a+b)^{p+q}$. Dév. par binom
$(a+b)^{p+q}$. On a ainsi la formule plus haut. Appliq cette
form, on rempl a par $2xy$ et b par x^2. On a

$$= \sum \frac{m(m-1)\cdots(m-p-q+1)\cdot 2^p}{p!\,q!} y^p x^{p+2q}$$

suiv. puis. croiss. de x. Nature du coef de x^n: on
fait $p+2q = n$, alors $p \leqslant n$, car $q > 0$. p est de
même parité que n, car $p - n = -2q$. Donc polyn
$P_n(y)$ de degré n en y dont termes sont tous de
même parité. Ce polyn P satisf à l'éq différent

$$(y^2-1)\frac{d^2P}{dy^2} + \alpha y \frac{dP}{dy} + \beta P = 0.$$

Appel A_p le coef de y^p dans ce polyn — A_{p+1} sera nul, car terme de même parité. On relat. simple entre A_p, A_{p+1} et A_{p+2}. On a

$$A_p = \frac{2^p\, m(m-1)\cdots(m-p-q+1)}{p!\,q!}$$

$$A_{p+2} = 2^{p+2}\cdot \frac{m(m-1)\cdots(m-p-q)}{p+2!\,q-1!}$$

(car en chang. p en $p+2$, on change q en $q-1$ et $p+q$ en $p+q+1$, enfin $m-p-q+1$ en $m-p-q$.

$$\frac{A_{p+2}}{A_p} = 4\cdot \frac{(m-p-q)\,q}{(p+1)(p+2)}.$$ Rempl. q par sa valeur,

$$q = \frac{m-p}{2}\,, \qquad m-p-q = \frac{2m-n-p}{2}.$$ On a

$$\frac{A_{p+2}}{A_p} = \frac{(2m-n-p)(n-p)}{(p+1)(p+2)}.$$

D'où $A_{p+2}(p+1)(p+2) = A_p\left[p^2 - 2mp + 2mn - n^2\right]$

$$= A_p\left[p(p-1) - (2m-1)p + 2mn - n^2\right]$$

Je dis que P satisf à l'éq $(y^2-1)\frac{d^2P}{dy^2} - (2m-1)y\cdot\frac{dP}{dy} + (2mn-n^2)P = 0$

Car $P = \sum A_p \cdot y^p$, d'où $\frac{dP}{dy} = \sum p A_p y^{p-1}$

$\frac{d^2P}{dy^2} = \sum p(p-1) A_p y^{p-2}$. Substit. dans l'éq proposée.

Il faut dém. que le coef de y^p est nul. On a en effet

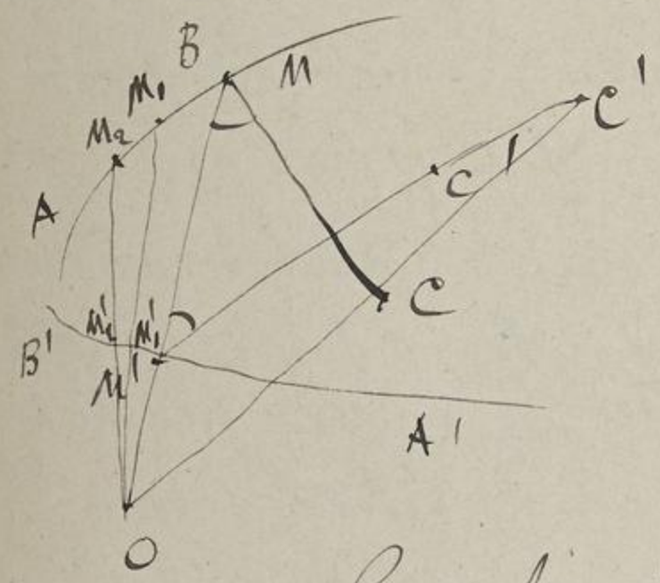
$$A_p\left[p(p-1) + (p+1)(p+2)A_{p+2}\right] - \underbrace{(2m-1)p + 2mn - n^2}$$

$$-(p+1)(p+2)A_{p+2} = 0.$$

cette méth est génér. Toutes les fois qu'on a une loi de récurrence entre A_p, A_{p+1}, A_{p+2} et tq'on ait $A_p X_1 + X_{p+1} X_2 + A_{p+2} X_3 = 0$, les polyn satisf à une éq diff linéaire, dont le degré est celui de X_1, X_2, X_3.

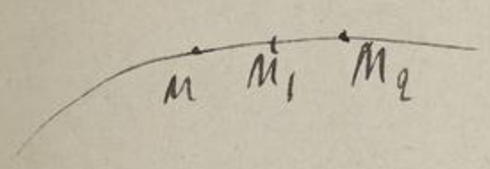
L'un des cas les plus intér. est celui où $m = -\frac{1}{2}$, polyn de Legendre $D^n (y^2-1)^n$.

Construire le cent de courb d'une courbe, connaissant celui de sa transf par rayons vect réciproques.

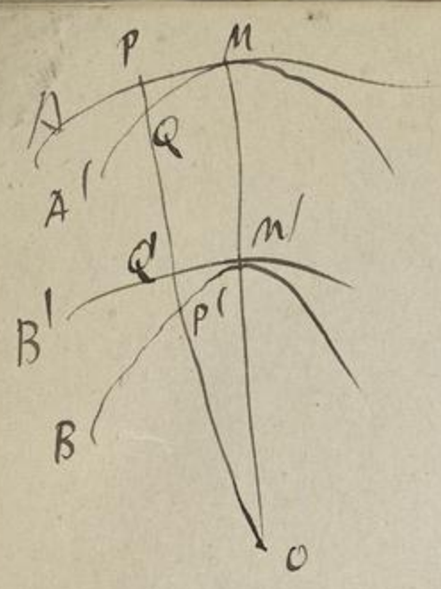


On donne C cent de courb de A en M. On joint MO et on prend M' tel que $OM' \cdot OM^+ = K^2$. On a ainsi courbe A' transformée de la courbe A. La normale en M' fait avec le rayon vect un angle égal à OMC. Le tri. est isocèle. Construire C' sur cette norm.

Le cent de courb est le cent du cercle osculateur, et ce dernier cercle est lui-même limite d'un cercle passant par 3 points infiniment voisins M, M_1, M_2 ; ils ont pour transformés M', M'_1, M'_2. Le cercle B passant par $M M_1 M_2$ aura pour transf le cercle B' qui passe par $M' M'_1 M'_2$. Supposons que $M M_1 M_2$ se rapprochent indéfiniment de M, alors $M'_1 M'_2$ se rapprochent de M'. La limite de B sera la limite de B', ce sera le cercle osculateur. On sait que les 2 cent des cercles et le point O sont en ligne droite. On mène donc OC^+, et on prend son intersection avec $M'C'$.



Cela est un cas particulier d'un théorème général. Si 2 courbes ont en M un contact d'ordre p, et que les transformées aient au point correspondant un contact d'ordre p. En effet soit P infiniment voisin de M, sur l'arc infiniment petit principal issu de M,



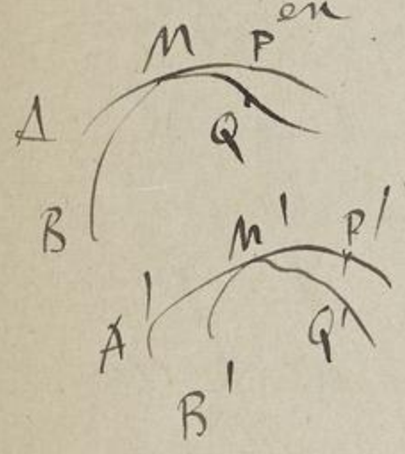
Les arcs sont infiniment petits du 1er ordre
PQ est d'ordre $p+1$ par hypoth. On a

$$OP \cdot OP' = K^2, \quad OQ \cdot OQ' = K^2.$$

$$OP' - OQ' = P'Q' = \frac{K^2}{OP} - \frac{K^2}{OQ} = \frac{OQ - OP}{QP \cdot OQ} \cdot K^2$$

$$= -K^2 \cdot \frac{PQ}{OP \cdot QQ}.$$ Donc $P'Q'$ est d'ordre $p+1$.

alors appliq : si B est cercle B' est aussi un cercle et qu'a avec A cont du 2e ordre
a un contact du 2e ordre avec A'. Cela aura lieu dans
pour une transform quelc, excepté en cert points singul.
. au point x, y, faisons corresp le point
X, Y, en supp $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$,
l'ordre des cont n'est pas altéré. Consid A et B qui ont
en M cont d'ordre p : on peut toujours prendre P et Q



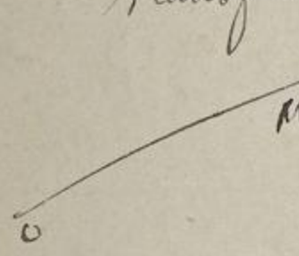
tels que MP soit du 1er ordre MQ aussi
et PQ ordre $p+1$. La transf on a
A' et B', supp corresp P' et Q'.
$M'P'$ sera du même ordre que MP, $M'Q'$
du même que MQ et $P'Q'$ d'ordre $p+1$
comme PQ. Car consid x et y, et x_1, y_1,
puis X, Y, X_1, Y_1 qui leur correspond

$$X - X_1 = \frac{d\varphi}{dx}(x - x_1) + \frac{d\varphi}{dy}(y - y_1) + \cdots$$

à moins que dér. de φ et ψ en x et y ne restent
pas finies ou revien toutes nulles l'ordre ~~de~~
~~celui de~~ de $(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2$ sera celui de
$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$.

Quelles sont les conds dont on peut
appliq chercher le rayon de cond par les transf par rayon
vect réciproques ?

On a construit cent de cour des courb qui ont pour rayons vect réciproques les suppl. engend par mouv épicycl). Les transf par rayons vect réciproques des courb du 3e degré qui ont un point double et deux asympt paral aux asympt du cercle; ou du 4e ordre qui ont un pt double à l'infini et 4 asympt paral chacune aux 2 asympt du cercle (Cissoïdes droite ou oblique, strophoïde donnée de Pascal lemniscate). Pren. les courbes du 3e ordre pour avoir le degré de la transf par rayons vect réciproques (Pren pour pôle de transform le point double) une droite rencontre en 0 ou 1 point, puis en un seul M, Construire M' tel que $OM' \cdot OM = K^2$, un seul M'.



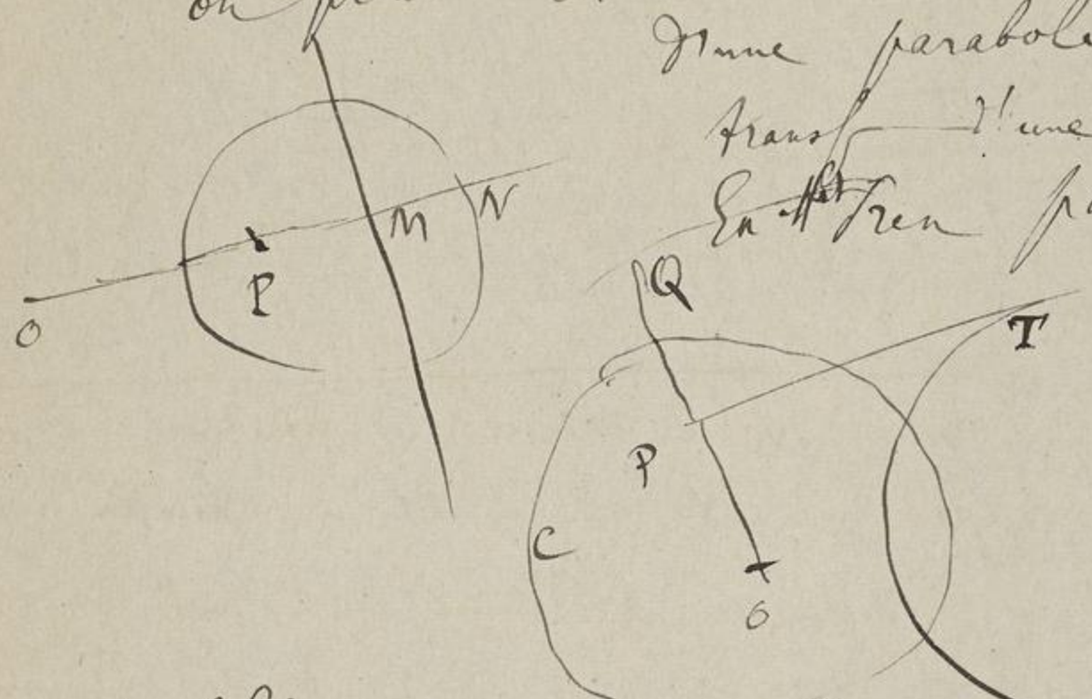
Cond pour que M' vienne en O, il faut et suff OM infin. Or en gén. dans 1e ordre 3 pts à l'inf. Donc alors en O un point triple. Mais ici on a des points circul à l'∞ sur la courbe ou pas infini, mais indéterminé de même ordre donc les 2 droites font partie du lieu, mais doivent paraître donc en O un point simple; donc un point en O, et un point sur chacun des 2 rayons vecteurs. — Même raison pour 4e ordre 4 points dont 2 en O, donc 2 points M' en deh de O. Or courbe la plus gén. a 4 pts à l'∞, donc un point quadruple en O, ou pts à l'∞ se réduisent aux points circul donc 2 fois chacun des asympt du cercle par O, donc par 2 branches de courbe par O et le lieu se réduit encore à conique

Par analyse: Eq de courbe du 3e degré satisf. aux condit est $(x^2+y^2)(ax+by+c) = \alpha x^2 + \beta y^2$ en prenant pour origine le pt double, et axes les 2 droites des tang au point double. Ou $\rho^3(a\cos\omega + b\sin\omega + c) = k^2(\alpha\cos^2\omega + \beta\sin^2\omega)$; ce qui donne pour la transformée $a\cos\omega + b\sin\omega + c = \rho(\alpha\cos^2\omega + \beta\sin^2\omega)$, (en changeant ρ en $\frac{1}{\rho}$ pour avoir transf) ou $ax + by + c = \alpha x^2 + \beta y^2$, conique

Tour 4e ordre $(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)(ax+by+c)+\alpha x^2+\beta y^2=0$

Même analyse donne une conique

Cas partic. Cissoïde, Strophoïde ou bien, on prend la courbe suivante:
une courbe, un cercle, une droite, un point sur cercle,
on mène rayon qui coupe cercle en M, droite en N,
on prend $OP = MN$. Ces courbes sont les podaires
d'une parabole. Donc ce sont les
transf. d'une conique par l. v. récipr.
En effet une parabole podaire de parab.
est la transf
d'une conique
l. v. 2. car
pour $OP.OQ=1$

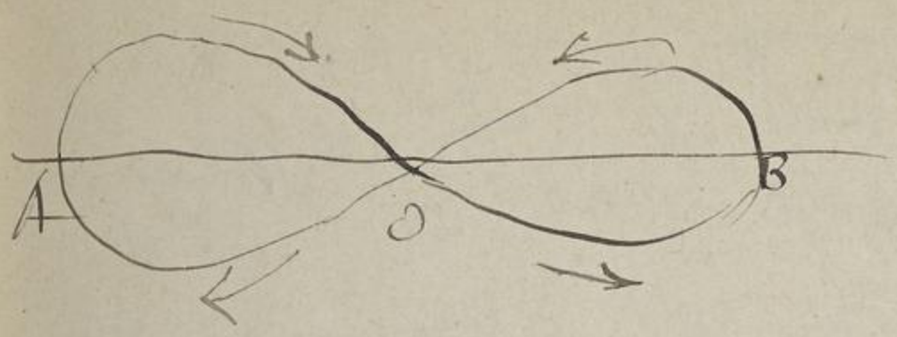


Cercle de rayon 1. Q sera pôle de PT, car OQ
perp. à PT et $OP.OQ=1$. La podaire sera transf
par r. v. 2. de parab. donc ce sera une conique
Donc transf de courbe à générat cissoïdale
sera une conique. Et alors on aura son centre de courbure

Autre cas partic. Limaçon de Pascal, et une
transf de conique par rapport au foyer. Car alors
$\rho = \frac{f}{1+e\cos\omega}$ d'où $\rho = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\omega$, transf
Limaçon transformée d'hyperbole équilat par rapp à
son centre.

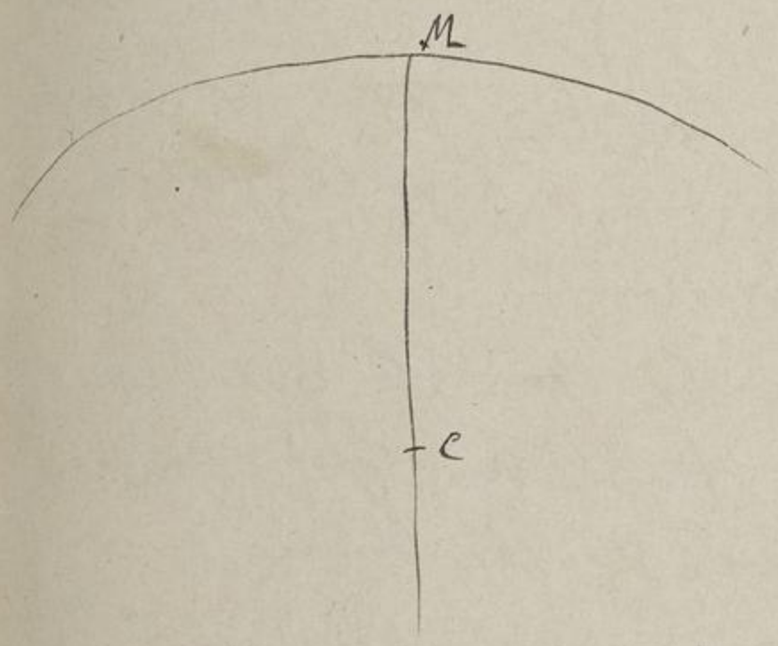
Autre point. On a parlé des points sommets
d'une courbe, maxima et min du rayon de C, et
correspondance à pt de rebroussement de la développée. Intérêt de
ces recherches. Les transf par r. v. 2 n'altèrent
pas l'ordre de contact. Donc si 2 courbes transf a
contact M ordre sont leurs correspondant aux sommets

sont sommets de la transformée. Rem. Les sommets correspondent de A et B. Donc le rayon de courbure augmente de A en O, diminue de O en B, augmente de B en O jusqu'à ∞, puis diminue



La cissoïde oblique dont transformée est une parabole n'a qu'un sommet
La cissoïde droite n'a pas de sommet
La strophoïde, qui est transformée d'une hyperbole a 2 sommets.

Construction de développées, sans calculs. Etudions d'abord branches infinies des développées. Normale en M à courbe donnée, centre de courbure C est le point de contact avec la développée



2 sortes de branches infinies suivant que C ou M va à l'infini. Cherchons l'asymptote correspondante : c'est la tangente à l'∞. Or cette tangente est la normale MC. Si M est point d'inflexion asymptote droite finie branche hyperbolique
Si M s'éloigne indéfiniment MC aussi s'éloigne indéfiniment. Donc l'asymptote est la droite de l'infini branche parabolique
Mais il y a bien des natures de branches paraboliques : parabole ordinaire, parabole cubique, parabole semi-cubique
Et bien qu'elle est la nature de la branche parabolique. Prenons pour variable indépendante x, formules $X = x + \frac{y'(x'^2+y'^2)}{y'x''-y''x'}$

$$Y = y - \frac{x'(x'^2+y'^2)}{y'x''-y''x'}$$

$x' = 1$, $x'' = 0$.

$$X = x + \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Si M à l'infini et cette asymptote prise pour oy (cette droite est $x=0$) ; y de plus. sous forme $y = \frac{A}{x} + B + Cx +$ ——

y inf pour $x=0$, $y' = -\frac{A}{x^2} + C_1$ —

$y'' = \frac{2A}{x^3} + \text{—}$. Sous y infini du 1er ordre y' du 2e,

y'' du 3e. Que devient X, on a $X = 0 + \frac{y'^2 + y'^3}{y''}$ (6e ordre)
3e ordre

$X = $ 3ème ordre, $Y = $ 1er ordre $+ \frac{2e}{3e}$ - Donc X est prop à Y^3,

$\frac{X}{Y^3}$ tend vers lim finie, branche parabol comme parabole cubique : perspect d'une telle courbe, le point à l'∞ de proj. à dist finie en un point de rebroussement.

$x^3 = y$, $x^3 = yz$, orig au som d'une cône ayant pour base $x^3 = y$, on a $x^3 = z^2$ comm perspect : parab semi-cub à point de rebroussement. — Mais on peut avoir branch parab d'ordre plus élevé. On a tuyp $Y = \frac{A}{x} + \text{—}$. Mais si c'était un point d'inflex à l'inf, comm dans cas de la droite, on aurait X du 4e ordre, branche parab comm $y = Kx^4$ (parab bicarratique).

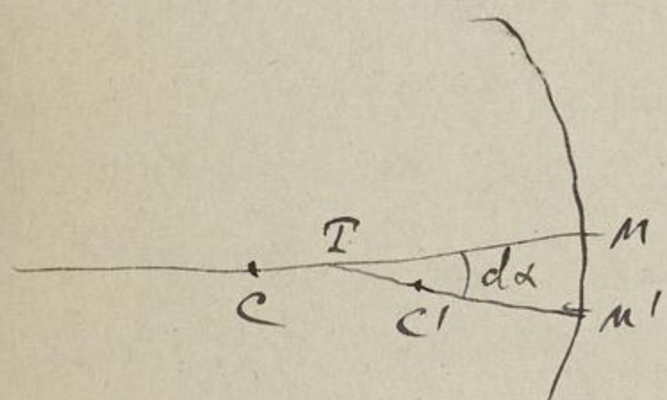
Direct de la concavité + de la convexité de la courbe

La dével. se trouve du côté de la concavité de la courbe donnée

La norm en M' touche dével en C'.

L'angle $d\alpha$ de contng et l'angle des normales. L'angle de cont de la dével. est $CT + CT' = CM - C'M'$

$= dR$, ou plut. $-dR$, car



ray de courb va en diminuant, en prenant arc + de C vers C'. Donc ray de courb. $-\frac{dR}{d\alpha} = R$,

$-\frac{dR}{d\alpha} ds = $ ~~dR~~ $\frac{ds}{d\alpha} = R$, $-\frac{\left(\frac{dR}{ds}\right)}{d\alpha}$.

Du côté de $y+$, si $\frac{dR}{ds}$ de sig contr

Concave vers y pour, quand ray en M' est > que en M, c.à.d. R grand augmente quand lorsq y diminue.

Sous que $\frac{ds}{R}$ change de signe il passe par ∞ ou 0.

Sous ∞, il faut $R=0$, ce qui n'arr que pour pts de rebrou

ou $\frac{dR}{ds}=0$, alors déval près. un point de rebrou

Donc dér. ne prés. par de pts d'inflex quand

~~der~~ courbe n'a par de point de rebroussem.

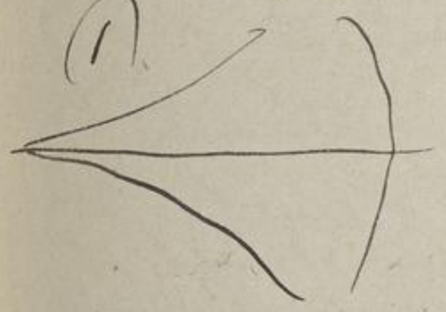
(Sommets). — La form de dér. n'a pas même forme suivant

que ray de courb passe par maxim ou minim Sous

~~Au dessus de~~ maxim, on a fig (1). Si minimum

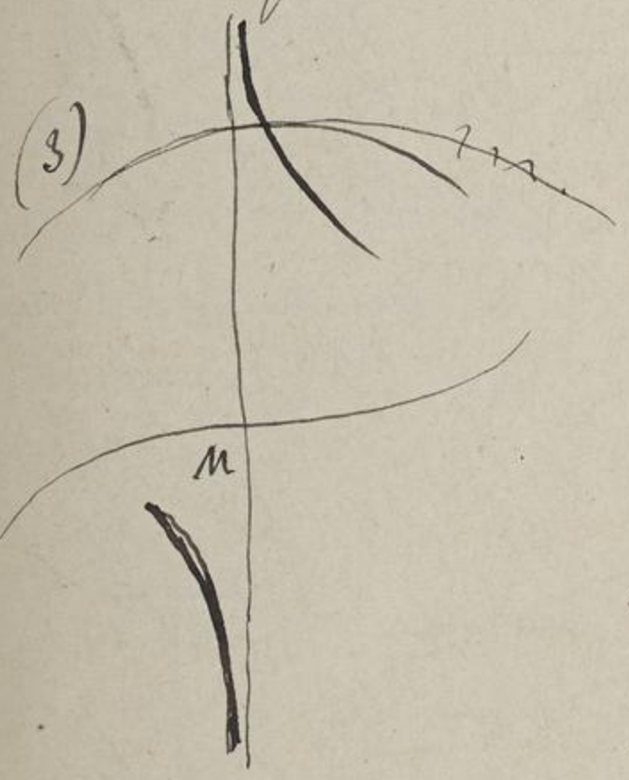
on a fig (2)

(1)



(2)

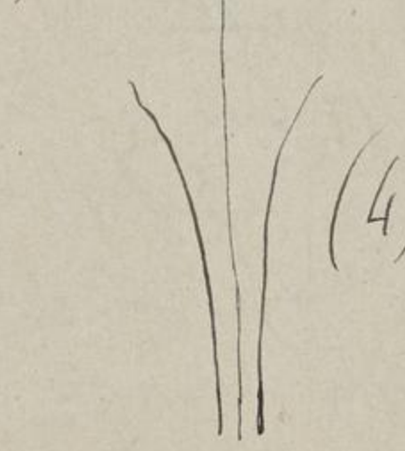
De quelle façon se comporte la courbe en un pt d'inflexion. Elle est au dessus quand on dépasse le point d'inflexion — La développée a l'aspect (3).



(3)

Si on a un cont. du 3e ordre de la courbe avec sa tang. La norm est encore Clasygpt

aspect (4), point de rebroussem à $C\infty$.



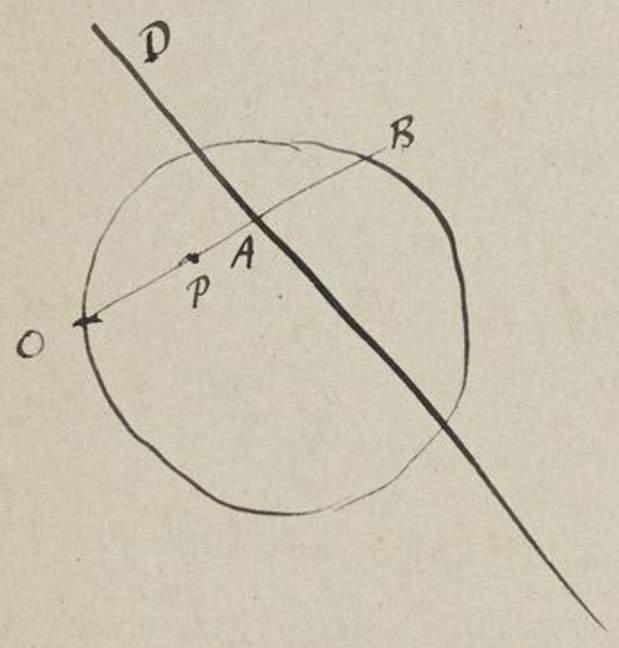
(4)

Applic à Cissoïde, Strophoïde, limaçon de Pascal, Lemniscate. Ces courbes rentrent dans les transform de Coorq par ray vect récip.

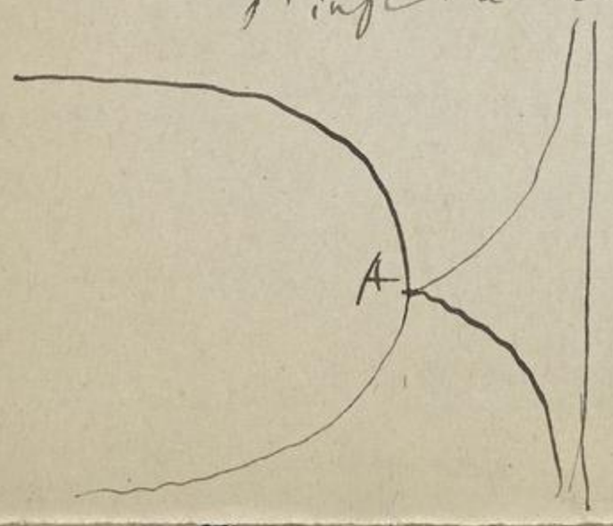
(ray vect récip présente qu'une difficulté, savoir recherche des sommets

Dans la transf. v. r. , l'ordre de cont. de l'courbe par altéré.
Transf du cent osculat est ceulonné de la transf ; les sommets
les points où cont du 2e ord — sommets de courbe sont sommets
de transf — Or somm de corresp sont extrém. des axes.
Parab n'a qu'un sommet , donc 1 sommet pour transf de parab.
Hyperb 2 sommets — ellipse 4 . Or ces courb ont
un point double qui est le pôle de transform ; il a 2 tang
réelles , ou 2 imag conj , ou 2 tang confondues (point de rebrous)
si pt de rebroussem la cont et transf de parabole,
car tang au pt double sont dir. asympt , donc se confondent,
les 2 dir asymp confondues parabole ; si réelles hyperb,
si imag ellipse .
générat . cissoïdale .

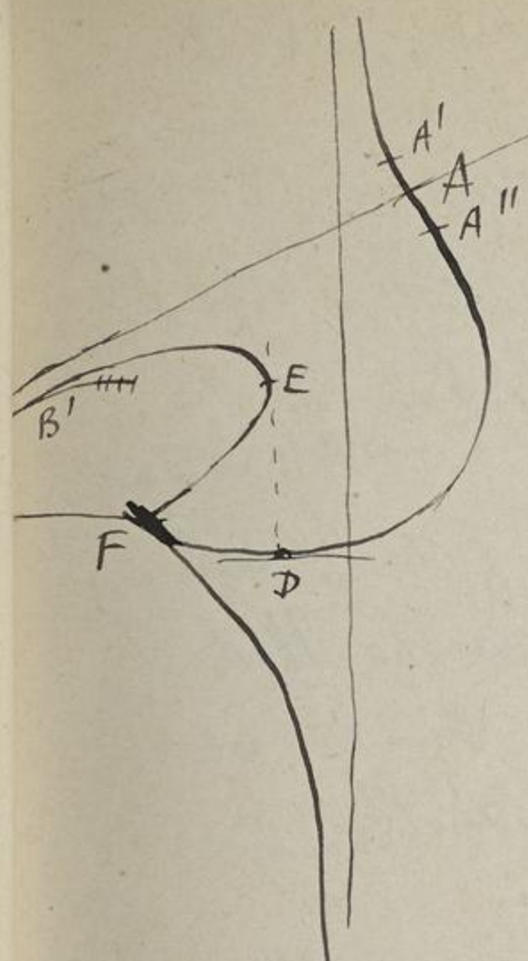
Alors appliquons : courbe à
Renom cercle , droite D ,
point O sur cercle , Sécante
OB , OP = AB . (Cissoïdes ,
strophoïdes (grand D par centre de circ)).
Toutes ces courb sont des transf de
conq



Il y a les
Cissoïdes droite et oblique .
Coss. droite n'a pas de sommet , car
c'est la transf de parab par rapp
à son sommet donc pt conjug du
sommet à l'∞ , or c'est le pôle de
la transf , donc ni pts de rebr ni pts d'inflex
Le pt conjugué à pt de rebr de cissoïde est ordre
Branche parab du 4e ordre , car cissoïde a un pt
d'infl à l'∞ . Pas de tang vert sauf en A
Car tang à la courbe serait
paral à ox , or cissoïde n'a
pas de tang paral à oy



Exam cissoïde oblique



B

Un seul pt d'inflex en A. A l'inf, un
C rayon de coub infini. Donc le ray de coub
part de l'∞, et y revient. Il passe
par un minim et ne peut pas par 0,
car pas de point de rebr dans l'intervalle
normale en A est asympt à la dével
Et A' correspond B au dessus de l'asymptote
et Concave vers le haut. A A'' corresp B'.
On va avoir branch inf parab qui
corresp à dir. asympt de cissoïde. Donc C.
En part de A vers le haut, le ray de coub
augm, y augm aussi, donc concavité
~~de C~~ vers y négatifs. Concav dirigée vers
y post jusqu'au pt de rebroussem au-delà
sens contr.

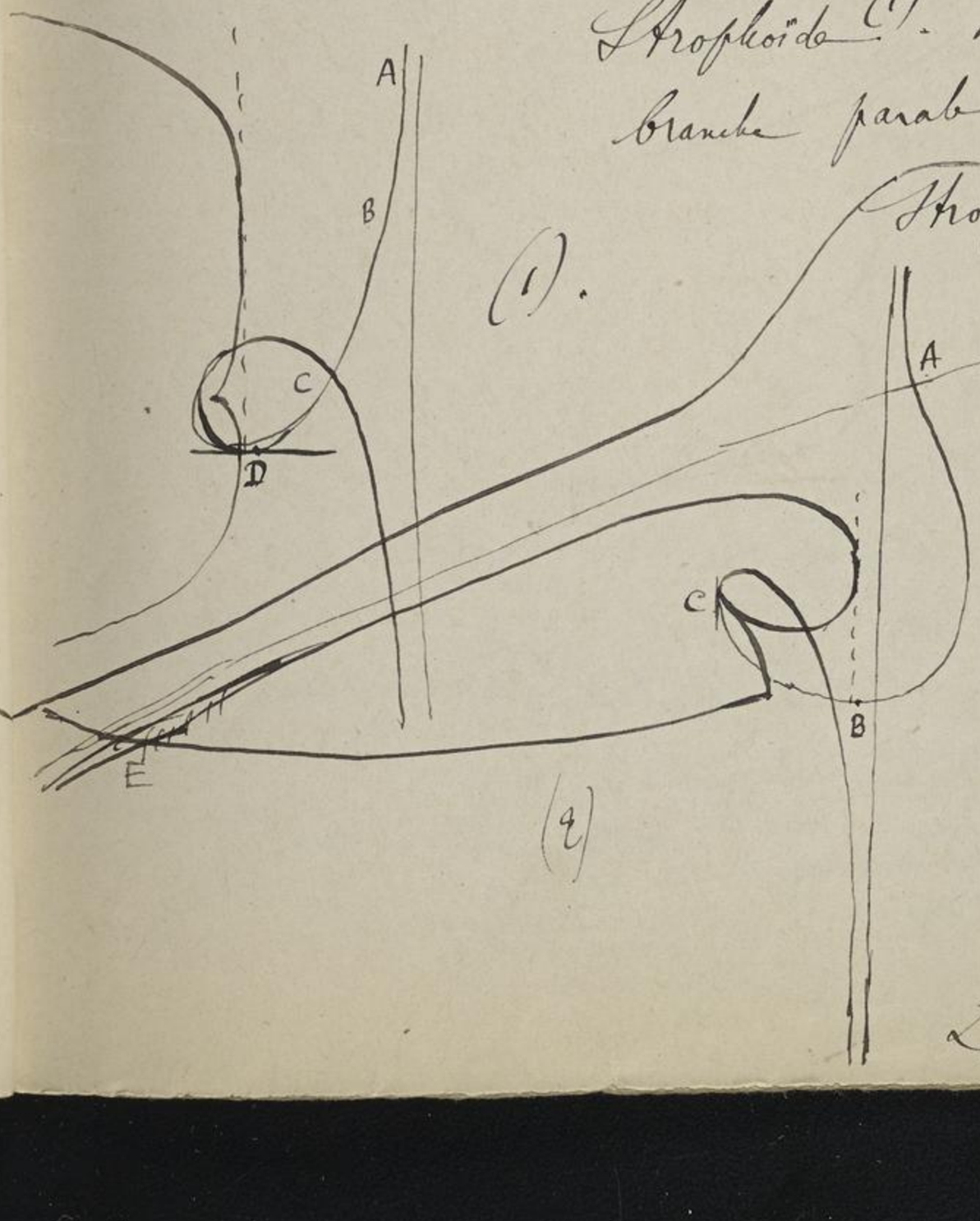
En D tang horiz, on a E. En F, la dével normale
à cissoïde. ——

Strophoïde (1). De A en D, on décrit
branche parab jusqu'à point à tang vert

Stroph. oblique (2). 2 sommets.
Le sommet A dans la
boucle. Car coord hyperb
qui est la transf de notre
Courbe, l'une des branches
corresp à une partie Contre
au vertex de la Courbe.

De A en B, concav vers
y négatifs. En C, minim
du ray de coub, point
de rebr, donc concav vers
y négat

La courbe se coupe en E.

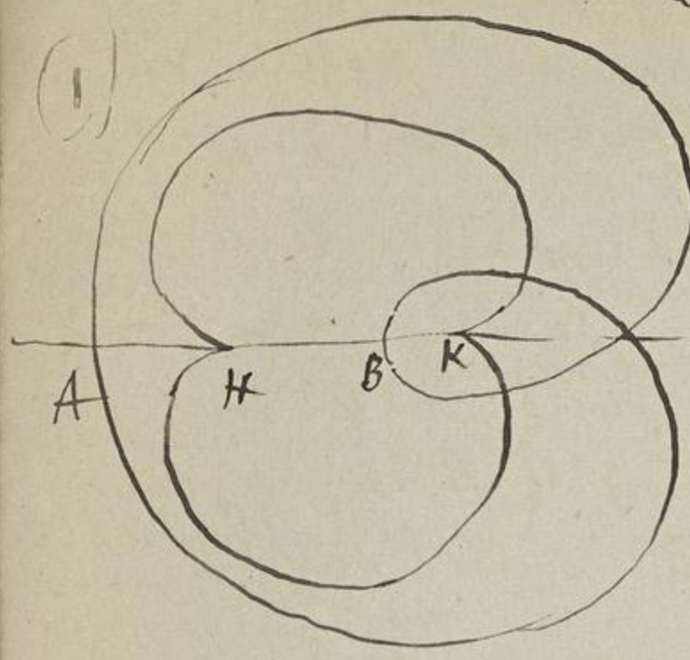


(1)

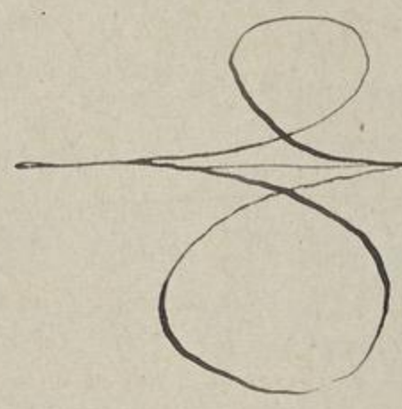
(2)

Limaç. de Pascal. En A max, en B min du rayon de courbure. On a là 2 points de rebroussement réels, donc pas de branche à l'inf. On a la forme dessinée. On n'a pas, la fig 2, cela exigerait H à droite de K, et c'est impossible.

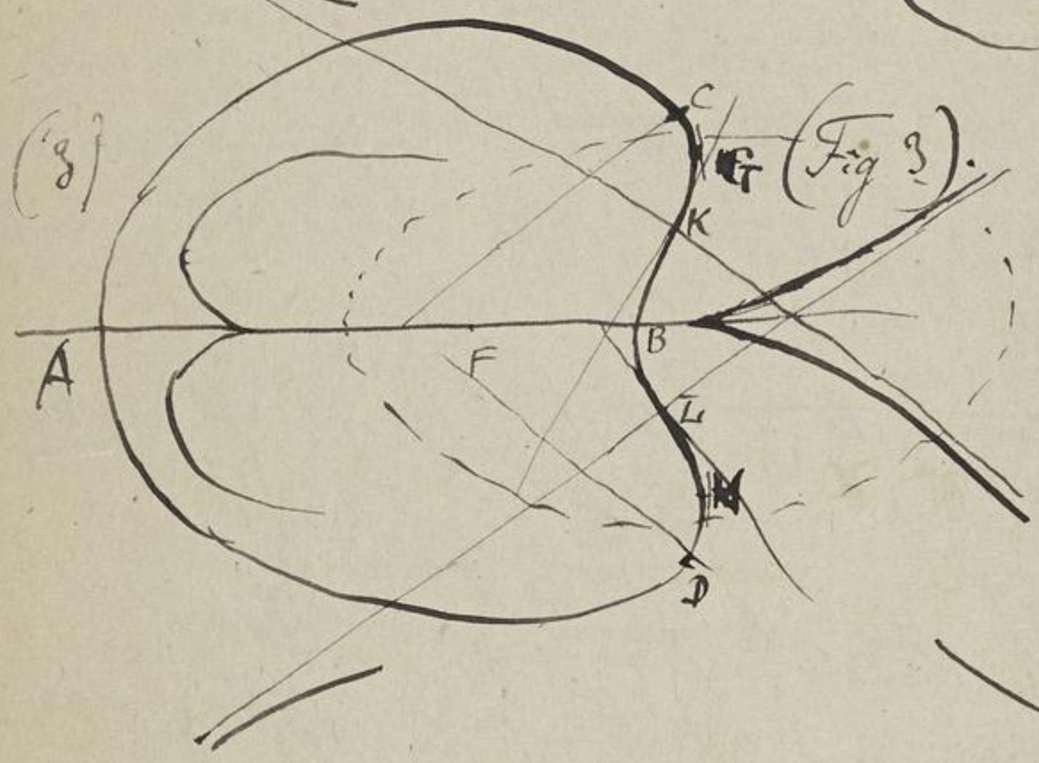
(1)



(2)

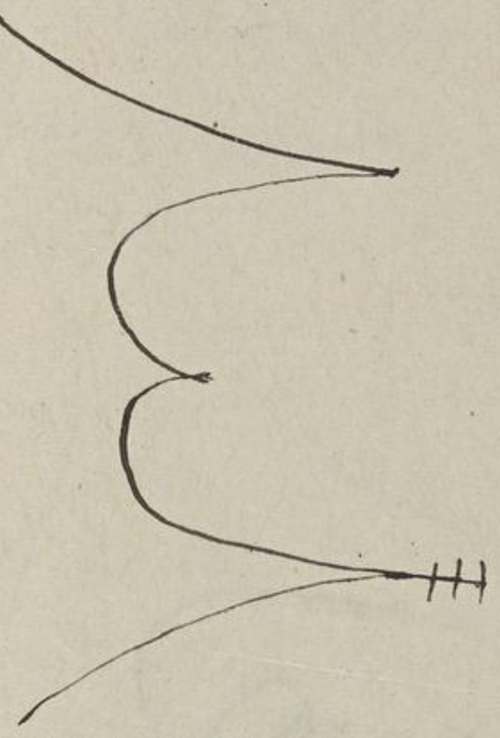


(3)



(Fig 3).

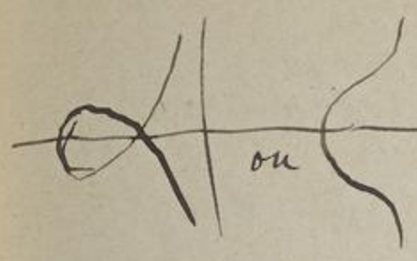
2 points d'inflexion réels. 4 sommets d'abord A et B; puis courbe ellipse transformée foyer F. Ces sommets C et D sont au-delà des points où tangente verticale.



Points à l'infini. Cissoïde 1 pt de rebr, 1 point d'inflex, 2 point à l'inf. — Déval est du 4e degré. — Courbe à génér. Cissoïdale (ant gne cissoïde) 6e degré.

On donne une courbe du 3e degré $x(x^2+y^2) = cx^2+dy^2$

Calculer le rayon de courbure au point où elle coupe l'axe des x (pas au point double).



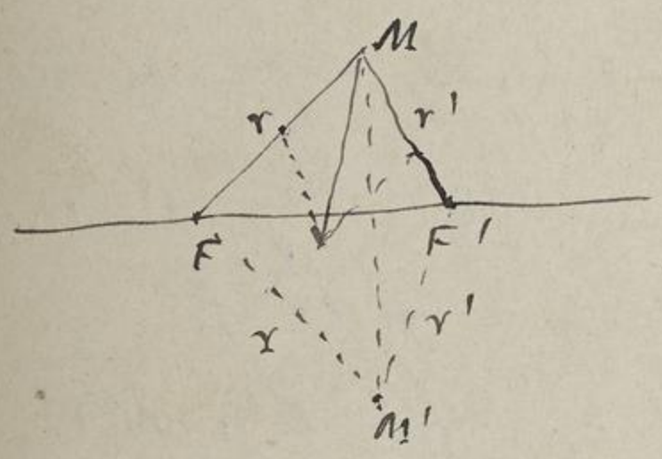
On considère la courbe gauche intersection de la sphère $x^2+y^2+z^2 = 2z$ et du cylindre $x^2+z^2 = z$
(Ces 2 surf sont tang, elles se coupent suivant courbe du 4e degré qui a un point double). Chercher les points où le plan osculateur a un contact du 3e ordre avec cette courbe gauche.

Construire les courbes parallèles au limaçon de Pascal (Enveloppe d'un cercle de rayon court et dont centre est sur la courbe donnée)

Quest sur courbes gauches : On considère courbe $y = x^2$, $z = x^3$. Lieu des centres de courbure de cette courbe et le lieu des centres des sphères osculatrices.

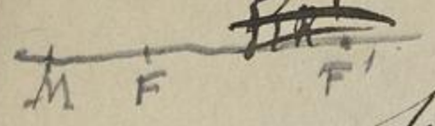
Etant donné $\varphi(r, r') = 0$ en coord bipol

Rayon de Courbure au point où elle coupe axe polaire.



Cette courbe est sym par rapp à FF'.
Ca a un même syst de val de r et r' correspondantes 2 points sym par rapp à F, F'.

Si on prend pt sur FF', le pt est double, et alors tangentes sym par rapp à FF'. Or à quelle condit y a-t-il un pt double. Pour avoir tang, on prend sur MF et MF' long proport à $\frac{d\varphi}{dr}$, $\frac{d\varphi}{dr'}$, on les compose, c'est la normale pour pt double et faut tang indét normale indéterm
C.à.d. la résult des forces $\frac{d\varphi}{dr}$ et $\frac{d\varphi}{dr'}$ doit être nulle
$\frac{d\varphi}{dr}$ et $\frac{d\varphi}{dr'}$ doiv. se faire équilibre. Et en delà de

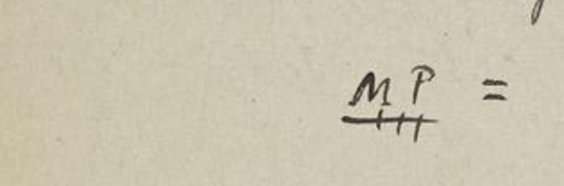


FF', il faudra $\frac{dp}{dr} = \frac{dq}{dr'} = 0$

Supp le point sur FF', elles doiv. se faire équil, donc égales en val absolue, et de sig contr.

~~Sur 2~~ si donc M sur FF' (en dehors du segment ~~de FF'~~),

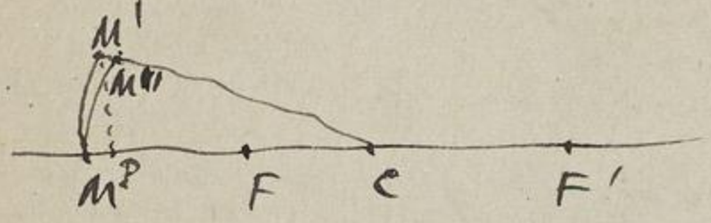
on a $\frac{dq}{dr} + \frac{dp}{dr'} = 0$.

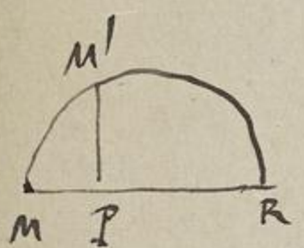


si M entre F et F', $\frac{dq}{dr} = \frac{dq}{dr'}$.

Supp que ces condit ne soient pas remplies, calcul le ray. de courb. Supp M en dehors de FF'. C est sur FF'. Soit M' infiniment voisin de M. Avec CM un cercle centré en C, c'est le cercle osculateur. Il coupe M'C en M''.

Je négl M'M'' (2e ordre), M' et M'' confondus. Dans ce cercle M'P moy. proport entre les 2 segm de l'hypot $\overline{M'P}^2 = MP \cdot PR$. Devant PR on peut négl. MP. Donc $\overline{M'P}^2 = 2\rho \cdot MP$





$$\frac{MP}{+++} = \frac{\overline{M'P}^2}{2\rho}$$

Mais on a 2 autres expr de MP.

Supp cercle décrit de F comme centre, rayon r, M'M'' 2e ordre non négligeable $= +dr$, de M'' perpend M''P' sur FF'; Diff. M'P − M''P' est une fract infin petite de M'P, on la néglige.

On a $\overline{M'P}^2 = MP' \cdot 2r = (MP + PP') \cdot 2r$

$= (MP + M'M'') \cdot 2r$, car PP' diff au 2e ordre de M'M''.

$\overline{M'P}^2 = (MP + dr) \cdot 2r$, $MP = \frac{\overline{M'P}^2}{2r} - dr$

En déc cercle de centre F', on a

$MP = \frac{\overline{M'P}^2}{2r'} - dr'$.

Il faut élim dr et dr' (qui sont inf pet du 2e ord)
on mult par $\frac{d\varphi}{dr}$ et $\frac{d\varphi}{dr'}$ et on ajoute.
(D'ailleurs on a $\frac{d\varphi}{dr}\,dr + \frac{d\varphi}{dr'}\,dr' = 0$). On a

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\varphi}{dr'}\right) MP = \frac{\overline{M'P}^2}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r'}\frac{d\varphi}{dr'}\right).$$

$-\frac{d\varphi}{dr}\,dr - \frac{d\varphi}{dr'}\,dr'$ disparaît. —

On a $MP = \frac{\overline{M'P}^2}{2\rho}$. Donc

$$= \frac{\overline{M'P}^2}{2}\,\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\varphi}{dr'}\right). \quad \text{Donc}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\varphi}{dr'}\right)\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r'}\frac{d\varphi}{dr'}$$

Cette expression est-elle vraie quand M entre F et F'?
Oui, sauf une modific On a supp dr à gauche
de F. Si M à droite de F, la 1ère éq
$\overline{M'P}^2 = (MP + dr)\,2r$ n'est plus exacte. On a alors
$\overline{M'P}^2 = (MP - dr)\,2r$. Le signe de $\frac{d\varphi}{dr}$ est changé
et il faut mettre $-\frac{d\varphi}{dr}$ dans l'éq obtenue
Sous pt double $\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\varphi}{dr'} = 0$) rayon infini, mais
illusion le rayon serait fini en général et l'expression
serait illusoire. —

Appliquons. Ellipse $r + r' = 2a$
$2a$ est le grand axe b demi-petit axe
$a^2 - c^2 = b^2$. Les points sur FF' sont sommets

Soit emp $r = a-c$, $r' = a+c$. $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 1 = \frac{\partial\varphi}{\partial r'}$.

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a+c} = \frac{2a}{b^2}, \quad \rho = \frac{b^2}{a}.$$

Ovale de Descartes : $\alpha r' + \beta r' = \gamma$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \alpha$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r'} = \beta$.

$$\rho = \frac{\alpha+\beta}{\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r'}} = \frac{(\alpha+\beta) r r'}{\alpha r' + \beta r}.$$ ~~Conditt~~

ovale de Cassini : $rr' = K^2$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = r'$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r'} = r$.

$$(r+r')\frac{1}{\rho} = \frac{r'}{r} + \frac{r}{r'} = \frac{r^2+r'^2}{rr'}, \quad \rho = \frac{rr'(r+r')}{r^2+r'^2}$$

Cas particul : lemniscate $K = c$, $2c$ désigne dist FF'.

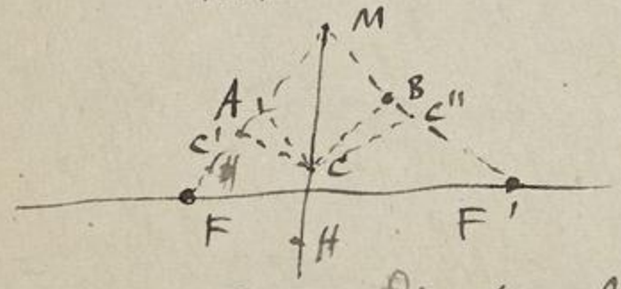
$rr' = c^2$. Alors $r - r' = 2c$, $r^2 + r'^2 = (r-r')^2 + 2rr'$

$= 4c^2 + 2c^2 = 6c^2$, $(r+r')^2 = (r-r')^2 + 4rr'$

$= 4c^2 + 4c^2 = 8c^2$, $r + r' = 2c\sqrt{2}$, donc

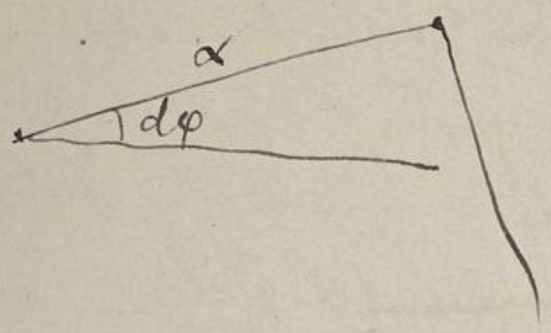
$$\rho = \frac{c^2 . 2c\sqrt{2}}{6c^2} = \frac{c\sqrt{2}}{3}.$$

Quand M pas situé sur FF', problème beaucoup plus diff., on reviendra aux coord ordin. Toutefois dans ovale de Descartes, méthode cinémat intéressante. Sous normales on prend $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial r'}$, c-à-d α et β, on a MC.



Quand point parcourt courbe avec vit. MC, dirigée suiv. tang. Donc 2 droites perpendic parallèles à MF et MF', on a les comp de la vit. Accél normale $\frac{v^2}{\rho}$. Quand M' inf voisin de M, les 2 comp de v sont α et β

mais leur direct a varié, elles sont perpend aux nouveaux
ray vecteurs. On a donc d'abord α, puis au bout de dt
la même long α dans nlle direct $d\varphi$
Comp d'accélér. perpend est $\alpha \frac{d\varphi}{dt}$,
l'autre est $\beta \frac{d\varphi'}{dt}$.

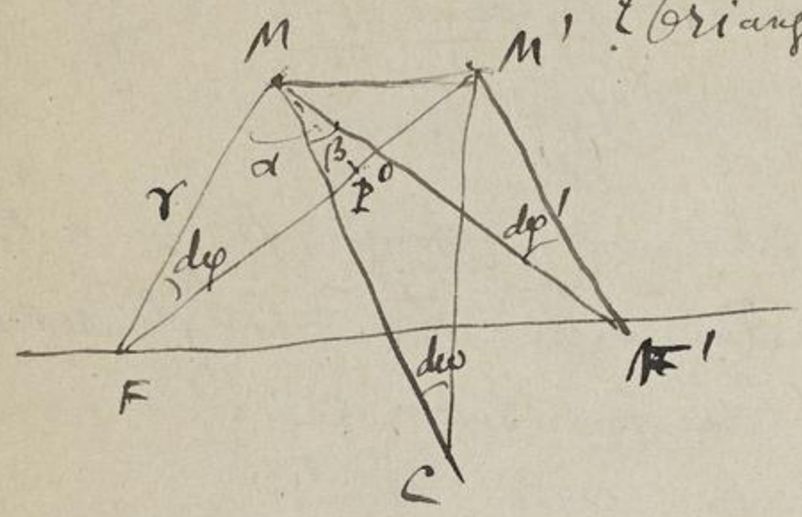


Les comp de vit sont perp à MF
et M'F. Donc angle $d\varphi$ = angle MFM'
donc c'est l'angle sous lequel on voit
arc MM' du point M.

Direct de $\alpha \frac{d\varphi}{dt}$ est perp à comp correspde vitesse
donc suiv. MF. Sous la constte en grandeur
MM' est vu de C sous angle $\frac{MM'}{MC} = \frac{MM'}{v} = \frac{ds}{v}$
$= dt$. Quel est le lieu des points d'où l'on voit
sous angle dt ? C'est la circonf par M et M',
c.à.d. tang en M, décrite sur MP comme diam
Proj. C' ~~de~~ en C sur MF. L'angle sous leq on
voit MM' depuis F est $d\varphi$, depuis C' c'est dt.
Donc $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{MC'}{MF'}$. Donc on a à constte une
4e proport à $\alpha = MA$, MC' et MF.
Soit D le pt obtenu $MD = MA \cdot \frac{MC'}{MF}$.
Sous 2e ~~fonc~~ comp, on fa à E, tel que $ME = MB \frac{MC''}{MF'}$
Alors on a H sur MC, et on prend
3e proport à MC et MH : c'est ρ
On peut avoir méth analytique
Lorsque MF, MF', M'F, MM'.
$d\varphi$ et $d\varphi'$. Les norm en M et M',
aller se coup en C sous angle de contng des

appel. $FMC = \alpha$, $F'MC = -\beta$.

$FM'C = \alpha + d\alpha$, $CM'F' = -(\beta + d\beta)$.



2 Triangles, somm des angles de chacun et 2 droits, angles en O opposés par sommets, donnent les 2 égaux

$\alpha + d\varphi = \alpha + d\alpha + d\omega$ ou

$d\omega = d\varphi - d\alpha$

Les autres Δ. donnent $d\omega = d\varphi' - d\beta$

Relat entre α, β, et $MM' = ds$. De M perp MP sur FM'.

$MP = r\,d\varphi = MM' \cos M'MP = ds \cos\alpha$, de même

$r'd\varphi' = ds\cos\beta$. $\quad M'P = dr = ds \sin\alpha$

et enfin $dr' = +ds \sin\beta$.

Rayon de courb $\frac{ds}{d\omega}$. Différ. $dr = ds\sin\alpha$ et

$dr' = +ds\sin\beta$. On trouve $d^2r = ds^2 \sin\alpha + d\alpha \frac{ds}{\cos\alpha}\cos\alpha$

$d^2r' = d^2s \sin\beta + d\beta \cos\beta\, ds$.

D'ailleurs $d\omega = d\varphi - d\alpha = \frac{ds\cos\alpha}{r} - d\alpha$

et $d\omega = \frac{ds\cos\alpha}{r'} - d\beta$.

Or $d\alpha = \frac{d^2r - d^2s\sin\alpha}{ds\cos\alpha} = \frac{d^2r}{ds}\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{d^2s}{ds}\operatorname{tg}\alpha$

$d\beta = \frac{d^2r'}{ds}\frac{1}{\cos\beta} - \frac{d^2s}{ds}\operatorname{tg}\beta$.

Rempl $d\alpha$ et $d\beta$ dans $d\omega$.

$d\omega = \frac{ds\cos\alpha}{r} - \frac{d^2r}{ds}\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{d^2s}{ds}\operatorname{tg}\alpha$.

et $d\omega = \frac{ds\cos\beta}{r'} - \frac{d^2r'}{ds}\frac{1}{\cos\beta} + \frac{d^2s}{ds}\operatorname{tg}\beta$.

Elim $\frac{d^2 s}{ds}$. Mult. par $\cotg\alpha$ et $-\cotg\beta$, et ajoutons

on a : $$(\cotg\alpha - \cotg\beta)\,dw = ds\left(\cotg\alpha \frac{\sin\alpha}{r} - \cotg\beta \frac{\sin\beta}{r'}\right)$$
$$- \frac{d^2 r}{ds}\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{d^2 r'}{ds}\frac{1}{\sin\beta}.$$

Div. par ds, on a

$$(\cotg\alpha - \cotg\beta)\frac{1}{\rho} = \cotg\alpha \frac{\sin\alpha}{r} - \cotg\beta \frac{\sin\beta}{r'} - \frac{d^2 r}{dr^2}\sin\alpha + \frac{d^2 r'}{dr'^2}\sin\beta$$

Telle est la val. du rayon de courb. en coord. polaires :

Car $ds = dr \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}$, $ds^2 = \frac{dr^2 \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Cette expression se simplifie pour ovale de Descartes.

Il faut expr. r et r' en fonct. d'un même paramètre et rempl. les dx figurent par des dérivées.

$\alpha r + \beta r' = \gamma$; $r = \frac{1}{\alpha} t + c_0$, $r' = \frac{1}{\beta} t + c_1$,

on peut disposer de c_0 et c_1 pour qu'on ait

$\alpha r + \beta r' = \gamma$, quel que soit t. Donc en un mot $r = at + b$, $r' = a't + b'$; les dér. 1ères sont const, les dér. secondes nulles. On a

$$(\cotg\alpha - \cotg\beta)\frac{1}{\rho} = \frac{\cotg\alpha \cos\alpha}{r} - \frac{\cotg\beta \cos\beta}{r'}$$

Pour $\rho = \infty$ d'inflexion, il faut $\frac{\cotg\alpha \cos\alpha}{r} = \frac{\cotg\beta \cos\beta}{r'}$.

La condit. n'est pas $\cotg\alpha = \cotg\beta$, car pour qu'on ait $\cotg\alpha = \cotg\beta$, il faut $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \beta + \pi$, c.à.d. M, F et F' en ligne droite, ~~donc~~ en dehors de F et F', on entre ens. alors formule ne serait plus applicable

Sur le pt M, on a une inf d'ovales qui ont pour foyers F, F'. Lieu des centres de courb de ces différ. ovales

$\alpha = \omega$, $\beta = \omega - \gamma$, γ étant FMF'.

Mult par $\sin\alpha \sin\beta$, on a

$$(\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)\frac{1}{\rho}$$

$$\text{ou } \rho^2 \sin\gamma = \rho^3\left[\frac{\cos^2\alpha \sin\beta}{r} - \cos^2\beta \frac{\sin\alpha}{r'}\right)$$

ou mult par $\sin\omega$ et $\cos\omega$, alors homog en $\sin\omega$ et $\cos\omega$. On a $(x^2+y^2)\sin\gamma =$ poly homog du 3e deg.
Donc à l'orig un point double à tang imag parallèles aux asympt du cercle

---

Enveloppe de $X_3\lambda^3 + 3X_2\lambda^2 + 3X_1\lambda + X_0 = 0$

Les X sont fonct. du 1er degré de x et y.
On écrit que cette éq en λ a une rac double, on

Discriminant nul $(X_2X_1 - X_3X_0)^2 - (X_2^2 - X_3X_1)(X_1^2 - X_2X_0)$

Tel est lieu. Constr de la courbe. Recherch points singul.
Points de rebroussement de l'envel d'un syst de courbes:
$\varphi(x, y, \lambda) = 0$, φ polyn en x, y, et λ., ce sont des
courbes algébr on a $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ on élim λ.
Pour constr courbes form la plus commode n'est
pas $F(x, y) = 0$, mais $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. C'est
aussi sous cette forme qu'on met le plus sou la
Courbe dans le Cours de Calc différ. Prenons $t = \lambda$,
pour var indépend Comm avons les
pts de rebroussem on exprim que $x' = y' = 0$: on l'a vu
On peut retrouver ce résultat: supp (1),
quand λ varie x, y décrit courbe, on A
x ou y pass par un max. ou un min, sauf
Cas où tang en A paral à un des axes.
On écrit donc mainn on trouv $x' = y' = 0$.
Mais ss nécess de discuter plus à fond: condit.

(1) A

d'un map. et dér prem nulle et 1ère dér qui ne s'annule pas doit être de rang pair. Si x'', y'' nuls, on n'aura pas de point de rebrous. on aura (2), point ordinaire.

Donc pt de reb de 1ère espèce ou 2e si x', y' nuls sans que x'', y'' le soient; et faux points de rebroussem si en même temps x'', $y'' = 0$.

Cond $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ - Différent $\frac{d^2\varphi}{dx\,d\lambda}\,x' + \frac{d^2\varphi}{dy\,d\lambda}\,y' + \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = 0$

$+ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}$ Pour x' et y' nuls il faut $\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = 0$ - Cette condit est suffis. en général - En effet différ - $\varphi(x, y, 1) = 0$,

$\frac{d\varphi}{dx}\,x' + \frac{d\varphi}{dy}\,y' + \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = 0$, deux éq linéaires et homog en x' et y', pour solut $\Delta = 0$; si Δ pas nul, on a $x' = y' = 0$.

Voy si dér. secondes s'annulent : différent encore $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ Soient φ', φ'' — dér. de φ en λ. On a $\varphi' = 0$, puis

$\frac{d\varphi'}{dx}\,x' + \frac{d\varphi'}{dy}\,y' + \frac{d\varphi'}{d\lambda} = 0$ or $\frac{d\varphi'}{d\lambda} = \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = 0$.

Différ. encore $\frac{d\varphi'}{dx}\,x'' + \frac{d\varphi'}{dy}\,y'' + \frac{d\varphi''}{dx}\,x' + \frac{d\varphi''}{dy}\,y' + \frac{d^2\varphi'}{dx'^2}\,x'^2 +$

$\frac{d^2\varphi'}{dx'\,dy'}\,x'y' + \frac{d^2\varphi'}{dy'^2}\,y'^2 + \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} + \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\,x' + \text{—} \qquad = 0.$

Mais ce terme cont. x'', x', y', y'' —, sauf le terme $\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}$, qui doit donc être nul.

Donc si nous avons $\varphi = 0$, $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = 0$

sans avoir $\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} = 0$, on a un vrai point de reb

Et si $\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} = 0$ on a un faux pt reb

En gén., vrai pt si 1er dér. qui ne s'annule pas est d'ordre impair; et faux, si pair.

Autrement : Donnons à x et y val déterm., et cherch. $\varphi(x,y,\lambda)=0$ comme équat en λ. Si rac double, le pt appart à l'enveloppe.

Si rac d'ordre pair, faux point de rebr

Et si d'ord impair, vrai point de rebr

Car s'except quand $\Delta=0$

Points doubles. Pour que x,y appart à l'envel, il faut éq en λ ait une rac double

Pour que pont x,y soit doubb sur envel, il faut qu'il soit point de contact, donc

2 rac doubles. Appliq au cas actuel, équat en λ du 4e degré, par de points doubles, car il faudrait 2 rac doubles.

Exprim que l'éq a une rac triple, 1er membre cube parfait, $\frac{X_3}{X_2} = \frac{X_2}{X_1} = \frac{X_1}{X_0}$, donc

$X_i = a_i x + b_i y + c_i$. Egal les 2 rapp égaux à S.

ona $X_3 = X_2 S$ on $(a_3 - a_2 S)x + (b_3 - b_2 S)y + (c_3 - c_2 S) = 0$

de même 2 autr éq Ces éq ont une

solut comm donc déter $= 0$.

$$\begin{vmatrix} a_3 - a_2 S & b_3 - b_2 S & c_3 - c_2 S \\ a_2 - a_1 S & - - - & - - - \\ - - - & - - - & - - - \end{vmatrix} = 0$$

3e degré en S chaq val donne un pt de rebroussement. Donc 3 pts de rebroussement

Supposant qu'il s'agit d'envel des droites $X_m \lambda^m + X_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + X_1 \lambda + X_0 = 0$

on peut écrire $Ax + By + C = 0$ A, B, C étant du 1er degré en λ. Différent en λ.

$A'x + B'y + C' = 0$. / $\frac{x}{BC'-CB'} = \frac{y}{CA'-AC'} = \frac{1}{AB'-BA'}$; si A, B, C

sont poly ent en λ, il en est de même de ces dénom
Donc x et y s'expriment rationnellement en λ.
Courbe unicursales. Courbe de degré m, pour être unicursale doit
avoir $\frac{(m-1)(m-2)}{6}$ points doubles. — Degré, en combien de pts
coupe-t-elle une droite. Appel P, Q, R les 3 polyn
en dénom Coupons par $ax+by+c=0$, en remplt
x, y, par P, Q, R, $aP+bQ+cR=0$,
équat en λ qu'on résout, le nombre des pts d'inter
est celui de cette éq en λ, c.à.d. du polyn P, Q ou R
qui a le degré le plus élevé. B $m^{ième}$ degré, C $m-1$.
on croirait $2m-1$; mais il y a une réduction
Considt $\begin{pmatrix} B & C \\ B' & C' \end{pmatrix}$, rend B et C homog en λ et μ
mult la 1re ligne par m, $\begin{vmatrix} mB & mB \\ \frac{dB}{d\lambda} & \frac{dC}{d\lambda} \end{vmatrix}$, on a
$mB = \lambda \frac{dB}{d\lambda} + \mu \frac{dB}{d\mu}$, donc $\begin{vmatrix} \lambda \frac{dB}{d\lambda} + \mu \frac{dB}{d\mu} & \lambda \frac{dC}{d\lambda} + \mu \frac{dC}{d\mu} \\ \frac{dB}{d\lambda} & \frac{dC}{d\lambda} \end{vmatrix}$
Retn à 1re ligne la 2e mult par λ, et faisn $\mu = 1$
$\begin{vmatrix} \frac{dB}{d\lambda} & \frac{dC}{d\mu} \\ \frac{dB}{d\lambda} & \frac{dC}{d\mu} \end{vmatrix}$, donc équat de degré $2m-2$,
pour $m=3$, on a $4^{ième}$ degré. Elle doit avoir 3
pts doubles (ou de rebroussem). Or pas de pts doubles,
donc 3 pts de rebr confirmat de ce qu'on a vu
plus haut

Revn au cas génér. Points de rebrousse
$A''x + B''y + C'' = 0$ Points de rebr donnés par
$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$, éq en λ, qu'on résout

Degré semble être $m + m-1 + m-2$, mais s'abaisse à cause mult les lignes par m, $m^2(m-1)$ ——, on a

$$\begin{vmatrix} m(m-1)A \\ mA' \\ A'' \end{vmatrix} ; \quad \text{d'après forct homog}, \quad m(m-1)A = \lambda^2 \frac{d^2A}{d\lambda^2} + 2\lambda\mu \frac{d^2A}{d\lambda d\mu} + \mu^2 \frac{d^2A}{d\mu^2}.$$

$$mA' = \lambda \frac{d^2A}{d\lambda^2} + \mu \frac{d^2A}{d\lambda d\mu}, \qquad A'' = \frac{d^2A}{d\lambda^2}.$$

En retr de la 1re ligne la 2e mult par λ^2, de la 2e la 2e mult par λ, on fait disp les 2 1ers termes, puis retr 2e mult par 2λ de la 1re; et enfin $\mu=1$, on a $\begin{vmatrix} \frac{d^2A}{d\mu^2} \\ \frac{d^2A}{d\lambda d\mu} \\ \frac{d^2A}{d\lambda^2} \end{vmatrix}$, dont le degré est somme des degrés de chaque terme $m-2 + m-2 + m-2 = 3m-6$. Et est le nombre des pts de rebr. $m=3$, on a 3 pts de rebr, c'est ce qu'on a trouvé plus haut

Pour pts doubles on revient à forme $X_m \lambda^m + \dots$, et on écrit race double, compliqué. On trouve aussi le nombre. Courbe de degré $2m-2$, donc elle a $\frac{(2m-2-1)(2m-2-2)}{2} = 2m^2 - 7m + 6$ pts doubles, or $3m-6$ pts de rebroussement qui comptent parmi eux.

Donc $2m^2 - 10m + 12$ pts doubles ——

Revenons au cas où $\Delta = 0$ (voir au début).

on ne peut plus conclure $x' = y' = 0$. Différ. par rap. à λ les éq $Ax + By + C = 0$ et $A'x + B'y + C' = 0$.

On a $A^+x' + B^+y' = 0$ et $Ax' + By' = 0$ avec $A'x' + B'y' = 0$.

Donc le cas d'exception est celui où l'on a $AB' - BA' = 0$

Discutons. Supp qu'on cherche pts d'inflexion

Le coef ang de tang $-\frac{A}{B}$ passe par un maxim donc $AB' - BA' = 0$, mais cette condit pas suffis. Car supp $AB' - BA' = 0$, alors en général $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{1}{0} = \infty$, x et y ∞. Donc cette condit seule corresp aux points à l'∞. Pour qu'on ait un vrai pt d'inflex il faut démontrer x et y nuls aussi, donc $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$. Donc 2 condit; une seule inconn λ; donc il faut ce, 2 éq une rac commune ce qui n'a pas lieu en général. Donc en gén. pas de pt d'inflex. Cond $X_3 \lambda^3 + \cdots = 0$. Il faut et suff pour une certaine val de λ les 2 dér. en λ et μ (après avoir rendu homog) soient identiq alors degré se réduit. Car supp les 3 condit remplies alors $BC' - CB'$, $AB' - BA'$, $CA' -$ contiennent en fact $\lambda - a$, on le ferait disparaître et P, Q, R au lieu d'être de degré $2m-2$ seraient de degré $2m-3$. Et si on fait $\lambda = a$ dans éq on a une droite, le lieu contient cette droite tout entière, car alors x et y ont val indéterminée. Donc le lieu se décompose en courbe $2m-3$ et une droite. Ici au lieu de 4e degré, une courbe du 4e ordre et une droite, 1 seul point de rebroussement au lieu de 3.

Trouver tang doubles, c.à.d. tang à courbe en 2 points différents, pour 2 val diff de λ, soient λ_0 et λ_1 ces valeurs. $A = \varphi(\lambda)$, $B = \psi(\lambda)$, $C = \theta(\lambda)$. Il faut qu'on trouve même droite pour λ_0 et λ_1, $\frac{\varphi(\lambda_0)}{\varphi(\lambda_1)} = \frac{\psi(\lambda_0)}{\psi(\lambda_1)} = \frac{\theta(\lambda_0)}{\theta(\lambda_1)}$, résolu en λ_0 et λ_1, elles donnent les tang doubles ou les tg. d'inflex dont le lieu d'une tang double dont les 2 points de contact se rapproch indéfiniment ou on a

$$L\varphi(\lambda_0) = L\varphi(\lambda_1) = L\psi(\lambda_0) - L\psi(\lambda_1) = L_1 \quad (\theta).$$

Div. par $\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{A_1}$, on fait tend λ_0 vers λ_1, et on a

$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$. En gén. 4 points d'inflex

on peut se dem. si $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$ suffit pour avoir un pt d'inflex ordin. Car il pourrait se faire qu'on ait un pt de rebr, mais alors il peut être de 2e espèce 1re espèce, coef ang de tg ne fait pas par max. ou minim; il passe pour 2e espèce. (Car en O, Etang confond pour la pt inf voisin). Si $AB' - BA'$, on a un max, donc alors il est de 2e espèce

Quelles sont les coord du point d'inflex?

Forme illusoire, car x et y $\frac{0}{0}$. On applique règle: rapport des dérivées. On a à dériver $BC' - CB'$, on a $BC'' - CB''$, car en différent $B'C' - C'B' + BC'' - CB''$; de même $CA'' - AC''$ et $AB'' - BA''$. Donc coord donn par

$$\frac{x}{BC'' - CB''} = \frac{y}{CA'' - AC''} = \frac{1}{AB'' - BA''}$$

; $A''x + B''y + C'' = 0$.

On différ. une seconde fois en λ. On a donc

$Ax + \frac{\quad}{\quad} = 0$, $A'x + \frac{\quad}{\quad} = 0$ qui ne sont pas distincts

et on y joint $A''x + B''y + C'' = 0$, qui achève de donner x et y.

Coord à avoir à la fois x' et y' nuls

Différent encore $Ax' + By' + C' = 0$, deux fois en λ.

et de même 2 fois $Ax + By + C = 0$ — on a

$Ax'' + By'' + A'x + B'y' + A''x + B''y + C'' = 0$

Cette équat équiv. à $A'x'' + AB'y'' = 0$, parce que $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}$.

Sans à Coord $A'x' + B'y' + A''x + B''y + C'' = 0$,

différ. de nouveau $A'x'' + B'y'' + A''x' + B''y' + A''x' + B''y' + A'''x + B'''y + C''' = 0$

Pour $x' = y' = 0$, il faut $A'''x + B'''y + C''' = 0$.

Donc si $\frac{A'}{A} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$, coord du pts sont donnés

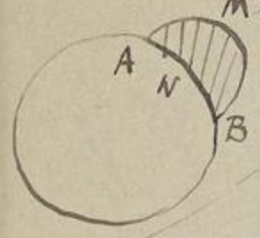
par éq, et il est de rebroussement de 1re espèce ? si on n'a pas
ou d'inflexion $A'''x + B'''y + C''' = 0$; 2e espèce si on a cela.

Dével d'une courbe unicursale, Coef de normale sont polyn entiers en t. Soit $f(x,y) = 0$ m, la courbe donnée unicursale, normale a coef qui sont polyn entiers en t. On est dans le cas précéd On cherche envel
Degré de chacun de ces polyn est $3m-2$; Donc le degré de l'enveloppe de ces normales est $2(3m-2) - 2 = 6m-6$
Sa classe, est le degré des poly A, B, C c à d $3m-2$.
Il y a Cas où degré s'abaisse de 3 unités quand courbe a direct asympt de la courbe se confond avec direct asymp du cercle ; de 2 unités quand courbe a 2 pts de rebrous Si 2e degré, unicursale, un point double, sa dével est du 12e ordre Si 2 direct asympt paral à celles du cercle, on a $12 - 6 = 6$. (Conch cissoïdales).
Et on voit que l'envel d'une droite n'a pas en gén de pt de rebroussement.

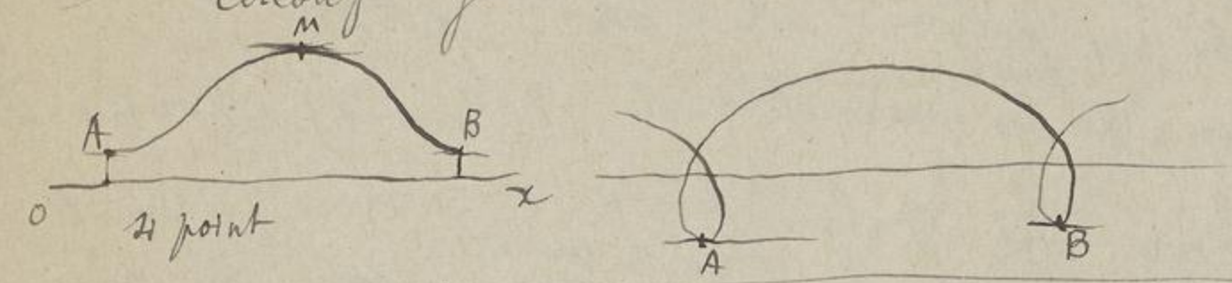
Démontrer que toute courbe gauche telle que le rapport des 2 rayons de courbure est constant est une hélice. et que sa tang fait angle const avec une direct déterminée.
On consid une courbe gauche tracée sur une sphère de rayon R, s étant l'arc compté à partir d'un point fixe ~~sur cette~~ R ray de courb, ρ ray de torsion, $\frac{1}{\text{tor}} R = \varphi(s)$; εR est connu en fonct de s), calculer ρ en fonct de s.

Etude de la surf développable ~~dont la base est une elle~~ qui passe par une ellipse donnée et dont le plan tang fait avec le plan de cette ellipse un angle const. donné. (C'est une surf développante à base d'ellipse)

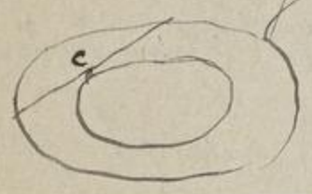
On consid un arc d'épicycloïde AB limité à 2 points de rebroussement consécutifs sur une circonfce génératrice. Calculer aire AMB, et l'aire hachée AMBN.



Rectification de la cycloïde allongée ou raccourcie : sont liés entre eux à un cercle qui roule sur une droite, le pt n'est pas sur la circonf génér. Trouver une ellipse dont la long totale = AMB.



Calcul de l'aire de la courbe définie comme suit : Ellipse, corde AB de long const quand corde se déplace, un point déterminé C de cette corde décrit une courbe ~~enveloppe courbe~~ C intérieure à l'ellipse. Aire comprise entre ellipse et courbe ?



(Chion de Holditch, Bertrand).

Intégr de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{qp}\,dx}{(1+x^{2n})^m}$. Intég de fonct rationnelles. Car on peut résoudre équat $1+x^{2n}=0$. on a toutes ses racines. La décomp en élém. simples se fait. Il n'est pas néces de passer par l'intermédiaire de l'intég indéfinie, grâce au choix des limites. En effet, soit $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$ $F(x)$ étant fonct ration, on peut calculer plus simplement qu'un calcul intég indéf (mais il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty}$ ait un sens). Il faut que $F(x)$ ne devienne pas infini entre lim. Soit $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $\varphi(x)=0$ ne doit pas avoir de rac réelles. Il faut encore que la fonct $F(x)$ soit d'un degré en x inférieur à -1, à cause des lim $-\infty$ et $+\infty$, et comme $F(x)$ est rationnelle, il faut degré de F au plus -2 ; soient a et b deg de f et φ, il faut $b \geq a+2$. Supp qu'on ait décomp en élém simples $\frac{A}{x-a}$ $\frac{A}{(x-a)^2}$ — ——— (les dénom doivent être imag ; et comme $f(x)$ degré inf à $\varphi(x)$, par de partie entière, et comme $b \geq a+2$. Somme des résidus nulle. Soit $-a+ib$ une rac de $\varphi(x)=0$ et comme $F(x)$ est réelle, on a aussi $a-ib$. On peut supp $b>0$.

car il suffisait de permuter les 2 racines, pour que a et b soient >0.

Cours d'abord $\frac{A}{(x-a-ib)^m}$, l'int. indéf est $-\frac{A}{(m-1)}\cdot\frac{1}{(x-a-ib)^{m-1}}$ / si $m>1$, cette expression se réduit à 0 aux ~~deux~~ entre $+\infty$ et $-\infty$.

Cours alors $\frac{A}{x-a-ib}$, ou $\frac{A+iB}{x-a-ib}$, ajout l'élém conjugué $\frac{A-iB}{x-a+ib}$.

La somme est $\frac{A(x-a)-Bb}{(x-a)^2+b^2} = \left|\begin{array}{l}\text{on aura}\\ 2A\frac{(x-a)}{(x-a)^2+b^2} - \frac{2Bb}{(x-a)^2+b^2}\end{array}\right.$. Prenons 2 termes

Le 1er donne int défini $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2A(x-a)}{(x-a)^2+b^2}$ nulle, car int indéf $\frac{A}{2}\log((x-a)^2+b^2)$

donc entre x_0 et x_1, on a $\frac{A}{2}\log\frac{(x_1-a)^2+b^2}{(x_0-a)^2+b^2}$, x_1 et x_0 infin de façon

que $\lim\frac{x_1}{x_0}=\lambda$, la lim est $\frac{A}{2}\log\lambda^2$, ou $A\log\lambda^2$. Donc on aura $\sum 2A\log\lambda$.

donc $\sum A$ est nul. Car les résidus correspondant à $a+ib$ ont somme nulle. On a

$\sum(A+iB)+\sum(A-iB) = 2\sum A$, et somme des rés. nulles car degré ≤ -2.

Donc 1ère intégr nulle. Cours $\frac{-2Bb}{(x-a)^2+b^2}$, l'intégr est

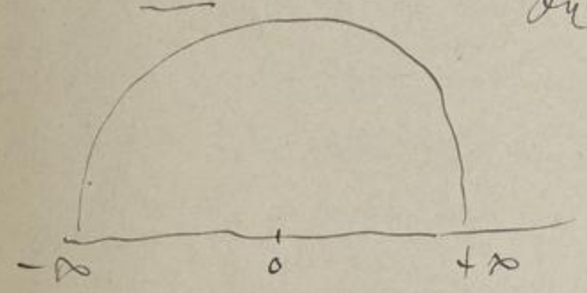
$$-2B\int\frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2} = -\frac{2B}{b}\int\frac{dx}{\frac{(x-a)^2}{b^2}+1} = -\frac{B}{b}\frac{d\left(\frac{x-a}{b}\right)}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1} = -2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{b},$$

x variant entre $-\infty$ et $+\infty$, on a $-2B\pi$. Somme de tous ces termes est $-\sum B$.

Donc l'intégr cherchée est $-2\sum B\pi$, B étant résidu de rac ayant partie imag positive. Cours les résidus à ces rac $a+ib$, ce sont $\sum(A+iB)$, or $\sum A=0$, donc il reste $i\sum B$. L'int cher est $-2\sum B\pi$. Donc $2i\pi\sum(A+iB)$, ~~nul~~

On peut faire autrement par les imag $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$

$I = 2i\pi\sum_{-}A$, A résidus au-dessus de ox, rac à partie imag positive $= \sum(A+iB)\cdot 2i\pi$.



appliq à l'int proposée. $1+x^{2n}=0$.

$2n\,m \ge 2p+2$, fonct impaire sous sog signe $\int$; quand on change x en $-x$, change de signe. Consid $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p}\,dx}{1+x^{2n}}$, en fait. $m=1$. L'inég est $2n \ge 2p+2$.

Rac de $1+x^{2n}=0$; on doit avoir racine $e^{\frac{2i\pi}{4n}}\cdot h$, où h impair ; ou $e^{\frac{2i\pi(2k+1)}{4n}}$.

Faisons $k=0, 1, 2, 3, \dots n-1$. Celles dont la partie imag est >0 sont celles-là

$e^{\frac{2i\pi}{4n}}$, $e^{\frac{6i\pi}{4n}}$, $\dots$ $e^{\frac{(2n-1)i\pi}{2n}}$, prog géomét raison $e^{\frac{2i\pi}{2n}}$ ou $e^{\frac{i\pi}{n}}$. Calcul

les résidus corresp, $\frac{f(a)}{\varphi'(a)} = \frac{x^{2p-2n+1}}{2n\,x^{2n-1}}$ ou $\frac{x^{2p-2n+1}}{2n}$, on a

$\frac{i\pi}{n}\sum x^{2p-2n+1}$, soient $\frac{\pi}{2n}\,x^{2p-2n+1}=\theta$. Soit la plus petite racine $x^{2p-2n+1}$

donne $e^{i\theta}$. On a $\frac{i\pi}{n}\left(e^{i\theta}+e^{3i\theta}+e^{5i\theta}+\dots+e^{(2n-1)i\theta}\right) = \frac{i\pi}{n}\,\frac{e^{i\theta}-e^{(2n+1)i\theta}}{1-e^{2i\theta}}$.

$= \frac{i\pi}{n} \frac{2e^{i\theta}}{1-e^{2i\theta}}$. Car $2n\theta = \pi(2p-2n+1) =$ mult sup de π, et alors

$e^{(2n+1)i\theta} = e^{2ni\theta}.e^{i\theta} = -e^{i\theta}$. — On peut simplif en mult par $1-e^{-2i\theta}$,

$$\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{(1-2e^{2i\theta})(1-e^{-2i\theta})} = \frac{i\pi}{n}\frac{2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{1-e^{2i\theta}-e^{2i\theta}+1} = \frac{i\pi}{n}\frac{2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2(1-\cos 2\theta)} = \frac{i\pi}{n}\cdot\frac{2i\sin\theta}{1-\cos 2\theta}$$

$1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$, donc $-\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{2\sin\theta}{2\sin^2\theta} = -\frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\theta}$. Revenons au cas où m n'est pas égal à 1. Rien $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p}\,dx}{(1+x^{2n})^m}$ — , on pourrait calculer directement somme des résidus, mais plus simple d'employer intégr par parties. On a $D\frac{1}{(1+x^{2n})^{m-1}} = \frac{-x^{2m-1}\,2n(m-1)}{(1+x^{2n})^m}$

$= +\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p-2n+1}}{2n(m-1)}\,d\left(\frac{1}{(1+x^{2n})^{m-1}}\right)$, intégr par parties. La partie ratio donne $0(x=-\infty \text{ et } +\infty)$

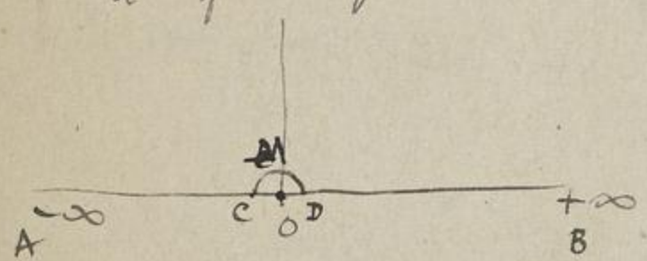
$=$ le second terme $\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot\frac{2p-2n+1}{2n(m-1)}\frac{x^{2p-2n}}{(1+x^{2n})^{m-1}}\,dx$, on répète l'opér. assez de fois, on ramène

exposant de $1+x^{2n}$ à l'unité. Écrivons en effet $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(1+x^{2n})^m} = \frac{2p-2n+1}{2n(m-1)}\cdot\frac{2p-4n+1}{2n(m-2)}\cdot\frac{2p-6n+1}{2n(m-3)}\cdots\times$

$\times\frac{2p-2n(m-1)+1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p-2n(m-1)}}{1+x^{2n}}\,dx$ même forme que plus haut à condit. que

$2p-2n(m-1)>0$. Mais remarq qu'il suffit de connaît. sous des résidus correspondants aux racines

~~Si~~ $2p-2n(m-1)<0$, on arrive à $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2p}(1+x^{2n})^m}$, une intégr sous cette forme n'a pas de sens car infini pour $x=0$, on a terme détruits par terme provenant de la partie rationnelle il suffit de prendre les autres. D'ailleurs on peut éluder la difficulté comme suit par imaginaire



on intégr le long de $-\infty$ à $+\infty$. Demi-circonf infiniment petite autour de O. suiv. AC + suiv. cercle CMD, et enfin suiv. DB . On arrive à $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2p}(1+x^{2n})^m} = \Sigma$ des résidus au-dessus de ox , rac de $1+x^{2n}=0$

Il faut décomp $\frac{1}{x^{2p}(1+x^{2n})} = \frac{P}{1+x^{2n}} + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_{2p}}{x^{2p}}$,

P polyn de degré au plus $2n-1$. Cherch P . on aura $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P\,dx}{1+x^{2n}}$, ce sera le cas ~~ci~~ vu plus haut.

Mult par x^{2p}, on a $\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{Px^{2p}}{1+x^{2n}} + A_1x^{2p-1} + A_2x^{2p-2} + \cdots$ On peut faire hyp sur x^{2p} ; on peut supp d'abord $2p<2n$, alors $\frac{Px^{2p}}{1+x^{2n}}$ de degré <0 , le ant. terme tout degré ≥ 0. Dével $\frac{1}{1+x^{2n}}$ suiv. puis. dém de x, on a terme de degré <0, et au-delà ~~post~~ post, donc on aura A et B.

On peut éviter ces difficultés : on a trouvé $2p>2n(m-1)$, le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty}$ se ramène à $\int\frac{x^{2p}dx}{1+x^{2n}}$

Il suffit de voir si on peut ramener $\int\frac{x^{2p}dx}{(1+x^{2n})^m}$ au cas où $2p>2n(m-1)$. Rien $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p+2n}\,dx}{(1+x^{2n})^m}$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p}dx}{(1+x^{2n})^m} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2p}dx}{(1+x^{2n})^{m-1}} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p+2n}\,dx}{(1+x^{2n})^m}$, la 1ère intégr est telle que $2p-2n(m-1)<0$ (je suppose

la 2e augm de $2n$, on peut répéter opérat assez de fois, pour que quant >0.

Voir la suite de cette question dans le cahier suivant

145, Bd St Michel. Brück

Mercredi Samedi

Poincaré

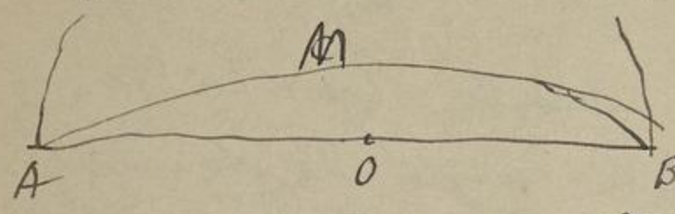
Analyse

III

de Poincaré

Poincaré

Intégr. définie $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}\,dx}{(1+x^{2n})^m}$. $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$ Il suffit d'envisager les infinis de $F(x)$ au-dessus de Ox somme des résidus $\times 2i\pi$.
Reprendre la démonstration par les images pour généraliser. Supp qu'on intègre suiv. AMB, on a
$2i\pi \times$ somme des résidus se trouvant au-dessus de AMB.



Considérons le cas où $m=1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{1+x^{2n}}\,dx$. On a trouvé $= -\frac{\pi}{n\sin\theta}$, en posant $\theta = \frac{2p-2n+1}{2n}\pi$.

Applic. à $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$ on pose $\operatorname{tg} x = t$. On a =

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{t^4+1} + \int_{-\infty}^{0} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt \cdot + \int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0} - \cdot = 2\int_{-\infty}^{+\infty} .$$ Ici $\theta = \frac{2-4+1}{4}\pi$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. , $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{t^4+1} = \frac{\pi}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$; or il faut doubler, donc $\pi\sqrt{2}$.

On a donné d'autres méthodes dans le cas de m entier. Soit $m=2$.

$\frac{x^{2p}}{(1+x^{2n})^2}$. On cherche les infinis dont partie imag >0, on les obt en égal à zéro le dénom $1+x^{2n}=0$; si $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{4n}}$, les infinis seront les puis. impr. de α. Il y en a n dont les parties imag sont positives, ce sont les n premières. On fait $k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$. Soit β l'un d'entre eux, on fera la somme des résidus. Cherch le résidu relatif à β. On fait $x = \beta + y$, on dével. le résidu est le coef de $\frac{1}{y}$. on a $x^{2p} = \beta^{2p} + 2p\beta^{2p-1}y + \dots$

~~$1+x^{2n}$~~ ~~$1+\beta^{2n}=0$~~, car β est racine, donc $1+x^{2n} = 2n\beta^{2n-1}y + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\beta^{2n-2}y^2 + \dots$

$= 2n\beta^{2n-1}y\left(1+\frac{2n-1}{2}\frac{y}{\beta}+\dots\right)$. Dével. $x^{2p}(1+x^{2n})^{-2} = $ ~~$\beta^{2p} + 2p\beta^{2p-1}y + \dots$~~

$= \frac{\left(\beta^{2p}+2p\beta^{2p-1}y+\dots\right)\left(1-\frac{(2n-1)}{\beta}\frac{y}{\beta}+\dots\right)}{4n^2\beta^{4n-2}y^2}$. On veut coef du terme en $\frac{1}{y}$,

c'est-à-dire en y au numérat., on a $\frac{2p\beta^{2p-1} - (2n-1)\beta^{2p-1}}{4n^2\beta^{4n-2}} = \frac{2p-2n+1}{4n^2}\beta^{2p-4n+1}$.

Il faut la somme des résidus relatifs aux différ. val de β, $\frac{2p-2n+1}{4n^2}\sum \beta^{2p-4n+1}$. Or la somme de $\sum\beta^h$, on l'a vu à la leçon précédente, est $\sum\beta^h = -\frac{i}{\sin\theta}$, en pos. $\theta = \frac{h}{2n}\pi$. On a donc

$-\frac{2p-2n+1}{4n^2}\frac{\pi}{\sin\theta}$. $\int \frac{x^{2p}\,dx}{(1+x^{2n})^2} = -\frac{1}{2n}\int x^{2p-2n+1}\,d.\left(\frac{1}{1+x^{2n}}\right)$

$= -\frac{x^{2p-2n+1}}{2n(1+x^{2n})} + \frac{2p-2n+1}{2n}\int \frac{x^{2p-2n}\,dx}{1+x^{2n}}$. En intég entre $-\infty$ et $+\infty$,

la parti intégrée est nulle. Quant à l'intég dans le second membre elle est de la forme de l'intég pour $m=1$, on a $-\frac{2p-2n+1}{2n^2}\frac{\pi}{\sin\theta}$.

On retrouve résultat déjà vu — Difficulté : Cela est vrai pour $2p > 2n$; mais si $2p < 2n$, on ramène au cas précédent de la manière suivante — On a

$$\int \frac{x^{2p}\,dx}{(1+x^{2n})^q} = \int \frac{x^{2p}\,dx}{(1+x^{2n})^{q}} - \int \frac{x^{2p+2n}\,dx}{(1+x^{2n})^{q}}$$

, les termes ~~sont~~ ~~des~~ intégr de même forme que la 1ère vue, et dans la seconde $2p+2n > 0$. Donc on retombe sur cas précédent — — Autre moyen de tourner la difficulté : on a $2i\pi \times \Sigma$ des résidus au-dessus de AOB ; rayon infiniment petit cercle autour de O. Reprenons la partie intégrée, rien de particulier ; la 2e intégrale le long de AOB n'a pas de sens, car elle devient infinie entre les limites pour zéro. Mais suivons le petit cercle par infiniment, sa val est $2i\pi \times$ somme des résidus au dessus du contour. L'int. a un sens, on arrive au même résultat.

A — N O I — M — B

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}\,dx}{(1+x^{2n})^m} = -\frac{1}{2n(m-1)} \int x^{2p-2n+1}\, d.\frac{1}{(1+x^{2n})^{m-1}}$$

$$= \left(\text{partie rationnelle}\right)_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2p-2n+1}{2n(m-1)} \int \frac{x^{2p-2n}\,dx}{(1+x^{2n})^{m-1}}$$

, intég de même forme avec expos moindre d'une unité. On continue ~~trois~~ fois et à chaque fois l'expos du numér. diminue de $2n$, on arrive à $= C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p-2n(m+1)}\,dx}{(1+x^{2n})^{m-1}}$

Cherch C. On a $C = \frac{(2p-2n+1)}{2n(m-1)} \cdot \frac{(2p-4n+1)}{2n(m-2)} \cdots \cdot \frac{2p-2n(m-1)+1}{2n \cdot 1}$

$$= \frac{(2p-2n+1)(2p-4n+1)\cdots(2p-2n(m-1)+1)}{(2n)^{m-1}\,(m-1)!} = \frac{\left(\frac{2p+1}{2n}-1\right)\left(\frac{2p+1}{2n}-2\right)\cdots\left[\frac{2p+1}{2n}-(m-1)\right]}{(m-1)!}$$

C'est le Coef du ter x^{m-1} dans le dével de $(1+x)^{\frac{2p+1}{2n}-1}$ ou $C_{m-1}^{\frac{2p+1}{2n}-1}$.

~~1er~~ Avantage de cette méthode : on ne calcule pas les élém de décomp, car beaucoup de termes seront nuls. — ~~Il faut~~ En gén. le chang des limites $-\infty$ et $+\infty$ ne dispense pas de résoudre l'~~int~~ équat obtenue en égal dénom à zéro.

Toutefois il y a des cas où on peut s'en dispenser Supp dénom $\varphi^2 + \psi^2$. Egal à zéro, $\varphi + \psi\sqrt{-1} = 0$, et $\varphi - \psi\sqrt{-1} = 0$. Il se peut qu'on ne sache résoudre aucune de ces équat. En intég entre $-\infty$ et $+\infty$, il se peut que l'intég s'exprime rationnellement en fonct des coef de φ et de ψ. Supp que par-

imag de toutes rac de φ soit posit, et celle des rac de ψ négat
rem. 2 imag conj, l'une est dans l'une des classes, l'autre dans l'autre
Il peut se faire que toutes les rac de φ aient partie imag posit,
alors les autres négatives — Comment reconn que cette condit est satisf ?
Il faut que racines de $\varphi=0$ et $\psi=0$ soient toutes réelles et dist, et
les rac de φ doiv. séparer les rac de ψ, et réciproquem. Admettons
ces condit (on les démontrera un autre jour). Alors on va chercher à calculer
l'intégr en supp ces condit remplies. Soit l'intégr $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta\, dx}{\varphi^2+\psi^2}$,
φ et ψ sont poly à coef réels, de degré n, $\varphi^2+\psi^2$ degré $2n$,
θ polyn en x, il doit être au plus de degré $2n-2$ pour que l'intégr
soit finie. En gén. on ne sait pas résoudre φ et ψ, donc on ne peut
avoir l'intégr indéfinie; mais on peut avoir intégr définie — ici car il
suffit des résidus. $\frac{A}{\varphi^2+\psi^2} = \frac{P+iQ}{\varphi+i\psi} + \frac{P-iQ}{\varphi-i\psi}$, en supp P et Q polyn
de degré $n-1$; on peut toujours décomp. ainsi. Calcul somme des résidus
de $\frac{P+iQ}{\varphi+i\psi}$, on prend les coef des term de degré le plus élevé au
numer. et au dénom, et on les divise. Soit
$\varphi = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, $\psi = B(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)$.
elles sont réelles et $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$, et la
partie imag positive — supp que coef de x^{n-1} dans P est α, et dans Q
β, la somme des résid est $\frac{\alpha+i\beta}{A+iB}$. Sans avoir l'intégr,
on a $2i\pi \cdot \frac{\alpha+i\beta}{A+iB}$. Il faut donc calculer α et β. On identifie
$\frac{\theta}{\varphi^2+\psi^2}$ et le second membre; on a $\theta = 2P\varphi + 2Q\psi$, écrit. que le
coef le plus élevé est le même, degrés de $\varphi+\psi$ n et $n-1$.
Donc $2n-1$, et θ degré $2n-2$, donc il faut coef le plus élevé nul,
c.à.d $\alpha A + \beta B = 0$. Il suffit donc de connaître soit α, soit β.
Cherch P, n val, choisissons les n val $b_1, b_2, \dots b_n$. On a
$\theta(b) = 2P(b)\varphi(b)$, donc P défini par les n équat
$P(b) = \frac{\theta(b)}{2\varphi(b)}$ pour les n val $b_1 b_2 \dots b_n$. Donc
$P(x) = \sum' \frac{\theta(b)}{2\varphi(b)\psi'(b)} \frac{\psi(x)}{x-b}$, car si on fait $x = b_i$, les term
$\frac{\psi}{x-b}$ s'annul sauf un qui est il reste $P(b_i) = \frac{\theta(b_i)}{2\varphi(b_i)}$. Le coef de

Plus élevé $\alpha = B.\Sigma \frac{\theta(b)}{2\varphi(b)\psi(b)}$ alors $\beta = -A\Sigma$ =

Donc $\lim \frac{B+iA}{A+iB} \Sigma \frac{\theta(b)}{2\varphi(b)\psi'(b)} = 2\pi \Sigma \frac{\theta(b)}{2\varphi(b)\psi'(b)}$, il semble donc que il faut connaître les val de b. mais cela est une fract rationnelle symétr des rac de φ et ψ. Or on connaît ces éq donc on a ces coef

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(x)}{\varphi^2+\psi^2} dx = 2\pi \Sigma \frac{\theta(b)}{2\varphi(b)\psi'(b)}$. Cette égal n'est vraie que quand les a et b satisf aux relat déter plus haut

Si $\int$ était une fonct connue des coef de la fonct sous $\int$, cette ident donnerait satisf pour autre val donc ce n'est pas une fonct connue des coef de la fonct sous signe $\int$. Il y a beaucoup d'intég qui sont ainsi. —

Principales quest dont s'est occupé M. Poincaré pendant les mois de février et mars. —

On donne un ellipsoïde à 3 axes inégaux. Trouver sur le surf le lieu des points pour lesquels le rapport des rayons de courbure principaux est constant ; même question pour le produit ; Lieu des points pour lesquels l'indicatrice est semblable à une conique donnée.

Quelques exercices sur les lignes de striction (lieu des points centraux), et sur le paramètre de distribution

Points stationnaires d'une courbe gauche

Lieu des centres des sphères osculatrices d'une courbe

arête de rebroussem d'une surf développable

Toute courbe gauche dont le rapport des rayons de courbure est constant est une hélice

Trouver les lignes asymptotiques d'un hélicoïde, surface de vis à filet triang ou à filet carré.

Ligne de striction de l'hyperb de révolut à une nappe.

Ligne de strict de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux directrices rectilignes (prises l'une à l'autre ~~en~~ (sans être situées dans le même plan), et qui fait avec l'une d'elles un angle constant α. [La ligne de striction est

la droite rencontrée sous un angle const par la génératrice on le voit par glom stuplement

Recherche des lignes de courbure de la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=(x^2+y^2+z^2)^2$.

Relat entre les rayons de courbure princ de l'ellipsoïde de révolut de l'hélicoïde réglé.

Etude des lignes asympt du tore.

Ligne de striction de l'hyperbol à une nappe : $ax^2+by^2+cz^2=1$.

Le plan central, tang au point central, est paral au plan normal du Cône directeur (cône dont gén. sont paral aux gén. de la surf

Cône directeur de sommet 0 : $ax^2+by^2+cz^2=0$ Le plan paral au plan tg mené par 0 est $aXx+bYy+cZz=0$; il faut exprimer que ce plan passe par une gén. du cône et est normal à la long de cette génératrice. Les Cos. Direct des plans sont proport à ax, by, cz; aX, bY, cZ. Ils sont perp ; donc $a^2Xx+b^2Yy+c^2Zz=0$.

On cherche le lieu de x,y,z Elim X,Y,Z. Ces équat sont linéaires en aX, bY, cZ. Donc

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ ax & by & cz \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{X}{x} & \frac{Y}{y} & \frac{Z}{z} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0,$$

$$\frac{X}{x}(c-b)+\frac{Y}{y}(a-c)+\frac{Z}{z}(b-a)=0.$$ On a 3 éq. linéaires en X,Y,Z.

$$\begin{vmatrix} c-b & a-c & b-a \\ \frac{x}{x} & \frac{y}{y} & \frac{z}{z} \\ ax & by & cz \\ a^2x & b^2y & c^2z \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} \frac{c-b}{ax^2} & \frac{a-c}{by^2} & \frac{b-a}{cz^2} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$$

$$\frac{(c-b)^2}{ax^2}+\frac{(a-c)^2}{by^2}+\frac{(b-a)^2}{cz^2}=0,$$ éq. homog ; ou bien

$$\frac{(c-b)^2}{a}y^2z^2+\frac{(a-c)^2}{b}x^2z^2+\frac{(b-a)^2}{c}x^2y^2=0$$ L'intersect de ce cône du 4e degré avec l'hyperb donne ligne de striction. Les 2 lignes de strict correspondant aux 2 hyp sont confondues dans une même équat. — Soit $b=a$, hyp de révolut. $z^2\left[\frac{(c-a)^2}{a}\right]\left[x^2+y^2\right]=0$

$z^2=0$, 2 fois équat du cercle de gorge —

Lignes asympt. de l'hélicoïde réglé. Le syst des génér. forme un syst. de lignes asymptotiques. Soient x, y, z fonct de 2 param u, v.

$x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$, $z = \varphi_3(u,v)$. Plan tang à une surf

$Z - z = p(X-x) + q(Y-y)$, $\frac{dz}{du} = p\frac{dx}{du} + q\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{dv} = p\frac{dx}{dv} + q\frac{dy}{dv}$.

Inters. de la surf. par plan tang ; prenons $u+du$ $v+dv$; il est sur la même asympt que u, v. on pourrait exprimer qu'il est sur l'inters de la surf. et de ce plan tang. aux inf petits du 3e ordre

$$Z - z = \frac{d^2z}{du^2} + q\frac{dz}{dudv}\,dudv + \frac{d^2z}{dv^2}dv^2 = p\left[\frac{d^2x}{du^2}du^2 + q\frac{d^2x}{dudv}dudv + \frac{d^2x}{dv^2}dv^2\right]$$

$$+ q\left[\frac{d^2y}{du^2}du^2 + \cdots\right]$$

Rempl p et q par leurs valeurs on a égalité des

lignes asympt.	$\frac{d^2x}{du^2}du^2 + \frac{q d^2z}{dudv}dudv + \frac{d^2z}{dv^2}dv^2$	coef de p	coef de q	$=0$

On peut choisir u et v de manière à simplifier — Pour l'hélicoïde on les prend de façon que le plan des xy soit perpen à l'axe du déplacem hélicoïdal. Projet sur xy. AB proj d'une génér, AB = ρ et on a défini la surf

Coord x et y d'un point de la surf s'expriment en fonct de ω.

$x = a\cos\omega - \rho\sin\omega$ $\quad y = a\sin\omega + \rho\cos\omega$.

~~AB proj d'une génér. AB = ρ~~ Le z de B moins le de A est proport à ρ ; car l'angle de la gén. avec plan des xy est const. A décrit une hélice, donc z est donc proport à l'arc de base donc

$z = \alpha\omega + \beta\rho$, α et β étant des const. L'une des solut de l'éq différentielle va par ce choix, disparaître d'elle-même, ω = Const. Ce qui on aura un polyn homog en dx, dy, dw, dw sera en facteur — β est la tang de l'angle de Génér. avec xoy.

$$\frac{dx}{d\rho} = -\sin\omega \qquad \frac{dy}{d\rho} = \cos\omega \qquad \frac{dz}{d\rho} = \beta$$

$$\frac{dx}{d\omega} = -a\sin\omega - \rho\cos\omega, \quad \frac{dy}{d\omega} = a\cos\omega - \rho\sin\omega, \quad \frac{dz}{d\omega} = \alpha.$$

$$\text{d'où } \beta = \frac{dz}{d\rho} = p\frac{dx}{d\rho} + q\frac{dy}{d\rho} = -p\sin\omega + q\cos\omega,$$

$$\alpha = \frac{dz}{d\omega} = p\frac{dx}{d\omega} + q\frac{dy}{d\omega} = p(-a\sin\omega - \rho\cos\omega) + q(a\cos\omega - \rho\sin\omega)$$

$$= a(-p\sin\omega + q\cos\omega) - \rho(p\cos\omega + q\sin\omega), \quad \text{d'où } p\cos\omega + q\sin\omega = \frac{a\beta - \alpha}{\rho}$$

$A\,dw^2 + 2B\,dp\,dw + C\,dw^2 = 0$ est l'éq. des lign. asympt.

$A = 0$, $dw = 0$, et $2B\,dp + C\,dw = 0$. $dw = 0$ donne $w = \text{const}$ 1er type de ligne asympt. génér. — $B = -p\cos w + q\sin w = \frac{\alpha - a\beta}{\rho}$

$C = a\frac{(\alpha - a\beta)}{\rho} - \rho\beta$. L'éq. différ. se réduit à $2B\,dp + C\,dw = 0$ ou

$$2\left(\frac{\alpha - a\beta}{\rho}\right)dp + \left[a\frac{(\alpha - a\beta)}{\rho} - \rho^2\beta\right]dw = 0.$$

Pour trouver l'éq. différ., on pourrait se servir encore de

$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy} = \lambda$, $\lambda(dx\sin w + dy\cos w) - dw(p\cos w + q\sin w) = 0$.

$\lambda(dx\cos w + dy\sin w) + dw(-p\sin w + q\cos w) = \left(\alpha - a\beta\right)\frac{dp}{\rho}$ —

Il faut faire disp. dx et dy. Entre dx et $\frac{\rho}{a}\,dy$. —

Pour intégrer, distinguons les cas : $\alpha - a\beta > 0$. $\alpha = a\,\text{tg}\,\varphi$, $\beta = \text{tg}\,\psi$,

donc $\varphi > \psi$. φ angle const. de la tg à l'hélice

ψ angle de la génér. G avec xOy. $dw = \frac{K\,dp}{\rho^2 - \lambda^2}$,

$w = \text{const} + K^2\,\text{Log}\frac{\rho - \lambda}{\rho + \lambda}$. Construire les proj. sur xOy

$K\,dp = dw(\rho^2 - \lambda^2)$, $\rho = \pm\lambda$, $dp = 0$, ρ const ; $\rho = \pm\lambda$ est une solut. singul. Si $AB = p$ constant la ligne de B est un cercle en projection, par suite on a une hélice sur la surface d'hélices en projetant suivant même cercle

$\rho > \lambda$. Les courbes en proj. sont extér. au cercle précédent

Le petit cercle de rayon a est le contour apparent de l'hélicoïde

Dans les lign. asympt. sont leurs projections entre ces 2 cercles

On peut supp. K nul ; pour $w = 0$, $\log\frac{\rho - \lambda}{\rho + \lambda} = 0$, $\rho - \lambda = \rho + \lambda$.

ou $\rho = \infty$. oX est asympt. ; ρ décroît constam

$w = K^2\,\text{Log}\frac{\rho - \lambda}{\rho + \lambda}$, $\frac{\rho - \lambda}{\rho + \lambda} = e^{\frac{w}{K^2}}$, $\rho\left(1 - e^{\frac{w}{K^2}}\right) = \lambda\left(1 + e^{\frac{w}{K^2}}\right)$,

$w = 0$, $\rho = \infty$, oX asympt. ; w croît, ρ décroît. La courbe est asympt

au cercle $\rho = \lambda$. On aurait une autre courbe symét

$\rho < \lambda$. courbe tang à $\rho = \infty$ asympt au cercle $\rho = \lambda$

2e Cas $\alpha - a\beta < 0$, $\rho < \psi$. on n'a pas d'hélices pour lign asympt trigo

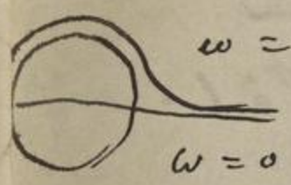
$w = K_1 + K\,\text{arc tg}\frac{\rho}{\lambda}$, $f = \lambda\,\text{tg}\frac{w}{K^2}$ asymptotes

3e Cas $\alpha - a\beta = 0$, $\rho = \psi$, $dw = 0$. Le 2e type se réduit aux

génér. rectilig. de la surf. — C'est-à-dire angle gon tang à l'hélice

L'hélicoïde développable engendré par la tang à l'hélice a ses 2 lignes

asympt confondues $rt - s^2 = 0$, l'indic se réduit à 2 droites paral



Hélicoïd à plan directeur. Génér. paral à xoy, $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$.
$2\alpha\,dp + a\,dw = 0$, $\rho = \frac{a}{2}\omega$, ρ est par le rayon vecteur
touche le cercle du contour apparent

Surf de vis à filets rectangulaires $a = 0$, $d\alpha\,dp = dw\,dp$ par $\omega = \frac{k}{\rho}$,
ρ est le rayon vecteur ici. La courbe se déduit de la spirale
d'Archim par rayons vecteurs réciproques.

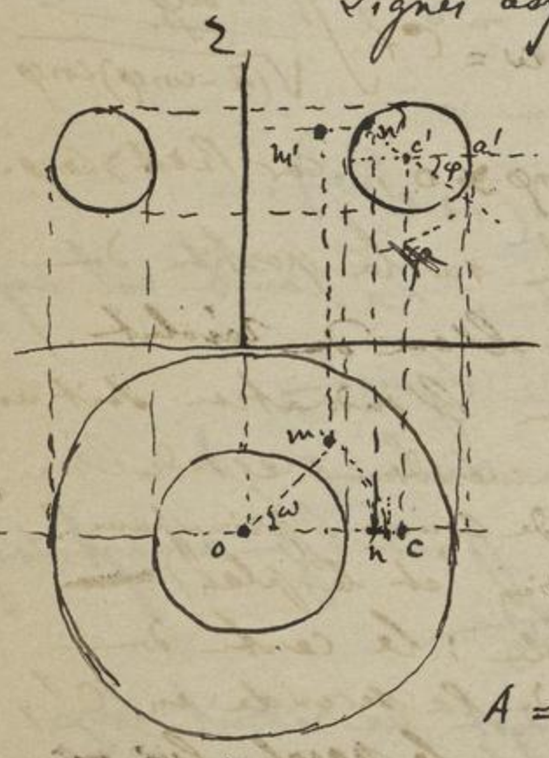
Surf de vis à filet triangulaire. ? rude catrice hyperbolique, $\beta = 0$,
$a = 0$, $\rho = \text{const}$ les lignes asympt se projettent suivant des cercles ce
sont des hélices.

Plan osculat, rayons de courbure et de torsion de la courbe
$x^2 + z^2 = 2z$, $y^2 + z^2 = 2$. (deux cylindres).

Etude de la surf. réglée définie comme il suit : les génér.
rectilignes sont les normales principales à une ~~surface~~ courbe $x = \varphi(s)$,
$y = \varphi(s)$, $z = \theta(s)$. , s arc compté à partir de l'origine
Trouver la ligne de striction et le paramètre de distribution.

Etude des lignes de courbure et des lignes asymptotes d'une
surface qui a pour directrices une droite perpendiculaire au plan directeur
et un cercle dont le plan perpendiculaire au plan directeur : oz
directrice rectiligne ; plan directeur circulaire : $x^2 + z^2 = R^2$, $y = a$; plan dir. $z = 0$.

Lignes asymptotiques du tore C'est une surf. dont les coord d'un
point sont définies par 2 param φ et ω : ~~φ est~~
ω est l'angle du plan méridien avec le plan vertical ou
φ est l'angle qui défin. la posit du point m'.
Le plan xz est paral au plan vertical
Nous prenons le rayon du petit cercle égal à 1.
Ce rayon de l'autre circonf OC est $R > 1$.



$z = \sin\varphi$ $\quad x = (R - \cos\varphi)\cos\omega$ $\quad y = (R - \cos\varphi)\sin\omega$.

Posons maintenant, $\frac{dx}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, ~~A, B, C pour~~
~~Calculer p et q.~~

$$A = p\frac{d^2x}{d\varphi^2} + q\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{d^2z}{d\varphi^2}, \quad B = p\frac{d^2x}{d\varphi\,dw} + q\frac{d^2y}{d\varphi\,dw} - \frac{d^2z}{d\varphi\,dw}$$

$$C = p\frac{d^2x}{dw^2} + q\frac{d^2y}{dw^2} - \frac{d^2z}{dw^2}.$$

L'équat. des lignes asymptotes est alors
$A\,d\varphi^2 + 2B\,d\varphi\,dw + C\,dw^2 = 0$ [Les coef ~~B_1~~ $\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dz}{du}\frac{dy}{dv}$, etc sont ~~nuls~~
les quant $p, q, -1$ quand on prend x et y pour variables indépendantes].

Mais il faut maintenant calculer p et q en fonct. de φ et ω. On a :

(1) $\frac{dz}{d\varphi} = \frac{dz}{dx}\cdot p + \frac{dy}{d\varphi} q$. $\frac{dz}{d\varphi} = \cos\varphi$, $\frac{dx}{d\varphi} = \sin\varphi\cos\omega$, $\frac{dy}{d\varphi} = \sin\varphi\sin\omega$.

$\frac{dz}{d\omega} = 0$, $\frac{dx}{d\omega} = -(R-\cos\varphi)\sin\omega$, $\frac{dy}{d\omega} = (R-\cos\varphi)\cos\omega$. Substit. dans (1),

et dans l'éq. anal. en ω. on a :

$\cos\varphi = \sin\varphi\cos\omega\cdot p + \sin\varphi\sin\omega\cdot q$ ou $\cot g\varphi = p\cos\omega + q\sin\omega$,

$0 = -p\sin\omega + q\cos\omega$. D'où p et q si l'on veut. Mais inutile pour calculer A, B, C.

$\frac{d^2z}{d\varphi^2} = -\sin\varphi$, $\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \cos\varphi\cos\omega$, $\frac{d^2y}{d\varphi^2} = \cos\varphi\sin\omega$.

Donc $A = p\cos\varphi\cos\omega + q\cos\varphi\sin\omega + \sin\varphi = \cos\varphi(p\cos\omega + q\sin\omega) + \sin\varphi$

$= \cos\varphi\cdot\cot g\varphi + \sin\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}$.

Calcul B : $B = \frac{d^2z}{d\varphi\,d\omega}$ et pour cela calculons $\frac{d^2z}{d\varphi\,d\omega} = 0$, $\frac{d^2z}{d\varphi\,d\omega} = -\sin\varphi\sin\omega$

$\frac{d^2y}{d\varphi\,d\omega} = \sin\varphi\cos\omega$. D'où $B = p(-\sin\varphi\sin\omega) + q\sin\varphi\cos\omega - 0 =$

$B = \sin\varphi(-p\sin\omega + q\cos\omega) = \sin\varphi\times 0 = 0$: facile à prévoir, car les lignes asympt. sont symétr. par rapp. au plan méridien

Passons à C : $\frac{d^2z}{d\omega^2} = 0$, $\frac{d^2x}{d\omega^2} = -(R-\cos\varphi)\cos\omega$, $\frac{d^2y}{d\omega^2} = -(R-\cos\varphi)\sin\omega$.

$C = -p\cdot(R-\cos\varphi)\cos\omega) - q(R-\cos\varphi)\sin\omega - 0 =$ ~~$\cos\varphi(p\cos\omega + q\sin\omega$~~

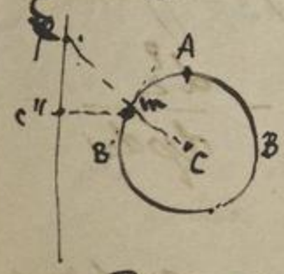
$= (R-\cos\varphi)(-p\cos\omega - q\sin\omega) = -(R-\cos\varphi)\cot g\varphi = -(R-\cos\varphi)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

Donc l'éq. cherchée est $\frac{1}{\sin\varphi}\,d\varphi^2 - (R-\cos\varphi)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\omega^2 = 0$.

$d\omega^2 = \frac{d\varphi^2}{(R-\cos\varphi)\cos\varphi}$, $d\omega = \frac{d\varphi}{\sqrt{(R-\cos\varphi)\cos\varphi}}$, $\omega = C + \int\frac{d\varphi}{\sqrt{(R-\cos\varphi)\cos\varphi}}$

La quant sous le radical doit être >0. donc $\cos\varphi \geq 0$, car $R \text{est} > \cos\varphi$.

et par conséq. $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Le point m' doit être sur la portion de la circonf méridienne qui tourne sa convexité vers l'axe de révolut On s'en rend compte facilement : car il faut que l'indicatrice soit une hyperbole ; or c'est une hyperbole lorsque le point de la méridienne regarde l'axe, et une ellipse de l'autre côté. — Quels sont les rayons de courbure principaux ?



Les 2 sect norm principales sont le plan méridien et le plan perpend. mené par la tang en m au parallèle ; le centre de courbure de la 1re sect est en C, celui de la seconde en C', car la sect. faite par le plan du paral est le paral lui-même dont le centre est en C'', or ce point doit être la proj. du centre C'.

~~Pour AB il indicatrice~~ Les rayons de courbure sont de signes contraires. L'indicatrice est hyperbolique pour AB, indicatrice hyperbolique ; pour AC, elliptique pour les points du paral A, l'indicatrice se compose de 2 parallèles

En gener., si on a ℓ régions sur une surface, ~~l'indicat~~ l'une où l'indicat est elliptq l'autre où elle est hyperbol, les lignes asympt sont tangentes à la ligne de séparation (cas du tore) ou viennent la couper normalement en s'y rebroussant, comme dans le cas où la courbe méridienne aurait un point d'inflexion

Suppr. que ω et φ croissent en même temps. Pour $\varphi=\frac{\pi}{2}$, il y a contact. Pour $\varphi=0$, la courbe est tg au contour apparent, et la ligne asympt passe de l'autre côté du tore.

En général la courbe ne se ferme pas. Il faudrait pour une même valeur de φ, retrouver la même ω augmenté de $2k\pi$, c.à.d. que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(R-\cos\varphi)\cos\varphi}}$ doit être commensurable avec π.

Valeurs de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^p\,dx}{(1+x^{2n})^m}$, $p-m-n$ entier, $p<2n+mn-2$.

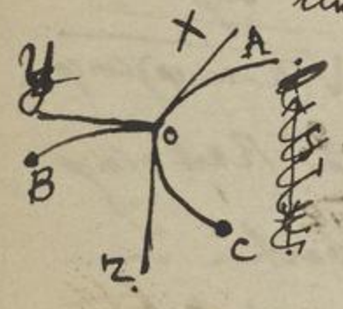
$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. Trouver la partie rationn de l'intégrale

$\int \frac{x^3+x+1}{(x^4+x+1)^2}\,dx$ sans résoudre $x^4+x+1=0$.

Trouver les lignes de courbure de la surf $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{R^4}$.

Théor. Si on connaît 3 syst de surf orthog, et que ces surf se coupent suivant leurs lignes de courbure

soient S_1, S_2, S_3. Les 3 courbes d'intersection OA, OB, OC se coupent en un point O. Au point O les axes de l'indicatrice de S_1 sont les tang. aux deux courbes d'inters. de S_1 avec S_2 et S_3.



En effet, O étant pris pour axes les tg aux 3 courbes.

Le plan des yz est tang. à S_1 (OB, OC).

S_1 a pour équat. $x = ay^2+2byz+cz^2+\cdots$

S_2 — — $y = a'z^2+2b'zx+c'x^2+\cdots$

S_3 — — $z = a''x^2+2b''xy+c''y^2+\cdots$

Car

Exprim qu'elles se coupent orthogonalement. Car surf pour l'écri

Génér

$F_1 = -x+ay^2+2byz+cz^2+\cdots = 0 \quad S_1$

$F_2 = -y+a'z^2+2b'zx+c'x^2+\cdots = 0 \quad S_2$

$F_3 = -z+a''x^2+2b''xy+c''y^2+\cdots = 0 \quad S_3$

Le long de la courbe OC, on doit avoir (pour l'orthogonalité)

$\frac{dF_1}{dx}\cdot\frac{dF_2}{dx}+\frac{dF_2}{dy}\frac{dF_2}{dy}+\frac{dF_3}{dz}\frac{dF_2}{dz}=0$. Pour tout point de OC

cette relat doit avoir lieu. En O elle a lieu. Exprimons qu'elle est satisf
en un point infiniment voisin : on négligera les infin petits du 2e ordre

$\frac{dF_1}{dx} = -1$, $\frac{dF_2}{dx} = 2b'z + 2c'x$ (car x second ordre) ,

$\frac{dF_1}{dy} = 2bz + 2a'x$ (second ordre), $\frac{dF_2}{dy} = -1$, $\frac{dF_1}{dz} = 2cz + 2b'y$, $\frac{dF_2}{dz} = 2a'z + 2b'x$.

On a donc $-2b'z - 2bz + 4a'cz^2 = 0$, on néglige $4a'cz^2$ qui est du 2e ord

Il reste $b + b' = 0$. De même $b + b'' = 0$, $b' + b'' = 0$, on exprime
que les autres sont orthog. Donc $b = b' = b'' = 0$: c'est dire que les axes
de l'indicatr. sont les axes de coordonnées, et les lignes d'intersect des surf
sont les lignes de courbure, puisqu'elles sont dirig suivant les axes de
l'indicatr.

On cherche les lignes de courbure de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{R^4}$

OA étant une ligne d'intersect. des S_1 et S_2, par chaque point de OA on peut faire
passer une surf qui coupe orthogon S_1 et S_2. En chaq point, la ligne OA est
une des lignes de courbure.

Comment s'arranger de manière que la surf donnée fasse partie d'un
syst. triple orthogonal. On remarque que la surf proposée est la
transformée par rayons vect réciproques d'un ellipsoïde qui fait partie d'un syst. triple orthogonal
Ellips. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ellipse font partie d'un triple syst de surf homof.
$\frac{x^2}{a^2-\mu^2} + \frac{y^2}{b^2-\mu^2} + \frac{z^2}{c^2-\mu^2} = 1$, par un point passent 3 surf. du second ordre
homofocales. Les lignes de courb sont les intersect. de ces surfaces. Transformons par
rayons vecteurs réciproques : $\frac{x^2}{a^2-\mu^2} + \frac{y^2}{b^2-\mu^2} + \frac{z^2}{c^2-\mu^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{R^4}$

(car on a $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\frac{R^2}{\rho'}}{\rho'} = \frac{R^2}{\rho'^2}$,

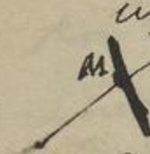
d'où $x = x' \cdot \frac{R^2}{\rho'^2}$, ou $x^2 = x'^2 \cdot \frac{R^4}{\rho'^4} = x'^2 \cdot \frac{R^4}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}$, on substitue
et on trouve l'éq. précéd.) . Les angles ne sont pas altérés par la transform
car ces surf forment un triple syst de surf homofocales, et les lignes de courb
des surf proposées sont les transformées des lignes de courbure de leurs
transformées. —

Généralement : soient S_1, S_2, S_3 3 syst de surf. orthog. Transf. S_1 en Σ_1,
S_2 en Σ_2, S_3 en Σ_3, les angles sont conservés, Σ_1 est orth à Σ_2 et Σ_3, et
les lignes de courbure de Σ_1 sont donc les transf des lignes de courb
de S_1. Donc pour prouver que la transformat n'altère pas les lignes de courbure
il suffit donc de montrer qu'une surf. quelconque fait partie
d'un triple syst de surf orthogonales — Si on mène une normale

par un point quelc de la ligne de Courbure, les normalies qui ont pour directrice ce ligne de Courbure sont développables. Les surfaces parallèles à la proposée ont même normalie qu'elle.

Les surf. parallèles et les E normalies ayant pour Direct les Evytt de lignes de Courbure formant les Evyt de surf orthog. — peut déjà: guiacter que les ligne de Courbure de la transf sont les trans des lig de Courbure

Soit O le Centre de la transform par rayons vect réc, un point de la surf, plan tang perp au plan du tableau



M' point transformé de M, le plan tg fait avec le rayon vect. un angle égal au plan tg transformé. Les axes de l'indicatr en M et M' sont transformés l'un de l'autre

tg à S en M, l'intersection de la sphère Σ avec S est une courbe ayant en M un point double. Les tang en ce point double. L'indicatrice de la sphère est un cercle, elle coupe l'indic de S; les bissectr sont des tang aux bissectr des deux branches d'intersect de S et Σ.

Transform par rayons vect réciproques. Σ se transf. en Σ'. L'intersect de Σ' et de S' aura un point double en M'. Les ligne de courbure de S' sont les bissectr de l'intersect de Σ' et S'. Les angles sont conservés. Les lignes de Courbure de S' sont les transformées des lignes de courbure de S.

La tang à la ligne de Courbure transformée sera aussi un axe de l'indicatrice de la surf transformée. Si Σ a pour rayon un des rayons de Courbure princip. de S, il en est de même de Σ' en égard à S'.

Cours. Ellipsoïde. On peut transform en une infinité de surf dont l'équat générale est $(x^2+y^2+z^2)^2 + P(x^2+y^2+z^2) + F = 0$.

P polyn du 1er ordre homog en x, y, z, F polyn du 2e degré en x, y, z.

Dans les surf de révol. on conn les lignes de Courbure. Elle peut être considé comme enveloppe de sphères dont les centres sur axe. De même considé. la sphère circonscrite. Les lignes de Courbure sont les cercles suivant lesquels les sphères touchent leur enveloppe.

Un tore peut être considéré comme l'enveloppe d'une sphère mobile et les parall suivant lesquels elle touche l'enveloppe sont les lignes de courbure, on peut transform par rayons vecteurs.

Dans les surf développ, les lignes de Courbure sont les génér.

La transformée est l'enveloppe d'une infin de sphères passant par un même point. Les cercles suiv. lesquels les sphères touchent la transformée sont les lignes de Courbure de cette surface

Soient Σ surf. S et S'. S est tang à S' le long d'une courbe C ligne de Courbure de S'. Les normales correspondantes sont développables. Les normales à S sont les mêmes que les normales à S'; les deux normalies se confondent, donc C est aussi une ligne de courbure de S.

Une ligne quelc de la sphère est une ligne de courbure, elle est tang à l'axe de l'indicatr de la sphère en ce point; enfin la normalie se réduit à un cône, aussi développable.

Toute surf enveloppe d'une sphère admet pour lignes de Courbe des cercles. Réciproq toute surf admettant des cercles pour lignes de courbure peut être regardée comme enveloppe d'une sphère

Lorsque une des lignes de Courbure est plane, la normale est une surf d'égale pente ; pour qu'elle ait un cercle pour base, la normale doit être un cône —

si on a comme lignes de courb. des droites, la surf est l'enveloppe d'une sphère mobile (droite variété du cercle).

La surf est réglée : toute droite tracée sur une surf est une ligne asympt. Un des axes de l'indicatrice coïncide avec une asymptote, l'indicatrice se réduit à 2 droites paral, la surf est développable.

Si toutes les lignes de courbure sont dans des plans parallèles, alors se projettant suivant des courbes paral sur xoy. Les autres lignes de Courb. sont les trajects orthog des premières ; ce sont les norm aux courbes parallèles, le plan tang sera perpend au plan de la ligne de Courbure.

Supposons qu'on projette sur xoy les sect. par des plans paral des surfaces dont les lignes de courbure sont situées dans des plans paral à xoy. La sect de la surf par xoy est une des lignes de Courbure. La proj. de la sect par un plan paral à xoy est la proj. d'une ligne de courbure. La normale à C est norm. à C' : ce sont deux courbes parallèles. La 2e sygt des lign de Courbure se compose des traj. orthog du 1er. Les tang se coupent aussi à angle droit en proj. horizontale ; les inters de la surf avec les plans se projetant suivant les normales seront les 2èmes lignes de Courbure. La normale qui a pour directrice cette section est un plan, c.-à.-d. une surf développable dont les 2 nappes à 2 arêtes inégales, les sect par les 3 plans principaux sont lignes de courbure —

Considérons une surf. de révolut. qui se déplace de façon que son axe reste paral à lui-même soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, cet axe de révolut. Il se déplace de façon que tous les points de cet axe décrivent des courbes parallèles : soit $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=0$ la courbe que décrit le centre dans xoy : on a $\frac{[x-\varphi(t)]^2}{a^2}+\frac{[y-\psi(t)]^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, Enveloppe de cet ellipsoïde. Intersection de cette surf enveloppe avec $z=$ const. ce plan est un cercle de courbure dont le centre décrit $z=k$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ Les lignes de Courbure sont dans des plans parel

Si on connaît l'enveloppe d'une sphère constante dont le centre décrit une courbe plane, les lignes de courb sont les cercles suivant lesquels les sphères touchent l'enveloppe et les inters —

Si le centre décrit une ellipse $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, $z=0$, sphère $(x-a\cos\varphi)^2+(y-b\sin\varphi)^2+z^2=R^2$. Pour avoir ligne de Courbure on

Coupe par $z=k$, on a des courbes parall à l'ellipse en project, le 2e syst. se compose de cercles tang. la sphère touche son enveloppe

$a\sin\varphi\,(x-a\cos\varphi) - b\cos\varphi\,(y-b\sin\varphi) = 0$

Lorsque le centre de la sphère ne décrit pas une courbe plane on a tang. le cercle tang. lequel la sphère touche l'enveloppe par 1er syst de lignes de courbure. Le 2e syst : traj. orthog. Problème différent. Supp que le centre de sphère décrit une hélice : $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=a\varphi\,\mathrm{tg}\lambda$. Pour avoir le 1er syst de lignes de courbure trouver sphère $(x-a\cos\varphi)^2+(y-a\sin\varphi)^2+(z-a\varphi\,\mathrm{tg}\lambda)^2=R^2$, cherch le cercle tang. lequel la sphère touche son enveloppe

$a\sin\varphi\,(x-a\cos\varphi) - a\cos\varphi\,(y-a\sin\varphi) - a\,\mathrm{tg}\lambda\,(z-a\varphi\,\mathrm{tg}\lambda) = 0$

Ce plan coupe la sphère suiv. ligne de courbure. Les traj. orthog sont le second syst de lignes de courbure. On a pour elles

$$\frac{dx}{a\sin\varphi} = \frac{dy}{-a\cos\varphi} = \frac{dz}{-a\,\mathrm{tg}\lambda}$$

. Il faut élim φ entre les équat.

Ces lignes de courbure seront des hélices, car le plan fait un angle constant avec oz. Lignes asymptot et lignes de courbure

Conoïde droit, génératr parall au plan xoy. $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$,

$$z=f(\omega),\quad \frac{dz}{d\rho}=p\frac{dx}{d\rho}+q\frac{dy}{d\rho},\quad \frac{dz}{d\omega}=p\frac{dx}{d\omega}+q\frac{dy}{d\omega}$$

Conoïde $y=kx$, $z=k'$. Donne $0=p\cos\omega+q\sin\omega$, $\frac{f'(\omega)}{\rho}=-p\sin\omega+q\cos\omega$

On a $A\,d\rho^2+2B\,d\rho\,d\omega+C\,d\omega^2=0$. $A=p\frac{d^2x}{d\rho^2}+q\frac{d^2y}{d\rho^2}-\frac{d^2z}{d\rho^2}$,

$$B=p\frac{d^2x}{d\rho\,d\omega}+q\frac{d^2y}{d\rho\,d\omega}-\frac{d^2z}{d\rho\,d\omega},\qquad C=p\frac{d^2x}{d\omega^2}+q\frac{d^2y}{d\omega^2}-\frac{d^2z}{d\omega^2}.$$

Ici $A=0$, on doit avoir $d\omega=0$, $\omega=c$, les génér. sont des lign asympt

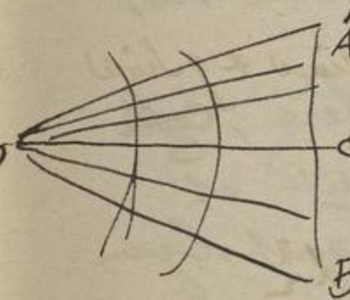
$B=-p\sin\omega+q\cos\omega-0=\frac{f'}{\rho}$, $C=-\rho(p\cos\omega+q\sin\omega)-f''=-f''$.

L'éq. des lignes asympt est $\int d\omega\,[2f'\frac{d\rho}{\rho}-f''\,d\omega]=0$, $d\omega=0$ donne génér.

$2\frac{d\rho}{\rho}=\frac{f''d\omega}{f'}$, $\mathrm{Log}\,\rho^2=\mathrm{Log}\,f'+\mathrm{Log}\,k^2$, $\rho=k\sqrt{f'(\omega)}$, $\rho=k\sqrt{\frac{dz}{d\omega}}$, elles sont algébriques, si l'éq. du conoïde est elle-même algébrique

Si on proj. sur xoy les lignes asympt., on a $\rho=k\sqrt{\frac{dz}{d\omega}}$, courbe homothét par rapp à l'origine. Cela était facile à prévoir. Si on considè surf réglées et qu'une génér. ~~ne peut~~ fasse passer par les 3 génér. un hyperboloïde. Si 2 génér. se confond, l'hyperbol tend vers l'hyperb osculatrice le long de la génératr G ; le long de cette génér. les rayons de courbure sont les mêmes ; en chacun des points le plan tg et l'indicatrice sont les mêmes. Les asympt. de l'indicatr sont les génératr. L'hyperb osculat est l'ensemble des 2 asympt de l'indicatrice ; G est une des

asympt d— l'indice, l'autre est la génér. du second syst de l'Hyperb
osculateur. L'hyperb. osculateur, dans le cas du conoïde droit, est un
paraboloïde droit ; les 2 génér. sont paral au plan directeur du conoïde
Une des génér. du 2e syst. sera directrice du conoïde, 3 génér. du conoïde la
rencontrent La parabole passant par 3 génér. admettra oz comme génér. du 2e syst.
Les plans projetant les génér. du 2e syst perp au plan direct seront paral
au 2e plan directeur. Une des génér. du 2e syst du parabol osculat se projette
parallèle à la trace du 2e plan directeur ; c'est la tg à la proj. de la
ligne asymptotique. Sur les différ. points de la génératrice les tang seront paral
entre elles, toutes les génér. seront tournés par rapp à O.
Consid comme cas particul du conoïd— la surface d— vis à filet carré
$z = \alpha\omega$, $\rho = K\sqrt{\alpha} = \text{const}$. Les lignes asympt se projett suiv. des Circonf
ce sont des hélices. De même conoïd— droit à base circulaire
Sur les lignes de Courbure $\frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dm} = \frac{dz}{dn}$, l, m, n Cosinus direct
de la normale En élém. d— la ligne de courb—, 2 points x, y, z,
$x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. on mène les normales aux deux extrémités. Elles font
partie de la normale qui a pour directrice une ligne de Courbure ; R rayon de
courbure. on a $dz = R\,dn$, $dx = R\,dl$, $dy = R\,dm$. Cherch dl, dm, dn.
On a $p = -f'\sin\omega$, $q = f'\cos\omega$, $l = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $m = \frac{q}{\sqrt{\ }}$, $n = \frac{-1}{\sqrt{\ }}$
$1+p^2+q^2 = \frac{1}{\rho^2}(\rho^2+f'^2)$, $l = -\frac{f'\sin\omega}{\sqrt{\rho^2+f'^2}}$, $m = \frac{f'\cos\omega}{\sqrt{\ }}$, $n = \frac{-\rho}{\sqrt{\ }}$



Cas particul : conoïd— droit à base circulair ; il y a 4 élém. d—
Le long de OC le plan tang est paral au plan directeur
Revenons aux lignes de courbure du conoïde on a des génér
qui sont lignes d— courbure La construct des lignes asympt. montre
que les 2 génér. sont des lignes de courbure du même syst
Parcourons variée ω de OC jusqu'à OA , $f'(0) = 0$, $\rho = 0$. On a
une branche asympt à OA. on peut se demander si cette courb— a des
points d'inflexion ; pour cela il faut que le plan osculat devienne
perpend. Or le plan osculat est ici le plan tang à la surf, que le
rayon d— courbure = rayon de courb de sect normale × Cos δ. Le rayon d— courbure
de sect norm est ∞. Le plan osc d— conf avec plan tang qui
n'est perp au plan direct que le long de OA Les lignes de courbure
sont des lignes convergentes en O et admettant OA pour asympt.
En un une des lignes asympt est la génér., mt est la direct de
l'autre. Alors les lignes d— courb sont les trajectoires et on voit
facilem que les 4 génératr— appartiennent au même système.
Par le calcul : $z = f(\omega)$, $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $\frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dm} = \frac{dz}{dn} = R$
$0 = p\cos\omega + q\sin\omega$, $\frac{f'}{\rho} = -p\sin\omega + q\cos\omega$, $p = -\frac{f'\sin\omega}{\rho}$, $q = \frac{f'\cos\omega}{\rho}$
$l = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $m = \frac{q}{\sqrt{\ }}$, $n = \frac{-1}{\sqrt{\ }}$, $1+p^2+q^2 = \frac{\rho^2+f'^2}{\rho^2}$
$l = -\frac{f'\sin\omega}{\sqrt{\rho^2+f'^2}} = -h\sin\omega$, $m = \frac{f'\cos\omega}{\sqrt{\ }} = h\cos\omega$ en pos. $h = \frac{f'}{\sqrt{\ }}$

$dx = R\,dl$, $dy = R\,dn - d\rho\cos\omega - \rho\,d\omega\sin\omega = R(-dh\sin\omega - h\,d\omega\cos\omega)$

$d\rho\sin\omega + \rho\,d\omega\cos\omega = R(dh\cos\omega - h\,d\omega\sin\omega)$.

$d\rho = \cancel{-hR\,d\omega}\; R(-h\,d\omega) = -hR\,d\omega$. $\rho\,d\omega = R\,dh$.

$\rho\dfrac{d\omega}{d\rho} = -\dfrac{dh}{h\,d\omega}\cancel{d\omega}$, $\rho\dfrac{d\omega^2}{d\rho} = -\dfrac{dh}{h}$, $\dfrac{dh}{h} = \dfrac{f''\cancel{d}d\omega}{f'} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho\,d\rho + f''\,d\omega}{\rho^2+f'^2}$

$\mathrm{Log}\,h = \mathrm{Log}\,f' - \frac{1}{2}\mathrm{Log}(\rho^2+f'^2)$. on a aussi les éq. diff. des lignes de courbure

$\rho\,d\omega^2 + d\rho\,\dfrac{dh}{h} = 0$, $\rho\,d\omega^2 + \left(\dfrac{f''}{f'} - \dfrac{f'f''}{\rho^2+f'^2}\right)d\rho\,d\omega - \dfrac{\rho^2\,d\rho^2}{\rho^2+f'^2} = 0$

$\rho f'(\rho^2+f'^2)\,d\omega^2 + \rho^2 f''\,d\rho\,d\omega - \rho f'\,d\rho^2 = 0$, éq. diff. des lig. de courbure

Les rac en $\dfrac{d\rho}{d\omega}$ sont de signes contraires : L'un des syst correspond à la rac +, l'autre à la rac −. — Le long de OC on a $f' = 0$, $d\rho\,d\omega = 0$, $\omega = c'$ est la ligne OC $d\rho = 0$ montre que le 2e syst coupe orthogonalement le 1er. — Le long de OA, $f' = \infty$, f'' est inf. aux mais si f' est du 1er ordre, f'' est du 2ème. Il ne faut garder que le terme en f'^3, et on a $d\omega^2 = 0$, ce qui donne OA pour l'une des lig, et l'autre montre que les lignes du second syst sont tang à OA.

Faisons varier ω de OC à OA : la rac pour $\dfrac{d\rho}{d\omega}$ correspond aux lignes de courbure asympt. à OA et convergentes en O, la rac négat aux lignes de courbure coupant OC orthogonalement, ces lignes de courbure sont en général transcendantes.

A
O
B

Si on considère le conoïde droit circonscrit à une sphère, ~~cette ligne de courbure est algébrique~~ la courbe de contact est algébrique et c'est une ligne de courbure. Sur une sphère toutes les lignes sont lignes de courbure.

Surf. de vis à filet carré. ~~$\rho = f'\omega$, $f' = \alpha$, $f'' = 0$~~

$\rho = \alpha\omega$, $f' = \alpha$, $f'' = 0$. $(\rho^2+\alpha^2)\,d\omega^2 = d\rho^2$, $d\omega = \dfrac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+\alpha^2}}$

on intègre la courbe est une sorte de spirale rappelant la spirale logarithmique

Le paraboloïde droit est un autre exemple, prenons pour axe des z une des génératrices, xoy plan directeur. On a $z = \mathrm{tg}\,\omega$ en faisant un choix convenable $f' = 1 + \mathrm{tg}^2\omega = \dfrac{1}{\cos^2\omega}$, $f'' = \dfrac{2\sin\omega}{\cos^3\omega}$ Les lignes asymptotiques sont $\rho = \sqrt[K]{f'}$

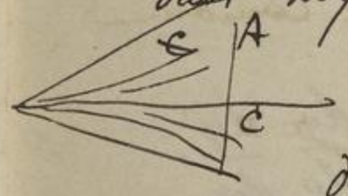
$\rho = \dfrac{K}{\cos\omega}$ droites parall à l'axe des y, Génér. du paraboloïde

Lignes de Courbure : $\dfrac{f}{\cos^2\omega}\left(\rho^2 + \dfrac{1}{\cos^4\omega}\right)d\omega^2 + 2\rho^2\dfrac{\sin\omega}{\cos^3\omega}\,d\rho\,d\omega - \dfrac{f}{\cos^2\omega}\,d\rho^2 = 0$

Ma $\rho^4 \frac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega} + \rho^4 + \frac{\rho^2}{\cos^4\omega}$ sous le radical, en résolvant. Il reste $\frac{\rho^2}{\cos^4\omega} + \frac{\rho^4}{\cos^2\omega}$.

$\frac{d\rho}{d\omega} = \rho^2 \operatorname{tg}\omega \pm \frac{\rho}{\cos\omega}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\omega}+\rho^2} = \rho\,\frac{\sin\omega \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2\omega}+\rho^2}}{\cos\omega}$, procédé peu avantageux

Sur un plan parall à xy, conoïde droit à base circul, centre dans xoy, plan parel à oz. OB, OC forment contour apparent. On a 2 plans de symétrie



Quant aux lignes de courbure on a ici sous réglée non développable. Les lignes asympt ne sont pas tang aux lignes de courbure. Cette surf admet 4 génératrices sing. lesquelles le param de distribution est 0 ou ∞. Le long des génér. OC, OB, la surf présente un élém. de surf développable.

$\text{param de distr} = \frac{\text{plus courte dist de 2 génér.}}{\text{leur angle}}$. L'angle étant du 2e ordre, plus courte dist du 1er. En OB et OC on a élém. de surf dével. De même en OA. Ici sur le cercle directeur un point infi. voisin de B, l'angle de 2 génér. sera du 1er ordre, plus courte dist 2e. Si on coupe OB, elle est elle-même ligne de courb. En chacun de ses points, l'indicatrice se réduit à 2 parall à la génératrice, lieu des asymptotes et la génér. elle-même. Ces 4 génér. sont des lignes de courbure. OC est coupée orthogonalement par les lignes de courbure du 2e syst. OA appart au 1er syst, OA est asympt; OB, OC coupent orthog. OA.

Exercices. $\int_{-1}^{+1} \frac{x^4+1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}\,dx$. — Aire totale de la podaire de l'ellipse par rapp au centre. — Courbes qui doivent présenter les courb du 3e degré pour que l'aire s'exprime par un arc d'ellipse.

Relat entre les rayons de courbure principaux d'un elliptoïde de révolut ou de l'hélicoïde réglé.

Pour chercher le rayon de courbure en un point on mène une section plane parallèle au plan tang et passant par le centre. Les rayons de courbure sont proport à a^3b et ab^3, a et b étant les axes de la section. L'un des ray. de courbure varie proportionnellement au cube de l'autre, si le point M se déplace sur une ligne de courbure.

Hélicoïde réglé. Cherch relat le long d'une génératrice:

$x = a\cos\omega - \rho\sin\omega \qquad y = a\sin\omega + \rho\cos\omega \qquad z = \alpha\omega + \beta\rho.$

ρ est la dist du point pris sur la génér. au pied de la plus courte distance. On sait d'avance que la relat ne dépend pas de ω. Donc on peut faire $\omega = 0$. Calculons p, q, r, s, t.

$\frac{dx}{d\rho} = 0, \quad \frac{dy}{d\rho} = 1, \quad \frac{dz}{d\rho} = \beta; \quad \frac{dx}{d\omega} = -\rho, \quad \frac{dy}{d\omega} = a, \quad \frac{dz}{d\omega} = \alpha.$

$\frac{d^2x}{d\rho^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\rho^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{d\rho^2} = 0, \quad \frac{d^2x}{d\rho\,d\omega} = -1, \quad \frac{d^2y}{d\rho\,d\omega} = 0, \quad \frac{d^2z}{d\rho\,d\omega} = 0$

$\frac{d^2x}{dw^2} = -a$, $\frac{d^2y}{dw^2} = -p$, $\frac{d^2z}{dw^2} = 0$. Calcul de p et q. On a

$\frac{dz}{dp} = p\frac{dx}{dp} + q\frac{dy}{dp}$. , $q = \beta$, $\alpha = -\beta p + \alpha q$, $p = \frac{\alpha\beta - \alpha}{\rho}$ - Soit r, s, t

$\frac{d^2z}{dp^2} = p\frac{d^2x}{dp^2} + q\frac{d^2y}{dp^2} + r\frac{dx^2}{dp^2} + 2s\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dp} + t\frac{dy^2}{dp^2}$.

$\frac{d^2z}{dp\,dw} = p\frac{d^2x}{dp\,dw} + q\frac{d^2y}{dp\,dw} + r\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dx}{dw} + s\left[\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dy}{dw} + \frac{dx}{dw}\cdot\frac{dy}{dp}\right] + t\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dw}$.

$t = 0$, ~~$s =$~~ $0 = -p - s\rho$, $s = -\frac{p}{\rho}$, $0 = -(ap + \rho q) + r\rho^2 + 2as\rho$,

$r\rho^2 = \rho q - ap$, $r = \frac{\rho^2\beta - a(a\beta - \alpha)}{\rho^2}$.

L'éq. qui donne le ray de Courb princ. est (on peut supp w nul pour trouver la relat entre le ray de courbure) :

$(rt - s^2)R^2 + \sqrt{1+p^2+q^2}\left[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqr\right]R + (1+p^2+q^2)^2 = 0$.

$1 + p^2 + q^2 = \frac{(1+\beta^2)\rho^2 + \gamma^2}{\rho^2} = \frac{\delta\rho^2 + \gamma^2}{\rho^2}$, en posant $\alpha\beta - \alpha = \gamma$.

$(1+q^2)r - 2pqs = \frac{(1+\beta^2)(\beta\rho^2 - a\gamma)}{\rho^3} + 2\beta\gamma\frac{\gamma}{\rho^2} = \frac{\beta\delta\rho^2 + \varepsilon}{\rho^2}$

on pose $1 + \beta^2 = \delta$, $2\beta\gamma^2 - a\gamma\delta = \varepsilon$.

$\gamma^2R^2 - \sqrt{\delta^2\rho^2 + \gamma^2}\left(\beta\delta\rho^2 + \varepsilon\right)R + (\delta\rho^2 + \gamma^2)^2 = 0$

$R + R' = \frac{\sqrt{\delta\rho^2 + \gamma^2}\,(\beta\delta\rho^2 + \varepsilon)}{\gamma^2}$, $RR' = \frac{(\delta\rho^2 + \gamma^2)^2}{\gamma^2}$.

Le point central correspond à $\rho = 0$. Si φ est l'angle d'un plan quelc avec ce plan central, $\rho = K\operatorname{tg}\varphi$, K étant propre au param de distribut. Ici $K = \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}}$. Alors $RR' = \frac{\gamma^2(\gamma^2\operatorname{tg}^2\varphi + \gamma^2)^2}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2}{\cos^4\varphi}$.

$\gamma\sqrt{RR'} = \delta\rho^2 + \gamma^2$, $\rho^2 = \frac{\gamma\sqrt{RR'} - \gamma^2}{\delta}$, $\beta\delta\rho^2 = \beta\gamma\sqrt{RR'} - \beta\gamma^2$. Donc

$R + R' = \frac{\sqrt{\gamma}\sqrt[4]{RR'}\left[\beta\gamma\sqrt{RR'} + \varepsilon - \beta\gamma^2\right]}{\gamma^2}$. Si $a = 0$, surf de vis à filet triangle, $\gamma = -\alpha$, $\varepsilon = 2\beta\gamma^2$.

on peut avoir ~~$\beta = 0$, $\delta = 1$~~ (hélicoïde à plan directeur) $\beta = 0$, $\delta = 1$, $\varepsilon = -\alpha\gamma\delta$, $R + R' = 0$ si a est aussi nul

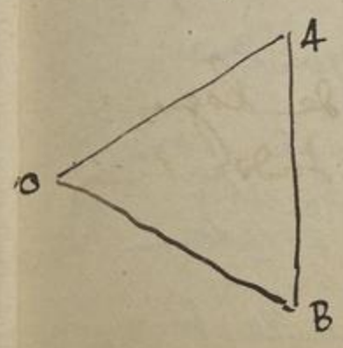
Surf de vis à filet carré $R + R' = 0$. Un des syst de lignes asympt se compose des génér, le 2e syst des hélices tracées sur le cylindre se réduit à une hyperbole équilatère.

Variat. des rayons de courbure pour une surface réglée le long d'une génér. quelconque — Considérons 3 génér. consécutives ; si on les fait tendre vers une d'elles l'hyperbole des 3 droites tend vers l'hyperb. osculatrice. Si on veut étudier le rayon de courbure en un point de l'allogroïde ou de l'hyperboloïde on mène par le centre un plan paral au plan tang. au point considéré. Un des 3 axes est imag pour hyperbole, on aura $\sqrt{-1}$ en numér. et dénom. Les rayons de courbure sont $\frac{b'^3 c'}{abc}$, $\frac{b' c'^3}{abc}$, b', c' axes de la section centrale et a, b, c axes de la surface. Pour étudier la variation, on prend des axes particuliers. Oz parallèle à la génératrice, Xz tang au cône asympt. On a $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dyz = 1$, Le plan central est $x=0$; soit φ l'angle du plan tang avec le plan central. Par Oy un plan paral à la génér. considérée, $x = \rho \sin\varphi$, $y = \rho\cos\varphi$, équat de la section $\rho(A\sin^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi) + 2Dpz\cos\varphi = 1$, éq. qui représ. une hyperbole. Les axes de l'hyperbole s'obtiennent par l'éq. en S. Quand on a $ax^2 + 2bxy = 1$; il faut résoudre $S^2 - aS + b^2 = 0$, S est l'inverse du carré d'un des axes, $S+S' = a$, $SS' = -b^2$. Dans notre équat on ρ et z, on a $SS' = -D^2\cos^2\varphi$, $b'c'$ sera $\frac{K}{\cos\varphi}$. Le produit des rayons de courbure est proport à $\frac{1}{\cos^4\varphi}$, c.à.d. à $b'^4 c'^4$, propriété commune à toutes les surfaces réglées ; on trouve facilement la relation elle-même $S+S' = A\sin^2\varphi + 2B\sin\varphi + C\cos^2\varphi$.

On ne peut pas mener le long d'une génér. quelconque d'une surface un hyperboloïde osculateur. Il faut que le paramètre de distribution passe par un maximum ou un minimum ; pour l'hélicoïde réglé, le param de distr est constant ! Alors l'Hyperb est osculat. à l'hélicoïde pourvu que la génér. soit convenablement choisie. Ici on aurait $B=0$. L'axe des x est axe de symétrie puisqu'il est pour la surface

Pour l'hélicoïde à plan directeur, le cône asymptote doit se réduire à 2 plans ; $S+S' = c\cos^2\varphi$. —

Calculer le volume du conoïde droit à base circulaire : les génér. sont paral à xOy et s'appuient sur Oz et sur le cercle $y^2 + z^2 = R^2$, $x = a$. Le conoïde est $\frac{a^2 y^2}{x^2} + z^2 = R^2$

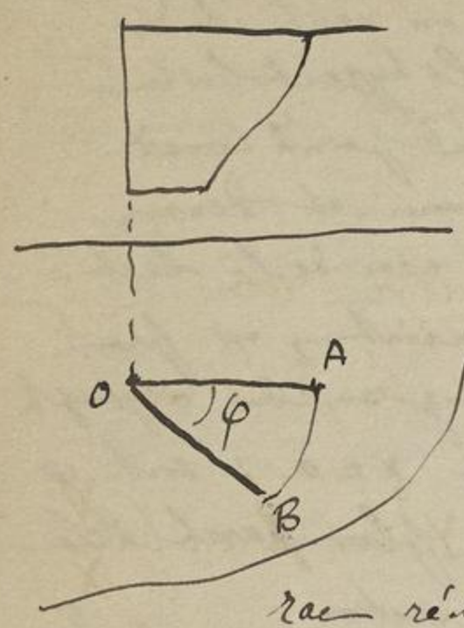


génér. extrêmes se projettent sur OA et OB. On limite la surface au contour apparent OAB.

Surface de vis à filet carré, pas h

On coupe portion limitée par 2 génér. faisant angle φ

et par une hélice tracée sur cylindre de rayon R. Coord projectons : ~~La génér~~
on limite la surf à ce qui est représenté.
Evaluer surface



Aire totale d'une ovale de Cassini à l'aide des intégrales elliptiq complètes.

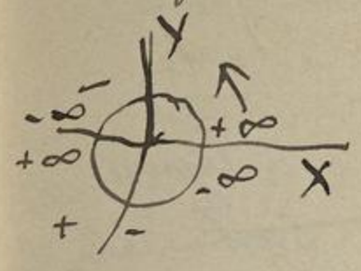
On a vu $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$. Et on a étudié le cas

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(x)\,dx}{\varphi^2+\psi^2}$. $\varphi+\psi\sqrt{-1}=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$,

rac réelles et se séparant mutuellement. Il restait à démontrer
Cette condit suppr qu'on ait $F(x)=0$, F entier ; $F(x)$ est fonct imag
de la variable imag x, $F(x)=X+Y\sqrt{-1}$, Coord. le rapport $\frac{Y}{X}$, et
étudions sa variation. Si $Y=0$, le rapp s'annule ; si $X=0$ rapp infini.
En génér. $\frac{Y}{X}$ change de sig en pass. par l'∞, et cela de 2 manières
soit en pas de $-\infty$ à $+\infty$, ou de $+\infty$ à $-\infty$: soit a le nomb
de fois qu'il pas de $-\infty$ à $+\infty$, quand on décrit contour, et b
de $+$ à $-\infty$. $a-b$ s'appelle l'indice du cycle. Coord 2

cycles ayant une partie commune. ABCD est la réunion de
ABCM et AMCD. Je dis indice ABCD = ind ABCM + indice AMCB.
Car, d'après définit de l'indice, décrir. ABC, soit α le nomb de
fois que $\frac{Y}{X}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$, et β de $+$ à $-\infty$. Décrir. AMC,
soit α' de $-\infty$ à $+\infty$, et β' de $+$ à $-$. Enfin ADC α'' et
β'' de $-\infty$ à $+\infty$ et de $+\infty$ à $-$. Quel est l'indice de ABCD ?
On décrit ABC, on a $\alpha-\beta$, puis CDA en sens inverse on a
$\beta''-\alpha''$; donc indice ABCD $=\alpha-\beta+\beta''-\alpha''$. De même
indice ABCM $=\alpha-\beta+\alpha'-\beta'$, indice AMCD $=\alpha'-\beta'+\beta''-\alpha''$.
Donc indice ABCD = somme des deux autres. Pour évaluer indice
d'un cycles il suffit donc de le décom en cycles infiniment petits et de
faire la somme des indices. Si le cycle n'enveloppe pas de
rac de $F=0$, son indice est nul, car supp que le cycle
ne coupe pas courbe $X=0$, le rapp $\frac{Y}{X}$ ne devient pas ∞,
indice nul ; s'il coupe cette courbe, il ne coupe pas
l'autre $Y=0$, à moins d'être décrit autour du point d'inters
des deux. Or $X=0$, $Y=0$ par leurs inters donnent les rac de $F=0$.

Donc tout cycle infiniment petit qui ne contient pas de racine est nul.
Supposons qu'il contienne une racine, l'indice est 2. Car $X=0$, $Y=0$ ne coupent à l'intérieur du cercle, décrit dans le sens de flèche, on voit qu'on a pour indice 2.



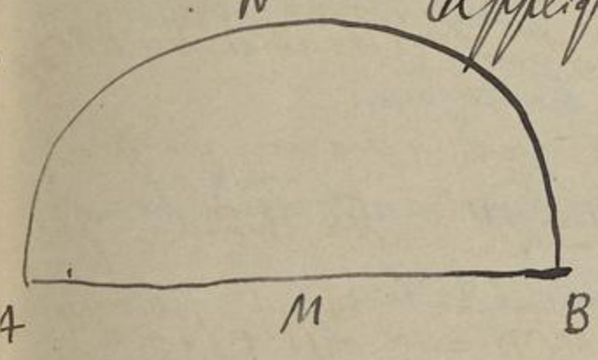
Donc on a $2K$ en tout, K étant le nombre de racines à l'intérieur du cycle donné.

On peut y arriver plus simplement par intégrale imaginaire. On calcule $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F'(x)}{f(x)}\,dx$. Ce résultat est le même que le précédent;

car $\int \frac{F'(x)}{F(x)}\,dx = \mathrm{L}\,F(x) = \mathrm{L}(X+iY) = \mathrm{L}(X^2+Y^2) + i\,\mathrm{arc\,tg}\frac{Y}{X}$,

chacune intégrale définie. La partie $\mathrm{L}(X^2+Y^2)$ revient à la même valeur puisqu'il s'agit ici du L arithmétique quant à arc tg, il a une infinité de valeurs. L'indice du cycle est $a-b$, a $-\infty$ à $+\infty$, b $+\infty$ à $-\infty$ d'une manière continue

Donc $a-b$ $b-a$ exprime le nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ varie de $+\infty$ à $-\infty$ (diminué de celui qu'il passe de $-\infty$ à $+\infty$ par degrés continus. Alors prenons arc tg $\frac{Y}{X}$, quand $\frac{Y}{X}$ varie de $+\infty$ à $-\infty$ continuement arc tg augmente de $-\frac{\pi}{2}$, et quand de $-$ à $+\infty$, il varie de $+\frac{\pi}{2}$. Donc on a indice du cycle multiplié par $\pi\sqrt{-1}$, donc ~~indice~~ ----.



Appliquons cela à $\varphi + \psi\sqrt{-1} = 0$, $\varphi=0$, $\psi=0$. Démontrons que toutes les racines de φ ont partie imaginaire positive.

Soit n le degré de l'équation. Alors il faut démontrer que $2n$ est l'indice du cycle

Le long de AMB, la partie réelle est $X=\varphi$, la partie imaginaire est $Y=\psi$. Quand racine de φ et ψ sont réelles et séparées, combien de fois saute-t-on de $-\infty$ à $+\infty$? n fois; c'est ~~évident~~ facile à constater. Le long de BNA, saute de $-\infty$ à $+\infty$ n fois aussi: supposons le terme le plus élevé de φ Ax^n et celui de ψ Bx^n; puisque rayon très grand les parties réelles l'emportent à leurs premiers termes

on a $(A+iB)x^n$. Posons $x=\rho e^{i\omega}$, et posons $A+iB=Re^{i\theta}$.

on a $(A+iB)x^n = R\rho^n e^{i(n\omega+\theta)}$, $\frac{Y}{X} = \mathrm{tg}(n\omega+\theta)$; on fait

varier ω de 0 à π, alors $\operatorname{tg}(n\omega+\theta)$ varie n fois de $-\infty$ à $+\infty$. Donc on peut trouver le contraire, mais on prend $\varphi-\psi$ alors. Donc on définit bien qu'il y a n rac réelles à l'intér. du contour, elles ont leur partie imag positive. —

$\int \frac{x^2+x+1}{(x^4+x+1)^2}\,dx$. On ne peut résoudre $x^4+x+1=0$ rigoureusement on peut pourtant trouver la partie rationnelle on cherche si ég à des rac multiples, $(x^4+x+1)^2=0$, toutes les rac sont au moins doubles, mais $x^4+x+1=0$ n'a pas de rac multiples on peut appliquer méth des rac égales; mais 4e degré, donc il faut Carré parfait ou rac mult. comment; or pour carré parfait elle serait complète ou bicarrée; par comment, car seules rac-entières possibles $+1$ et -1, et pas de rac fractions donc pas de rac multiples. On en conclut que $\int = \frac{A}{x^4+x+1} + \int \frac{P\,dx}{x^4+x+1}$

A, P polyn du 3e degré au plus. Or P est du 8e inféri. à x^4+x^2+1, et ce dén n'a que rac simples donc pas de partie rationnelle. Il faut 1ère partie Différentiée

$$x^2+x+1 = A'(x^4+x+1) - A(4x^3+1) + P(x^4+x+1)^2$$

$$x^2+x+1 = 4B(x^4+x+1) - A(4x^3+1) \quad ; \quad B \text{ polyn du 2e.}$$

car ~~B et A~~ il faut satisf à l'identité, donc il ne faut pas de termes du 6e ordre. D'ailleurs fonct homogènes,

$$4(x^4+x+1) = (4x^3+1)x + 3x+4 \quad \text{(en supp qu'on ait rendu homog)}$$

c'est une identité, qu'on aurait pu écrire immédiatement. Donc

$$x^2+x+1 = B(3x+4) + (Bx-A)(4x^3+1)$$

$Bx-A$ doit être une const, car B 2e ; $B(3x+4)$, 3e, $(Bx-A)(4x^3+1)$, 8e, donc $Bx-A$ = constante. Pour avoir Const; posons $x=-\frac{4}{3}$ qui annule coeff de B, on aura

$$(Bx-A)\left(1-\frac{256}{27}\right) = \frac{16}{9} - \frac{4}{3} + 1 \quad , \quad -(Bx-A)229 = 39 \, ,$$

$$\therefore \quad Bx-A = -\frac{39}{229} \; ; \text{ on a donc } B = \frac{x^2+x+1+\frac{39}{229}(4x^3+1)}{3x+4} =$$

$B = \frac{1}{229}\,\frac{156x^3+229x^2+229x+268}{3x+4}$, B doit être un polynome

Diviseur $156x^3+229x^2+229x+268$ | $3x+4$

$-\frac{208x^2}{21x^2}$ $\quad \frac{28}{201}$ | $52x^2+7x+67$

$A = \frac{1}{229}\left(52x^3+7x^2+67x+39\right)$. On a donc la partie rationnelle

---

Le choix des limites $-\infty$ et $+\infty$ pourrait simplifier calcul d'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{(x^4+1)\,dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$. Ici on a -1 et $+1$. Cela peut se simplifier

Const $S = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, posons $x = \sin\varphi$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(\sin\varphi)\,d\varphi$

Chang φ en $\pi-\varphi$, $\sin\varphi$ ne change pas . on a donc

$= -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\sin\varphi)\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} F(\sin\varphi)\,d\varphi$. on a donc $S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} F(\sin\varphi)\,d\varphi$

$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} F(\sin\varphi)\,d\varphi$. Posons $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$, on a une fonct rationn de φ : on peut exprimer intégr par somme des résidus dont partie imag est positive en un mot en fonct des coef de F .

Si on pose immédiatem $x = \sin\varphi$, on a $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4\varphi+1}{\sin\varphi-2}\,d\varphi$.

$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$, ~~$\sin\varphi$~~ $\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$, $d\varphi = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16t^4+(1+t^2)^4}{\left[2t-2(1+t^2)\right](1+t^2)^4}\,2\,dt$,

calcul des résidus long , on intégrerait par parties.

Mais plus simplem Divisons x^4+1 par $x-2$, on a

x^4+1 | $x-2$

x^3+2x^2+4x+8 , $S = \int_{-1}^{+1} \frac{(x^3+2x^2+4x+8)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + 17\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$.

17

et $S = \int_0^{2\pi} (\sin^3\varphi + 2\sin^2\varphi + 4\sin\varphi + 8)\,d\varphi + 17\int_{-1}^{+1}$ — | termes marqués donnent Zéro.

$= 18\pi + 17\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi - 2}$. Posons $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$, $d\varphi = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,dt}{2t-2(1+t^2)} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,dt}{t^2-t+1}$, résidu dont partie imag est posit, $t = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$

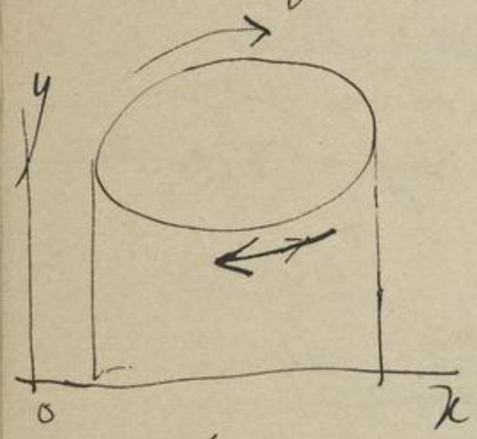
résidu $= \frac{1}{2t-1}$. On a $\frac{1}{\sqrt{-3}}$, et on mult par $2i\pi$, on a donc $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. On a donc $18\pi + 17.\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ pour le double de l'intégrale

donc en définitive $9\pi + 17\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

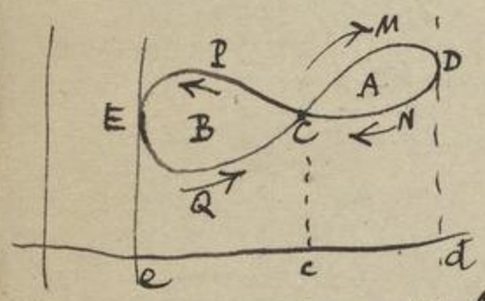
Aire totale de la podaire d'une ellipse.

La podaire a 3 points doubles, elle est unicursale. La podaire d'une ellipse peut être considérée comme la transformée d'une autre ellipse, transformée par rayons vect réciproques. La transformée d'une courbe unicursale est elle-même unicursale. Soit une courbe unicursale $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, la podaire est aussi unicursale. La podaire d'une courbe unicursale est unicursale on obtient l'aire totale d'une courbe unicursale en prenant $\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{dx}{dt} dt$, si la courbe est fermée.

Qu'entend-on par aire totale ?



Si la courbe est fermée et ne prés. pas de point double, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{dx}{dt} dt$ représente l'aire, ou bien l'aire changée de signe, suivant que, lorsque t varie d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient successivement les points de la courbe dans l'ordre des flèches ou en sens contraire.

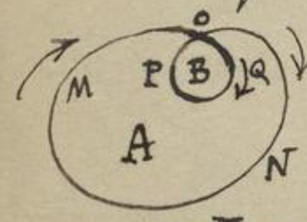


S'il y a un point double à tang. réelles, consid. un mobile qui décrivant la courbe dans l'ordre des flèches et partant de C; il a A à sa droite, B à sa gauche. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{dx}{dt} dt =$

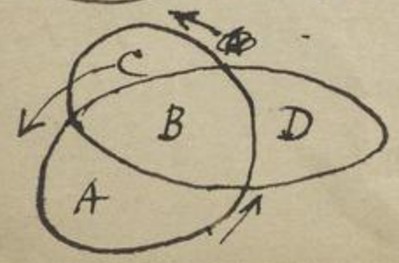
$\int_{CMD} + \int_{DNC} + \int_{CPE} + \int_{EQC} = CMDdc - DNCcd - CPEec + EQCce = A - B$;

ce qu'on appelle aire totale est la différence $A-B$.

Dans le cas du limaçon de Pascal on a 2 courbes de cette forme.

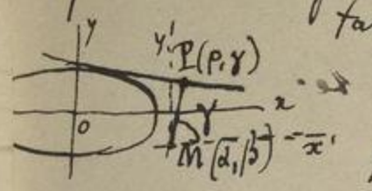


A est à droite du mobile, B à gauche; t variant de $-\infty$ à $+\infty$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} = ONMO + OQPO$, or $A+B = ONMO$, $B = OQPO$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} = A + 2B$.



On en déduira ce que représente l'intégrale dans un cas plus compliqué. Règle de Bonnet : on donne à l'aire de droite un coef plus élevé d'une unité qu'à l'aire de gauche, et donne coef zéro à l'espace illimité. On aura ainsi ici $\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{dx}{dt} dt = -A - C - D - 2B$.

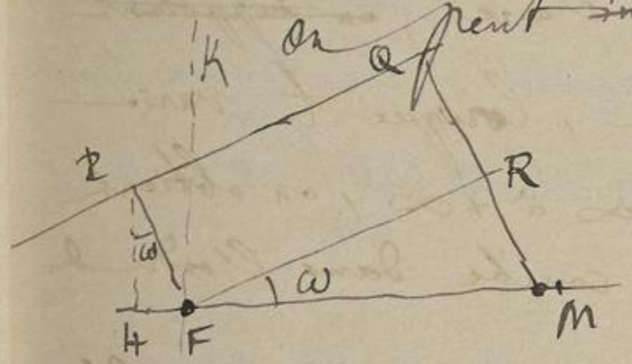
Revenons à l'ellipse $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. Les coord de la podaire s'expriment en fonct de φ et on intègre de 0 à 2π. — Autrement. La condit pour que la droite $ux+vy=w$ soit tang à l'ellipse est $a^2u^2+b^2v^2=w^2$, d'où $w = \sqrt{a^2u^2+b^2v^2}$. Transformées en coord polaires en prenant $M(\alpha,\beta)$ pour pôle et pour axe polaire Mx' paral à Mx l'éq. de la droite sera $x'\cos\gamma + y'\sin\gamma - \rho = 0$, ρ étant MP, et γ son angle avec Mx'. Elle est d'ailleurs $(x'+\alpha)u + (y'+\beta)v = w$, ou $x'u + y'v = w - \alpha u - \beta v$, qui par identificat donne $u = \cos\gamma$, $v = \sin\gamma$, $w - \alpha u - \beta v = \rho$, ou $\rho = -\alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma + \sqrt{a^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma}$. Changeons γ en $\gamma+\pi$, on aura $\rho_1 = \alpha\cos\gamma + \beta\sin\gamma + \sqrt{a^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma}$. L'aire cherchée S est $\int_0^{2\pi} \rho^2 dw$, en appelant dw l'angle de 2 ray. vect. consécutifs de la courbe lieu du point P (c'est ici $d\gamma$).



Aire $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 dw = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}$, or $\int_{\pi}^{2\pi} \rho^2 dw = \int_0^{\pi} \rho_1^2 dw$. Donc $S = \int_0^{\pi} \frac{\rho^2+\rho_1^2}{2} dw$

ρ et ρ_1 sont respectiv. la somme et la différ. de 2 quantités, donc $\rho^2+\rho_1^2$ est 2 fois le carré de l'une plus deux fois le carré de l'autre. Car quand $\rho = \lambda+\mu$, $\rho_1 = \lambda-\mu$, on a $\rho^2+\rho_1^2 = 2\lambda^2 + 2\mu^2$. Donc on a

$S = \int_0^{\pi} \left[(\alpha^2+a^2)\cos^2\omega + 2\alpha\beta\sin\omega\cos\omega + (\beta^2+b^2)\sin^2\omega\right] dw$. Or $2\sin\omega\cos\omega = \sin 2\omega$, dont l'intégrale entre 0 et π est nul. Or $\int_0^{\pi} \cos^2\omega\, dw$ est $\frac{\pi}{2}$, de même pour $\sin^2\omega$. Donc on a $S = \frac{\pi}{2}(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)$. L'artifice a consisté à nous débarasser du radical qui aurait pu nous gêner. On aurait pu autrement, car cette courbe est unicursale, trouver avec la podaire géométriquement.



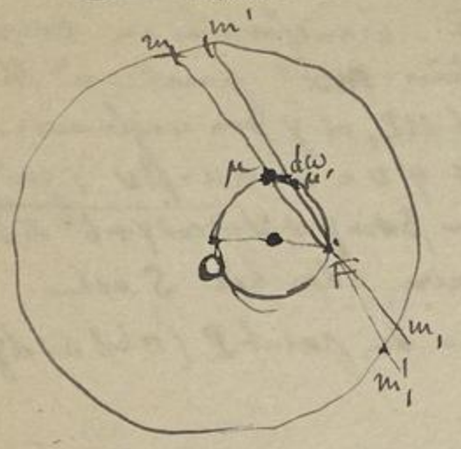
Soit M le point d'où on abaisse perpend sur FR paral à la tang PQ. L'intégr à évaluer est $\int_0^{2\pi} \frac{MQ^2\, dw}{2}$. Donc

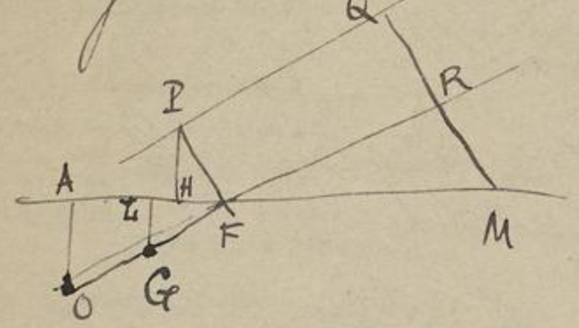
On a $MQ = QR + MR = FP + MR$.

$2S = \int \left(\overline{FP}^2 dw + 2FP.MR + \overline{MR}^2\right) dw$, or $MR = MF\sin\omega$; or MF est constant. Donc $2S = \int \overline{FP}^2 dw + 2FM\int_0^{2\pi} FP\sin\omega\, dw + \int_0^{2\pi} \overline{MR}^2.dw$.

La 1ère est deux fois l'aire totale de la podaire par rapp au foyer, ou cette podaire est cercle principal $2\pi a^2$. La 2e intégrale, c'est 2 fois l'aire du lieu des points K, cercle décrit sur FM comme diamètre ; mais quand ω varie de 0 à 2π, on a 2 fois ce cercle, donc 4 fois l'aire du cercle ou $\pi.FM^2$. Enfin 3e intégrale. De P abaissons PH, $FH = FP\sin\omega$. Supp que sur le cercle lieu des points P on ait une masse telle que l'élém. vu de F sous angle dw ait masse dw ; $\int FH\, dw$ = masse totale 2π, multipliée par dist du centre de gravité à FK. Car FH abscisse du point P, c.à.d. de la masse élément 2π. Reste à trouver ce centre de gravité.

Le Lieu de P est un cercle de centre O. arc élém. mm'. Prolong Fm, Fm' jusqu'en m_1 et m'_1. La masse répartie sur $m_1 m'_1$ est l'angle dw sous lequel on le voit du point F. Leur centre de gravité est ~~le m~~ au milieu. On peut donc ~~mett~~ les remplacer par une masse $\varrho\, dw$ au milieu de $m_1 m'_1$. On a une nouvelle répartition de ces masses sur le lieu des milieux de ces cordes, qui est circonf sur FO ; on a ainsi un arc $\mu\mu'$. Or dw est inscrit dans cette circonf $\mu\mu'$ est proport. à dw, donc la masse est répartie uniformément sur ce cercle, puisqu'elle l'était sur le 1er. Donc le centre de gravité est au milieu de OF. Prenons donc G milieu de OF.





La ϱ intégr est donc $2\pi \cdot FM \cdot FA$

On a d'ailleurs $\overline{OM}^2 = \overline{FM}^2 + 2\,FM \cdot FA + \overline{OF}^2$.

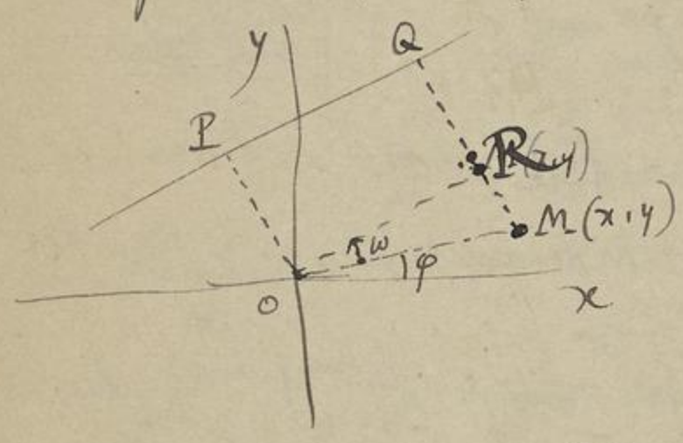
Donc $\overline{FM}^2 + 2\,FM \cdot FA = \overline{OM}^2 - \overline{OF}^2$.

Or $\overline{OF}^2 = c^2 = a^2 - b^2$. Donc $= \overline{OM}^2 + b^2 - a^2$.

Donc $2S = 2a^2 + \pi\,\overline{OM}^2 + \pi(b^2 - \pi a^2$; $S = \frac{\pi}{2}\,\overline{OM}^2 + a^2 - b^2$.

ainsi c'est une constante $+ a^2 - b^2$.

Cette propr est commune à toutes les podaires des courbes fermées, quelles que soient ces courbes. Prenons M, soit PQ une de ses tang à la courbe fermée. On trouve pour l'aire totale $2S = \int_0^{2\pi} \overline{OP}^2 \cdot dw + 2OM \int_0^{2\pi} OP \sin w\, dw + \int_0^{2\pi} \overline{MR}^2 \cdot dw$.



La 1re est indépend. de point de M, par conséq de x et y. La 2e : posons $x = OM\cos\varphi$, $y = OM\sin\varphi$. $2S = 2S_0 + 2\,OM\cos\varphi \int_0^{2\pi} OP \sin\theta\, d\theta - 2\,OM \sin\varphi \int_0^{2\pi} OP\cos\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} \overline{MR}^2 \cdot dw$,

en posant $w + \varphi = \theta$, d'où $dw = \theta - \varphi$. La dernière est 4 fois le ° cercle OM, donc $\pi \cdot \overline{OM}^2$. Les 2 intég intermédiaires sont indépend. de x et y, appelons-les X et Y. On a alors $2S = 2S_0 + 2x\,X - 2y\,Y + \pi\cdot(x^2+y^2)$.

Supposons que nous donnions à cette aire une val déterm et cherchons le lieu des points $M(x,y)$. Alors S étant constant, cette éq représente des cercles concentr prenons pour origine le centre commun de ces cercles, X et Y s'annuleront, et il reste $S = S_0 + \frac{\pi}{2}(\overline{OM}^2$.

On voit - à l'analogie de cette expression avec celle relative à l'ellipse

Cette formule permettait de prévoir le résultat de l'ellipse. Soit réciproque pour l'ellipse, le point O est son centre. Cherch val de S pour un de ses points M, par ex pour le foyer. On a $\pi a^2 = S_0 + \frac{\pi}{2} \overline{OM}^2 = S_0 + \frac{\pi}{2}(a^2 - b^2)$, car O est alors centre. Donc $S_0 = \frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$, et par rapp à un point quelc $S = \frac{\pi}{2}(a^2+b^2+\overline{OM}^2)$.

Cette formule est applicable à l'ellipse et à une infin d'autres courbes même non fermées. Le seul changem c'est qu'on n'a plus $\int_0^{2\pi} \overline{OM}^2 d\omega$, mais $\int$ entre 2 lim déterm et on n'a plus qu'une portion du cercle $\pi \overline{OM}^2$.

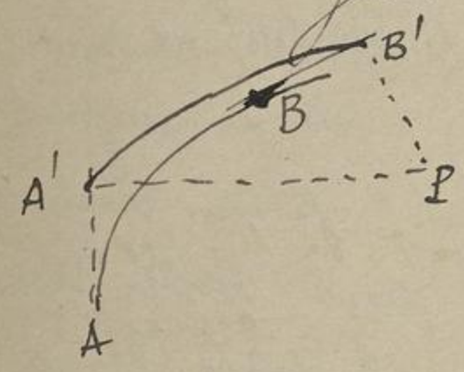
Nous verrons pour l'hyperbole, et la podaire pour un arc déterminé de l'ellipse.

Calculer volum du solide commun à sphère $x^2+y^2+z^2=1$ et cylindre $x^2+y^2 = x$. Calculer aussi portion de surf du cylindre intérieure à sphère et port de surf de sphère intérieure à cylindre.

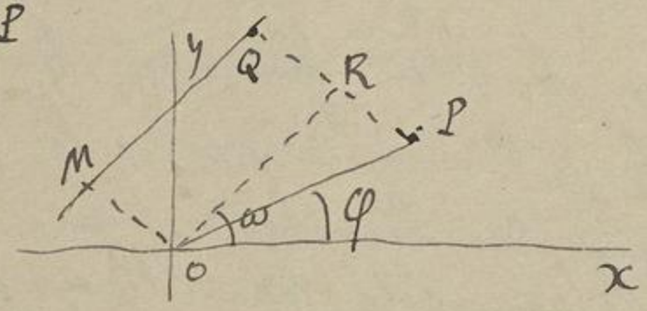
Lq différent $\frac{dy}{dx}(x^2-y^2) = 2xy$.

Intég définie $\int_0^\infty \frac{t^{2p}\,dt}{1+t^{2n}}$ (quelque analogie avec une intégrale déjà vue), n entier $>$ fraction ou incommensurable.

Généralités. Les résultats vus sur podaire



Courbe AB. Podaire de P est A'B'. On cherche variat d'aire S mixtiligne PA'B'.



Tang MQ. De O et de P des perpend. On a

$x = OP\cos\varphi$, $y = OP\sin\varphi$.

Aire de la podaire est

$$2S = \int \overline{PQ}^2 \cdot d\omega = \int \overline{OM}^2 \cdot d\omega + 2\overline{OP}\int OM \sin(\omega-\varphi)\,d\omega + \overline{OP}^2 \int \sin^2(\omega-\varphi)\,d\omega$$

entre ω_0 et ω_1, ω_0 angle de tang en A avec Ox, ω_1 angle de tang en B.

ou $2S = 2S_0 + 2x\int OM\cos\omega\,d\omega - 2y\int OM\sin\omega\,d\omega + \overline{OP}^2\int\frac{d\omega}{2} - \overline{OP}^2\int\frac{\cos 2(\omega-\varphi)}{2}d\omega$

S_0 aire de podaire par rapp à O ; pour la dernière, on a $\sin^2(\omega-\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2(\omega-\varphi)}{2}$; $\overline{OP}^2\int\frac{d\omega}{2} = \overline{OP}^2\,\frac{\omega_1-\omega_0}{2}$; $\int\frac{\cos 2(\omega-\varphi)}{2}d\omega = \int\frac{\sin 2\omega\cos 2\varphi}{4} + \frac{\cos 2\omega\sin 2\varphi}{4}$

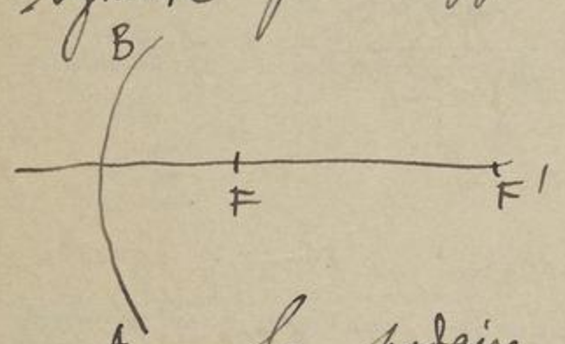
Donc on a $-\frac{\overline{OP}^2}{4}\cos 2\varphi\,(\sin 2\omega_1 - \sin 2\omega_0) + \frac{\overline{OP}^2\sin 2\varphi}{4}(\cos 2\omega_1 - \cos 2\omega_0)$. Or

$\overline{OP}^2 = x^2+y^2$, $\overline{OP}^2 \cos 2\varphi = x^2-y^2$, $\overline{OP}^2 \sin 2\varphi = 2xy$. On a donc pour $2S$ un polyn du second degré en x et y. Donc si on considère points P pour lesq S est constante, le lieu de ces points est une Conique. Ces coniq sont homothét car termes du second degré ne dépendent que de $\omega_1 + \omega_0$, puisqu'on a

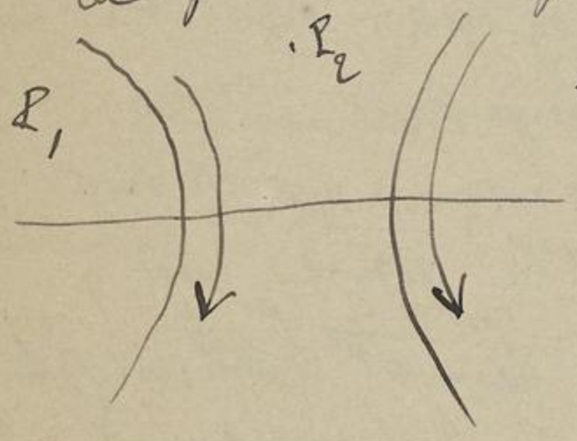
$$(x^2+y^2)\frac{\omega_1-\omega}{2} - \frac{x^2-y^2}{4}(\sin 2\omega_1 - \sin 2\omega_0) + \frac{xy}{2}(\cos 2\omega_1 - \cos 2\omega_0).$$

Elles sont toutes concentr car peu pour orig le centre de l'une d'elles, on a $\int \overline{OM} \sin\omega\, d\omega = 0$ et $\int \overline{OM} \cos\omega\, d\omega = 0$, et par suite les term en x et y du 1er degré disparaissent.

Exemples. Supp qu'il s'agit d'un arc d'ellipse AB, et soient A et B symét par rapp à ox. Le centre des coniq sera sur ox. En quel point? on sait pour les foyers la val de S, qui est cercle principal. Donc on a le centre. Donc pas de difficulté.

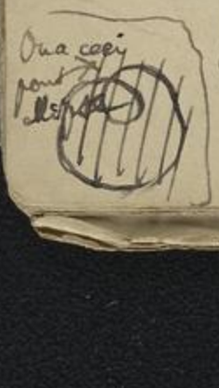


Autre exemple hyperbole, Aire totale de la podaire de l'hyperb $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; podaire par rapp au point α, β. Si on avait ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on aurait $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)$; on serait tenté, pour hyperbole, d'écrire $\frac{\pi}{2}(a^2-b^2+\alpha^2+\beta^2)$; ce serait arrondi. Car quelle est la forme de la podaire de l'hyperbole? Si P à droite, on a courbe fermée (→). Si on a exprimé x et y en fonct de t, faisons varier t de $-\infty$ à $+\infty$, le point mobile décrit une des branches, puis il saute de l'autre côté de l'asympt, et on a les sens des flèches ; et podaire est décrite de gauche à droite ! Aire positive.



Si P en P_1, courbe fermée, mais le point mobile décrivant l'hyperbole le point correspondant décrit podaire dans sens négatif. Donc aire négative, et pour des points égalent du centre, on devrait avoir même aire ; or impossible par la formule plus haut.

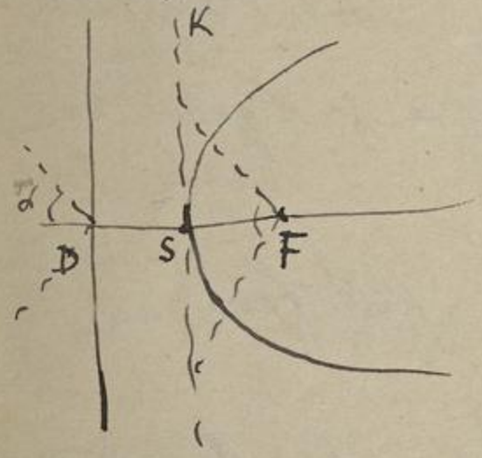
Si nous prenons P_2 entre les 2 branches, on a courbe à point double analogue à (B A) (forme lemniscate). Si P sur ox, axe de symétrie, et axe de symétrie, A et B sont égales. Aire totale A − B = 0



Ce n'est pas possible avec la formule plus haut — Cherch la formule exacte. Soit α l'angle d'une des asympt avec ox, ω varie de α à 0, puis de 0 à $-\alpha$ (quand t va de $-\infty$ à 0), puis de $-\alpha$ à 0 et de 0 à α. Ainsi ω oscille entre α et $-\alpha$ (pour l'ellipse il variait de 0 à 2π). Cornu $2S = 2S_0 + 2x\int \text{OM} \sin\omega\, d\omega - 2y\int \text{OM}\cos\omega\, d\omega + \overline{\text{OI}}^2 \int \sin^2(\omega-\varphi)\, d\omega$. De $-\alpha$ à $+\alpha$, on retrouve mêmes élém. différentiels que de α à $-\alpha$, en signe contr donc $\int \sin^2(\omega-\varphi)\, d\omega$ est nul. Quels sont les points P pour lesquels S est const; ~~ce sont~~ leur lieu se compose de droites parall entre elles, car seulem term du 1er degré. Par symétrie ces droites doivent être parall à un des axes. D'autre part le long de oy aire nulle donc ces droites sont parall à oy; et l'aire est proport à abscisse de P c-à-d de α. Quel est le coef de α? Quand P est en l'un des foyers la podaire est le cercle principal πa^2. Dans ce cas, abscisse $\alpha = \sqrt{a^2+b^2}$. Donc pour le point α, β en gén., on a aire $\dfrac{\pi a^2 \alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$, formule bien différente de celle vue plus haut

On ne peut employer principe de Continuité, car en algèbre les fonct consid sont continues; ici on a intégr définie, fonction de cert paramètres, or elle n'est pas fonct continue de ces paramètres —

Podaire de la parabole. Les pod. de la parab sont courbes à génerat cissoïdale: cissoïde et strophoïde droites ou obliquees. Prenons strophe droite, podaire de parab par rapp au pied de la directrice Tang au sommet SK. Par D, 2 droites sym par rapp à FD faisant angle α avec FD; par F des parallèles on fait varier ω de $\frac{\pi}{2} - \alpha$ à $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Mais pas d'intérêt, il vaut mieux prendre équat en coord polaires $\rho = a\dfrac{\cos 2\omega}{\cos^2\omega}$, d'où $\dfrac{a^2}{2}\int \dfrac{\cos^2 2\omega}{\cos^2\omega}\, d\omega$



or $\cos 2\omega = \dfrac{1+\cos^2\omega}{2}$, $\cos^2 2\omega = \dfrac{\cos^4\omega + 2\cos^2\omega + 1}{4}$

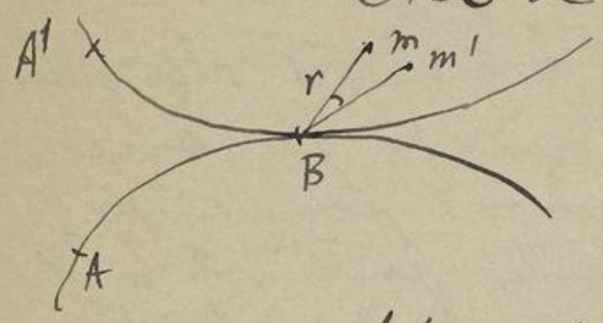
d'où $\dfrac{a^2}{8}\left[\int \cos^2\omega\, d\omega + 2\int d\omega + \int \dfrac{d\omega}{\cos^2\omega}\right]$, la dernière est $\operatorname{tg}\omega$,

la 1ère est $\int \cos^2\omega\, d\omega = \int \dfrac{1+\cos 2\omega}{2}\, d\omega = \dfrac{\omega}{2} + \dfrac{\sin 2\omega}{4}$.

Quelles sont les courbes pour lesquelles l'aire totale de la podaire est const tout le long d'une Droite? Il faut que ω oscille entre 2 limites Données — Sour strophoïde, Comment varie ω? De $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, puis à $\frac{3\pi}{2}$ — On peut mener une tang parall à Direct const

le lieu des points est un cercle. Si on ne peut mener tg parall à toute direct donnée, c'est une droite.

Arc de l'épicycloïde en général. Courbe fixe et courbe mobile en t_0, A étant en contact avec A'; à l'époque t contact en B.

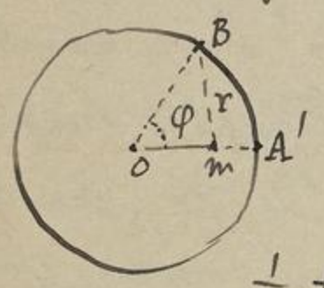


arc AB = arc A'B = s

soit m le point lié à A'B. Entre instant de rotat en B. Au bout de t+dt, m en m'. On veut arc mm'

$= v\,dt = Bm \cdot \widehat{mBm'} = r\,dw$. Donc arc cherché est $\int r\,dw$.

Quelle Relat entre w et s? On sait qu'on a $dw = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, R et R' rayons de courbe en B; donc $\int r\,ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, r est dist de m à B. Quand on donne $s = A'B$, on a ainsi B, et alors on en déduit m qui est fixe par rapp à A'B, donc r est fonct de s. D'ailleurs R et R' sont connus en fonct des arcs des courbes AB et A'B. Cherch à exprimer r en fonct de s. Soit un cercle O mobile, et posons



$Om = a$, et $mOB = \varphi$, on peut supposer l'origine des arcs en A'. Alors $s = R'\varphi$. On a $r = mB = \sqrt{R'^2 + a^2 - 2aR'\cos\varphi}$. Trouver $\int r\,ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$.

$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ est un fact constant, $ds = d\varphi\,R'$. Donc on a

$\left(1 + \frac{R'}{R}\right)\int d\varphi \sqrt{R'^2 + a^2 - 2aR'\cos\varphi}$, intégrale elliptique (pour épicycloïde ordinaire on peut intégrer). Ici on a un arc d'ellipse, quand on a épicycl allongée ou raccourcie. Il vient

$\left(1 + \frac{R'}{R}\right)\int d\varphi \sqrt{(R'-a)^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + (R'+a)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$. Si on fait faire au cercle mobile un tour complet φ varie de 0 à 2π, $\frac{\varphi}{2}$ de 0 à π. On obtient $\int \frac{d\varphi}{2} \sqrt{(R'-a)^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + (R'+a)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ mesuré de l'arc d'ellipse, et l'intégrale complète est la longueur de l'arc d'ellipse dont axes sont $R'-a$ et $R'+a$. Car sous $\frac{\varphi}{2} = \theta$, on a

$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\quad}\,d\theta$, $\int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\quad} = 2\int_0^{\pi} d\theta \sqrt{\quad} = 2\frac{I}{2} = I$.

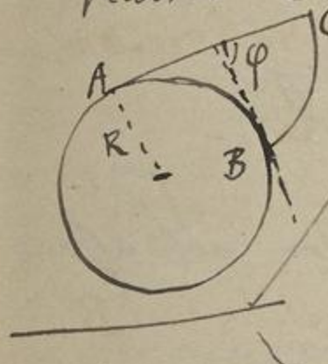
Donc on a $\left(1 + \frac{R'}{R}\right) I$. — Suppr maintenant une épicycl ordinaire

on a Demi-grand axe $2R'$, petit axe nul — Aire ellipse indéf aplatie,
on a $8R'\left(1+\frac{R'}{R}\right)$, dist la long totale entre 2 points de rebroussement
Cas B part de A' pour y revenir.

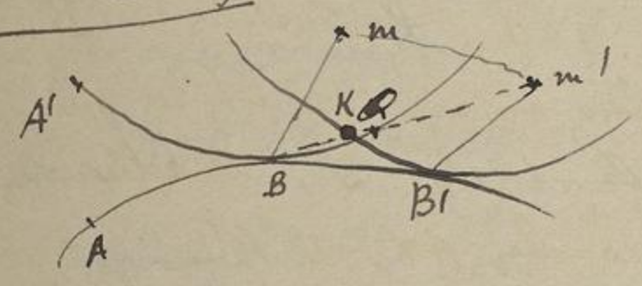
Cycloïde R infini, il reste $8R'$.

Développante de cercle $R'=\infty$. on a $\left(1+\frac{R'}{R}\right)\int\sqrt{(R'=}\,d\varphi$, donc on a $l\infty$, on peut chercher l'autre. Mais il est plus simple de traiter à part : on a $AC=AB=s=R\varphi$, $\text{arc}=\int r\,d\varphi=R\int\varphi\,d\varphi$

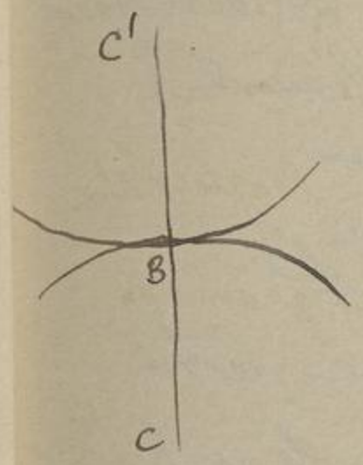
$=R\frac{\varphi^2}{2}$. Telle est la longueur totale de l'arc BC.



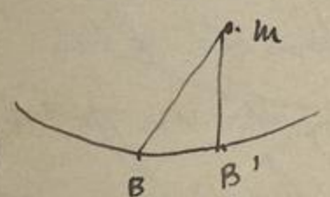
Aire d'une roulette. A et A' points qui étaient en contact à l'Orig des temps. $BA=BA'=s$, B points de contact à l'époque s.
m point entraîné. $mB=r$. ; mB décrit une aire qu'il s'agit de déterminer.



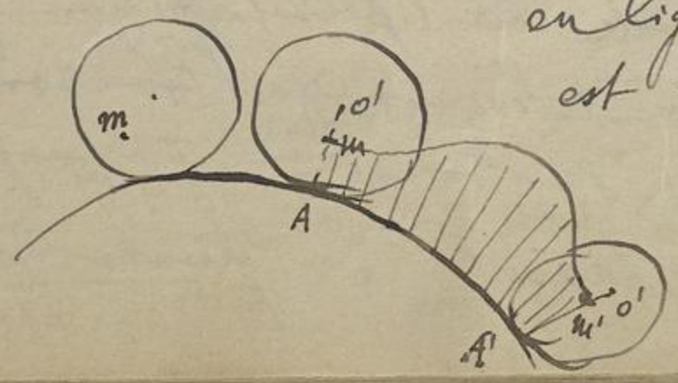
Au bout de $t+dt$, on a B', m'. aire décrite est $mm'BB'$. Cet élém. d'aire se décomp en deux triangles mBm', $m'BB'$. Soit dw l'angle infin petit dont a tourné la figure mobile, dw $=ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$, R et R' doivent être pris avec un signe convenable

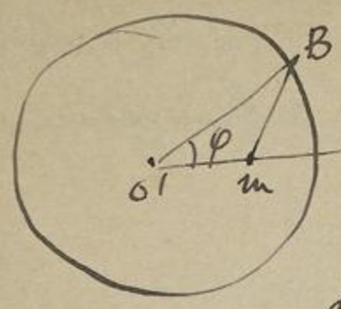


$BC=R$, $BC'=R'$, BC positif si C au-dessous de B, BC' positif si C' au-dessous de B. Sous épicycl, R et R' positifs ; hypocycloïde, R et R' de signe contraires (cercle qui roule intérieurem sur un autre). On a $mBm'=\frac{r^2}{2}dw$. Sous l'autre $m'B$ coupe courbe mobile en K, KBB' inf petit du 2e ordre, on remplace donc $m'BB'$ par $m'KB'$. Le tri. $m'BB'$ est l'élém. de l'aire de la courbe mobile car $m'BB'$ est égal au tri. mBB' de la courbe (2).—



Prenons l'épicycloïde raccourcie, pour voir ce qui arrive alors : supp que à l'orig du temps, O'_1A_1 en ligne droite, tang à traject de m est normale à $O'A$. Evaluons l'aire $mAA'm'$ qui corresp à une révolut complète du cercle mobile





$r = mB = \sqrt{R'^2 + a^2 - 2aR'\cos\varphi}$, $ds = R'\,d\varphi$;

la 1ère aire est $\int \frac{r^2 dw}{2} + \int m'BB'$. Or $\frac{dw}{dt} = \text{const}$,

$dw = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) d\varphi$. Donc $\int r^2 \frac{dw}{2} + \int m'BB' = \int m'BB'$

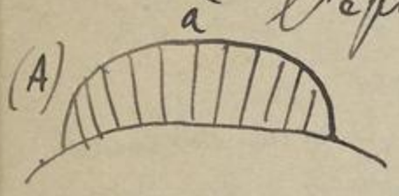
$+ \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2} \left[R'^2 + a^2 - 2aR'\cos\varphi\right]$. La 1ère intégrale est l'aire

de la courbe mobile, c.à.d. $\pi R'^2$. Et l'on a

$= \pi R'^2 + \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \pi (R'^2 + a^2)$, car $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi$ est nul.

Donc $\frac{\pi}{R}\left[RR'^2 + (R+R')(R'^2+a^2)\right]$; en particul. supp. qu'on ait affaire

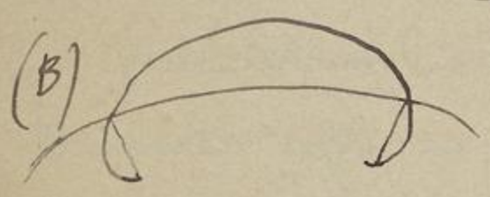
à l'épicycloïde ordinaire (A) : il faut faire $a = R'$. Alors on a



$\frac{\pi R'^2}{R}(3R + 2R')$. Si on a épicycl. allongée, $a > R'$, dans

ce cas, la courbe a la forme (B) ; si on a l'hypocycl.

on change signe de R'.

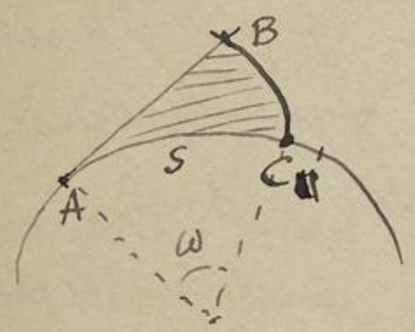


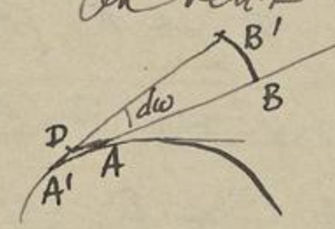
Cas particulier de la développante de cercle,

$R' = \infty$. on ne peut plus faire varier φ de 0 à 2π.

$AC = AB$. C est le point de rebroussem. de la développante.

On rent l'aire ABC. Considérons-en un élément :





$A'ABB' = \underset{\text{1er ordre}}{DBB'} + \underset{\text{2e ordre}}{DAA'}$ ~~(infp)~~ .

Le 1er est ~~$\frac{AB}{2}$~~ $\frac{DB^2}{2} dw = \frac{\overline{AB}^2}{2} dw$

On a $s = AC = AB$, donc aire $= \frac{s^2 dw}{2}$, $s = Rw$. Donc l'élé-

ment est $\frac{R^2}{2} w^2 dw$, et l'aire totale $\frac{R^2}{2}\frac{w^3}{3}$. Cette formule rentre

dans la formule générale de l'épicycloïde

Arc et aire d'ellipse et de limaçon de Pascal. Ellipse est

un cas particul. d'épicycloïde, 2 cercles de rayon double l'un

de l'autre, chq point de C décrit une droite, et un point

(C') (C) en dehors de C' décrit ellipse. On peut appliquer formules, donc

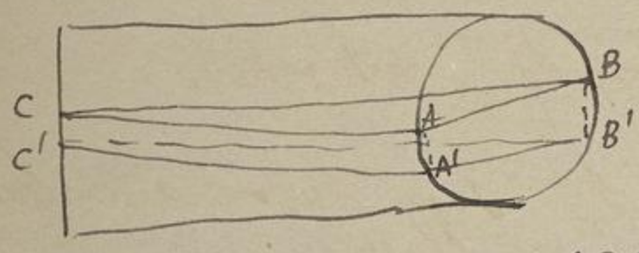
les formules connues — Si au contraire fait rouler C sur les

points de C décrit. Limaçons de Pascal, et les points de son

plan décrivent limaçons de Pascal à point de rebroussem

Donc arc de cimac de Las s'exprime au moyen des fonct elliptiq quand il n'y a pas de points de rebrou et au moyen de fonct logarithl et circulaires s'il y a des points de rebroussem (cardioïde)

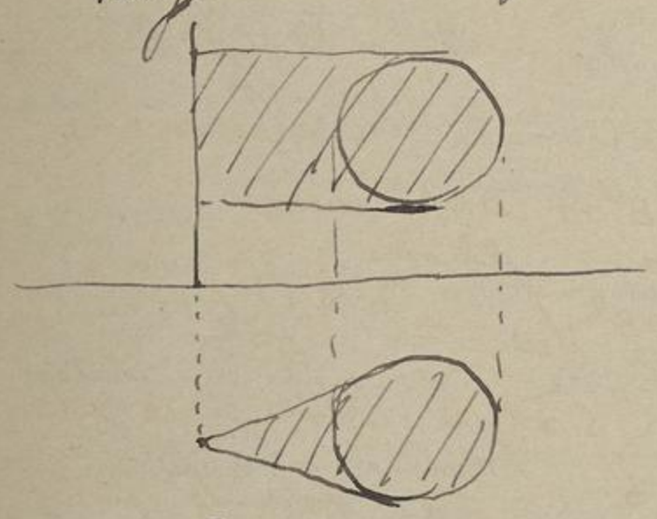
Volume du conoïde droit à base circulaire $\frac{y^2 a^2}{x^2} + z^2 = R^2$, cercle de base $x = a$, $y^2 + z^2 = R^2$. Ce qu'on va dire s'applique à tous les conoïdes limités à une sect plane paral à la directrice



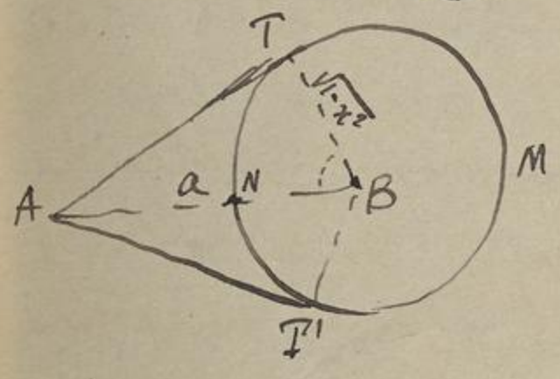
Le vol cherché est sur de base x par mesuré de droit de direct au plan de base

Deux plans inf voisins paral au plan direct Des points A et B des paral à la direct AA_1, BB_1 que déf infin peu de l'élem Cas On a prisme $CABC'A_1B_1$ que déf infin peu de l'élem Cas $CAC'A'A_1$ est du 2e ordre. Or ce prism est $CAB \times AA_1 = AB \cdot \frac{h}{2} \cdot AA_1$. or $AB \cdot AA_1$ est un élém de la surf de la base Donc le problème se ramène à une simple quadrature plane ; dans notre cas particulier, c'est la quadrature d'un cercle

Mais voici un cas moins simple conoïde dont génératrices sont à une sphère. Cours Solide limité à surf de sphère (à droite) et à conoïde. Ce volume dépend des intégr elliptiques. Cours encor 2 plans inf voisins paral au plan directeur à dist du cent de sphère à directr rectl. $\frac{1}{2}$ rayon de sphère pris pour unité. La Droit d'un plan horiz sécant au cent de sphère sera représentée par z.



La sect de ce plan se comp de 2 droites et d'un cercle. $AB = a$, le rayon du cercle est $\sqrt{1-z^2}$; l'aire de cette section est $ABT + ABT' +$ secteur $TMT'B$, ou bien



$\cos NBT = \frac{TB}{AB} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{a}$: le secteur considéré

$\sqrt{a^2-1+z^2}\ \sqrt{1-z^2}$, car carré du rayon du cercle est $1-z^2$. Donc le volume est $\int_{-1}^{+1} S\,dz$, S étant

est $\left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{1-z^2}}{a}\right)(1-z^2)$

la somm des 2 aires qu'on vient d'évaluer On a

$\int_{-1}^{+1} \sqrt{(a^2-1+z^2)(1-z^2)}\,dz$, qui se ramène aux intégr elliptiques complètes ;

$\int_{-1}^{+1} \text{arc cos} \frac{\sqrt{1-z^2}}{a} (1-z^2)\,dz$ se ramène aux intég. d'ordre réduites.

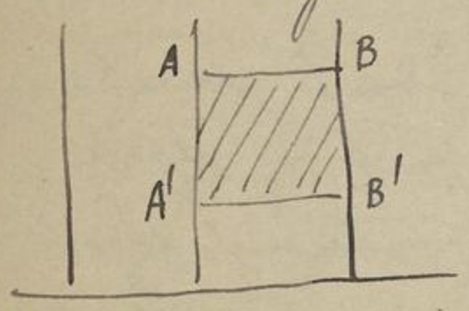
Car on a $= \int_{-1}^{+1} \text{arc cos} \frac{\sqrt{1-z^2}}{a}\, d\left(z - \frac{z^3}{3}\right) =$ en intégrant par parties

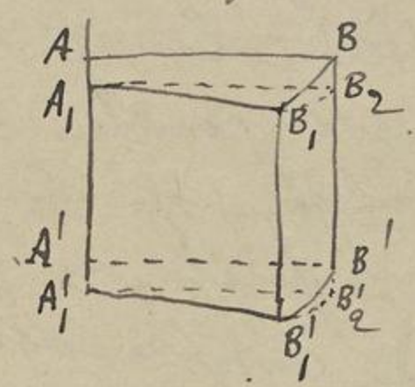
$= \left[\text{arc cos} \frac{\sqrt{1-z^2}}{a} \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{2\,dz}{\sqrt{(a-1+z^2)(1-z^2)}}$.

Car $d\left[\text{arc cos}\sqrt{\frac{1-z^2}{a}}\right] = \frac{d\frac{\sqrt{1-z^2}}{a}}{\sqrt{1-\frac{1-z^2}{a}}}$ ~~$\frac{z}{a\sqrt{1-z^2}}$~~ L'autre intégr

$\int_{-1}^{+} \pi(1-z^2)\,dz$ s'obtient immédiatem

Souvent on ~~a~~ a plus facile le vol. Considéré.
un cylindre parallèle à la directrice rectiligne ; ainsi prenons
cylind de révolut autour de Direct rectiligne et on cherche le
solide commun au cylind et au conoïde par la directrice
rectiligne 2 plans faisant angle dw. Soit 1 dans le tableau
il donne section ABA'B'. L'autre donne ma
sect plane ; compt le vol élém. entre ces 2 plans.



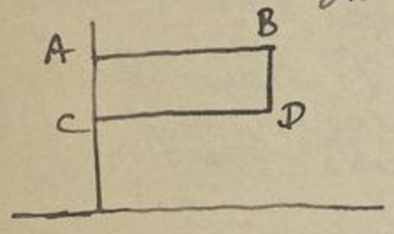


Par A_1 menons A_1B_2 paral à AB ;
puis $A'_1B'_2$ paral à A'B'. Menons
$A_1B_1B_2A'_1B'_1B'_2$ qui diffère infini-
ment peu du volum élément à évaluer
et dont le volum est

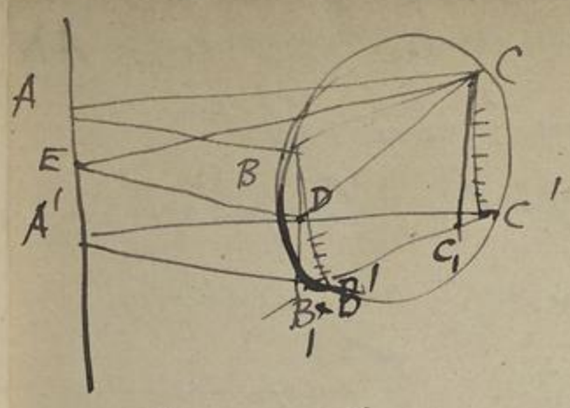
$dw \cdot \frac{\overline{A_1B_1}^2}{2} B_1B'_1$ ou $\frac{A_1B_1}{2} \cdot \overline{B_1BB'B'_1}$, soit $A_1B_1 = R$, on a $\frac{R}{2}$

multiplié par la portion de surf du cylindre comptée au conoïde

Exemple : surf de vis à filet carré. Rectangle ABCD,
AC sur l'axe du mouvement hélicoïdal ; AB et CD
décrivent surf de vis à filet carré ; BD un cylindre
Concentrique une spire entière du mouvem hélicoïdal.



Le volum est $\frac{AB}{2} \times$ surf interceptée par conoïde sur cylindre
ou $\frac{AB}{2} \times$ surf engendrée par BD $= \frac{AB}{2} \cdot 2\pi \cdot BD \cdot AB = \pi \cdot \overline{AB}^2 \cdot BD = \pi \times$ surf.
du rectangle $\times AB$. — Si on prend conoïde oblique résultat analogue
conoïde oblique comté à directrice rectiligne et à sect plane
paral à la directrice sur A et A' plan paral au plan
directeur, voir fig page suivante ; ils coupent suiv. 2 droites

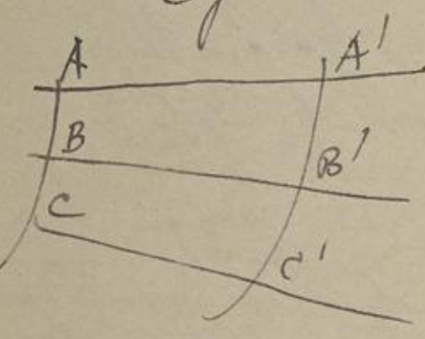


En négligeant le second ordre on voit que le volume est celui du prisme $ABCA'B_1C_1$, dont le volume est sect droite multipliée par arête, donc c'est BB_1 multiplié par sect droite CDE. CD perp à BB_1 et DE perpend à BB_1. On a $\frac{CD}{2} \times - - -$, ou $\frac{1}{2} CD \cdot BB_1$

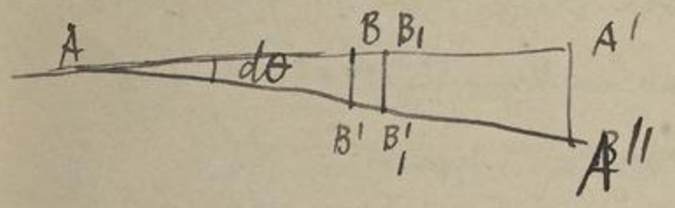
Le vol total sera demi-hauteur multipliée par base totale. —

Surface de ces conoïdes. Surf d'une surf réglée quelconque

Ligne de striction A, B, C points centraux. Courbe quelconque $A'B'C'$. On connaît un fonct de class de ABC les dist AA', BB', CC'. On veut l'aire $AA'B'C'CBA$. Evaluons aire entre 2 génér. infin voisines ; on projette sur un plan parall à 2 gén. infin voisines, A'' est le point inf voisin de A' sur la courbe limitative



Frenon B à dist fixe de A ; φ angle de plan tang avec plan central, K paramde distribution, $x = K \operatorname{tg} \varphi$.

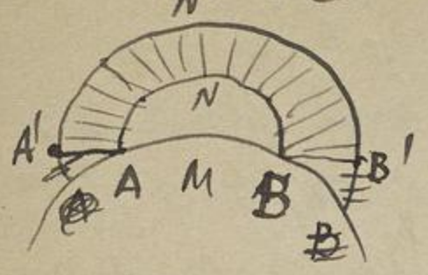


Deux plans inf voisins x, $x+dx$. Comb aire qui se projette suiv. le trapèze $BB_1B'_1B'$, c'est un rectangle car BB_1 et $B'B'_1$ font angle $d\theta$. On a $x\,d\theta\,dx$; l'angle avec plan de proj. est $\frac{\pi}{2} - \varphi$; donc dans l'espace l'aire est $\frac{x\,d\theta\,dx}{\sin\varphi}$, or $dx = K\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, donc

$$K^2 d\theta \frac{\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi \sin\varphi} = \frac{K^2 d\theta\, d\varphi}{\cos^3\varphi}$$, donc l'aire est $K^2 d\theta \int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$

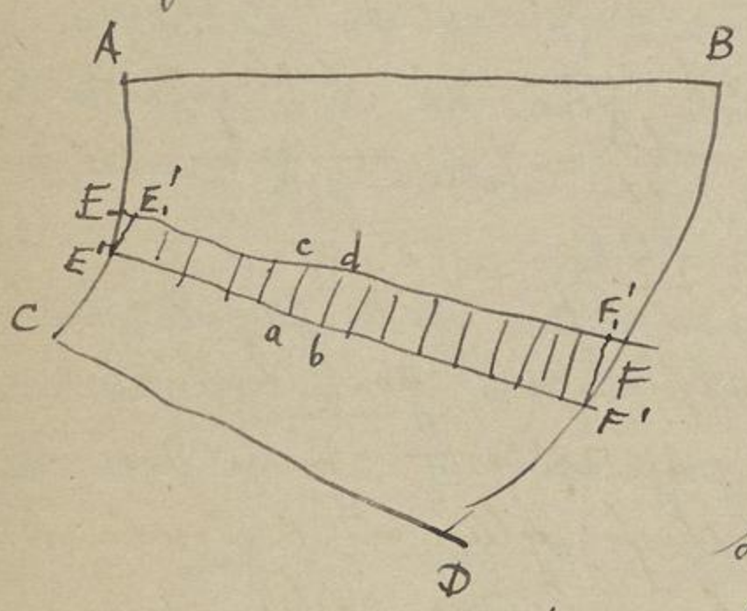
Calculer le solide commun à une sphère et à un ellipsoïde concentrique à cette sphère. Envisager en particul. le cas où la sphère est bitangente à l'ellipsoïde au sommet de l'axe moyen (dans le 1er cas, fonct circul. et logarithm).

Problème qui se ramène en quelque sorte au précéd — On considère sphère $x^2+y^2+z^2=1$, et un cône $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ (centre à l'origine), il détermine sur sphère une conique sphérique ; aire de cette calotte sphérique.

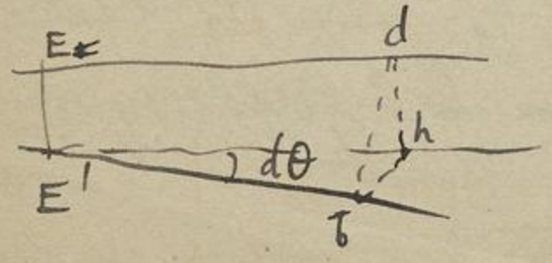


On donne 2 arcs d'un de cercle $\overset{AMB}{,}$ l'autre d'épicycloïde ANB. Aux différ. points de ANB, on mène les normales à l'épicycl., on y porte longueur constante donnée vers l'extérieur, on a une Courbe A'N'B'. ($AA' = BB' = C$). Trouver l'aire annulaire ANBA'N'B'.

Prenons surf réglée $x = at + b$, $y = ct + d$, a, b, c, d fonct de t ; à chaque val de t corresp une génératrice Considérons port de surface limitée à 2 génér. t_0 et t_1, à ligne de striction AC et à courbe donnée BD. Soit E menons la génératr de E. Connaissons les équat qui donnent a, b, c, d en fonct de t, on a le paramètre de distrib en fonct de t, et on conn. aussi $\frac{d\theta}{dt}$, $d\theta$ angle de 2 gén. infiniment voisines. Supposons qu'on connaisse EF en fonct de t, $EF = f(t)$, soit $l = EF$. Valeur de l'aire à évaluer :



prenons E'F' infiniment voisin de EF. Soit aire EE'F'F, soit K le paramètre de distrib. ; on a $l = K \operatorname{tg} \varphi$, en appelant φ angle de plan tang en F avec plan tang en E (c.à.d. avec plan central). Des points de E'F' menons perpendiculaires sur EF ; on a 2 tri. qu'on peut négliger et une infinité de petits quadrilatères abcd, qui diffèrent infiniment peu de rectangles ; car les 2 droites font angles infiniment petits et angles en c et d droits. On a $cd = d\xi$. Si par E, point central, plus courte distance, les pieds sont au 2e ordre en E et E'. Tri. rectangle dθh.



On a $\xi d\theta$ pour un des côtés, et $Kd\theta$ pour l'autre. Donc l'élém. infiniment petit de surf est $d\xi d\theta \sqrt{K^2 + \xi^2}$. L'aire totale entre EF, E'F'

est $\int_0^l d\theta \, d\xi \sqrt{K^2+\xi^2} = d\theta \int_0^l d\xi \sqrt{K^2+\xi^2}$. Soient $\xi = K\eta$, on a

$K^2 d\theta \int_0^{\frac{l}{K}} d\eta \sqrt{1+\eta^2}$; or $\frac{l}{K} = tg\varphi$. D'ailleurs l'int indéfinie

est $\frac{1}{2}\left[\eta\sqrt{1+\eta^2} + L\left(\eta+\sqrt{1+\eta^2}\right)\right]$. Prenons l'intégrale entre 0 et $tg\varphi$, on a

$\frac{1}{2}\left(tg\varphi \sec\varphi + L\left(tg\varphi + \sec\varphi\right)\right] K^2 d\theta$. Donc pour l'aire entre AB, CD, AC, BD,

on a $\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\theta}{dt} dt \, \frac{K^2}{2}\left[tg\varphi \sec\varphi + L\left(tg\varphi + \sec\varphi\right)\right]$. A la dernière séance on

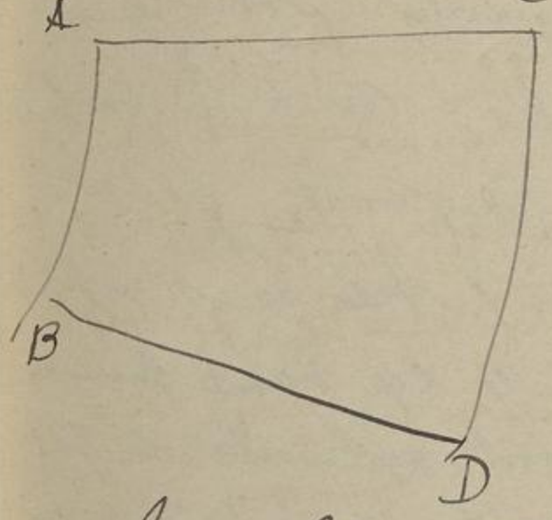
avait $\int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$, ce qui est la même chose, car c'est $\int d\eta \sqrt{1+\eta^2}$, pour $tg\varphi = \eta$.

Cette formule conduit à l'intégration assez longue, à cause du L sous le signe $\int$. — Dans le cas de surf de vis à filet carré limitée par hélice, ligne de strict est l'axe du mouvement hélicoïdal. La surf étant limitée à une hélice, la quantité $\frac{l}{q}$ est une constante, c'est le rayon R du cylindre, K est constant, car c'est la plus courte dist dir. par angle, et si h est le pas, on a $K = \frac{h}{2\pi}$, donc K est connu. Angle φ de la gén. et d'axe avec un plan fixe par axe, donc $\frac{d\theta}{dt} = 1$, il reste ici on a

$\int$ on a $\frac{R}{K} = tg\varphi$, donc $\int \frac{K^2}{2}\left(\frac{R}{K^2}\sqrt{\frac{R^2}{K}+K^2} + L\left(\frac{R}{K} + \sqrt{\frac{R^2+K^2}{K}}\right)\right)$. Cette

formule est même applicable à toutes les surf réglées pour lesquelles K est constant : La surf du quadril curviligne ACDB est donnée par

même formule. Parmi surf réglées où K constant les plus simples sont les hélicoïdes réglés quelconques, alors K repré. non pas $\frac{R}{2\pi}$, mais le paramètre de distribution



On peut obtenir autrement ce résultat : cela conduit à vol limités par surf hélicoïdales et même engendrés par surf hélicoïdales.

Un solide en général, s'évalue par $\iiint dx\,dy\,dz$. Prenons pour coord. les suiv. : Prenons un point dans le plan des xz, soient z et x ses coord, soit ρ sa dist à l'axe du mouvement hélicoïdal projeté en o. A l'origine du mouvement le point dans xz. Soit ξ sa dist au plan des xy au début du mouvement hélicoïdal. Supp xz entrant dans mouvement hélicoïdal d'un angle φ. Les nouv. coord. sont $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ et

$z = \zeta + \alpha\varphi$, α paramètre. Avec les coord sont fonct de ρ, ζ, φ.
on peut faire ce changem de variables dans l'intégrale triple. On a

$$\iiint \frac{\partial(\rho,\zeta,\varphi)}{\partial(x,y,z)}\, d\rho\, d\zeta\, d\varphi$$

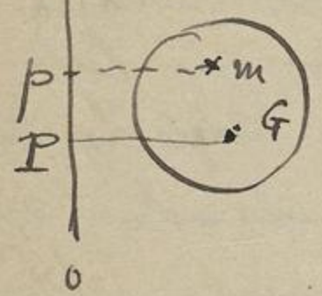
. Evaluons ce déterm fonctionnel, c'est

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$$

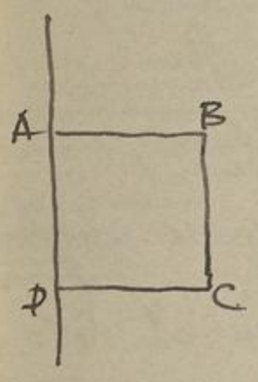
. On a donc

$$\iiint \rho\, d\rho\, d\zeta\, d\varphi$$

. Prenons un solide engendré de la façon suivante : cons. d
dans le plan méridien une aire plane quelconque, oz axe du mouv hélic.
Faisons tourner f de φ, elle s'avance en même
temps dans le sens oz d'une longueur $\alpha\varphi$.
Evaluons le solide ainsi engendré. Quelles sont
les limites de l'intégr. ? Ce sont les posit initiale
et finale de l'aire plane et la surface
engendrée par son contour. On fera varier φ
de 0 à Φ, Φ étant l'amplitude totale du mouvement.
La quant sous signe $\int$ est indép de φ, on a donc
$\Phi \iint \rho\, d\rho\, d\zeta$. Prem élém. inf petit de l'aire plane, c'est
$d\rho\, d\zeta$, sa dist à oz est mp, on a $\int mp.dw$, on a donc
aire totale $A \times GP$, G étant centre de gravité. Ainsi le
théor de Guldin est applicable aux surf hélicoïdales. On a Φ. surf GP,
il faut seulem remplacer chemin parcouru par centre de gravité par
chemin parcouru par sa project sur xoy. Aidé de s'en rendre
compte : prem élém. de surf, faisons le tourner de $d\varphi$ dans le mouvem
hélicoïdal ; on a solide par l'aire dans ses 2 posit. extrêmes et par
surf qui engendre le contour de l'élément. Les 2 plans qui
limitent le solide font angle $d\varphi$; les arcs d'hélice
ont petits décrits par les points a du contour peuvent
être remplacés par droites parallèles ; on a donc surf cylindrique
dont base est l'aire plane et dont génér. paral. aux tang aux
hélices décrites par les points a. Ce cylind a pour mesure la base
× par sa hauteur, or cette hauteur est chemin parcouru par centre de gravité

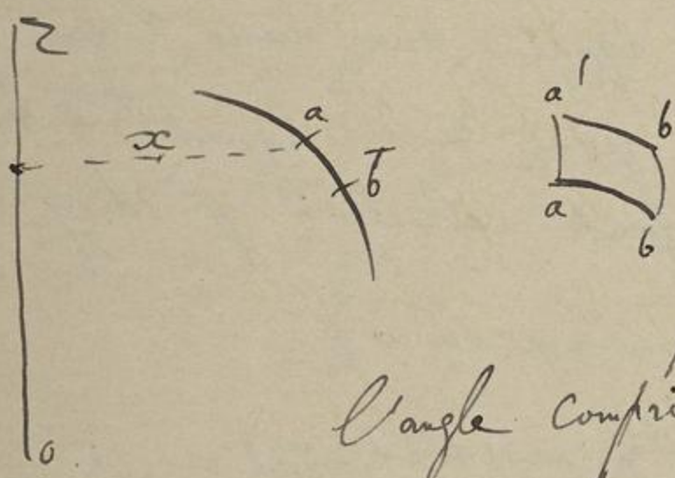


sur xoy. Donc en intégr ces chemins on a expression vue plus haut
Cela s'étend à aire finie : car chemin parcouru par proj. du
centre de grav est proport à dist. d'élément à oz, donc vol. est
aire totale x multiple par proj. du chemin décrit par cent de gravité.

Appliq à surf de vis à filet carré. Soient rectangle ABCD


entour d'un mont hélicoïdal : soit l'angle φ. Chercher vol
le chemin parcouru par proj. du centre de gravité est $\varphi \cdot \frac{AB}{2}$.
Le vol. est donc $\varphi \cdot \frac{\overline{AB}^2 \cdot BD}{2}$.

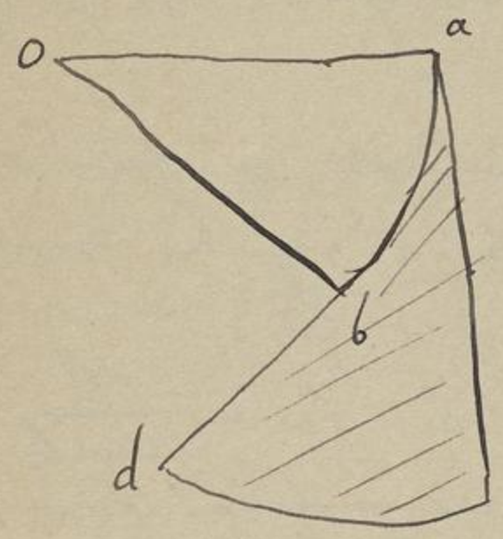
Pour surf de vis à filet triangulaire, on prend aire
du triangle dont du centre de gravité à axe du mouvement
et on les multiplie enfin on multiplie par φ.

Considérons maintenant une surf engendrée par une courbe dans
mouvt hélicoïdal. Soit φ l'amplitude du mouvement. Soient


arc ds = ab. Faisons tourner de dφ, arc ab décrit un élém. de surf, et vient
en a'b', angles de a'b' de ab infiniment petits
et de aa' et bb' aussi, donc c'est un
parallélogr, aire = prod des côtés x sinus de
l'angle compris ; l'un des côtés est ds ; aa' est le chemin
parcouru par a, c'est $d\varphi \sqrt{h^2+x^2}$, en appelant h
le pas de l'hélice, car la proj. de a sur xoy décrit arc de
cercle $x\,d\varphi$, sa proj. sur oz décrit $h\,d\varphi$. On a à évaluer
enfin le sin de l'angle compris. Soit γ l'angle de oz avec
la tang à hélice du point a ; soit θ angle de ab et aa'.
θ angle à évaluer ; on a $\cos\theta = \cos\omega\cos\gamma$, donc
$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\omega\cos^2\gamma}$, l'aire du parall est $ds\,d\varphi\sqrt{(h^2+x^2)(1-\cos^2\omega\cos^2\gamma)}$
on a $\operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{h}$, donc $\sqrt{h^2+x^2} = (1+\operatorname{tg}^2\gamma)h$. On a
$h\,ds\,d\varphi\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)(1-\cos^2\omega\cos^2\gamma)}$, il n'entre plus que γ. On voit
que le théor de Guldin n'est plus applicable parce que aire de ab
dépend de l'angle de ab avec axe

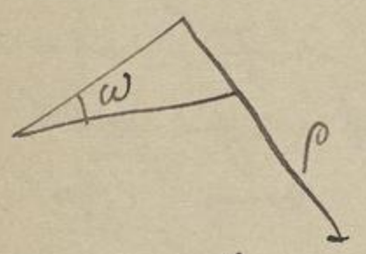
En applq. à surf engendrée par un cercle on est amené aux intégrales elliptiques.

Mais applig. cela à l'hélicoïde réglé. Figurons la projet de surf. sur xoy. trouvons sur les génér. extrêmes une long const. p. On a aire ab, bd, ac, cd. On demande l'aire ombrée. On cherche éq de l'hélicoïde, on transforme en p et ω, on en déduit p et q. On définit une génér. par angle de plus court dist de cette gén. et de l'axe du mont ∧ au xoz, soit ω cet angle soit ρ dist de proj. du point considéré à proj. du point central alors



$$x = a\cos\omega - \rho\sin\omega \quad , \quad y = a\sin\omega + \rho\cos\omega ,$$

$$z = \alpha\omega + \beta\rho$$ (équat vues dans lignes asympt).



Il faudrait éliminer ρ pour avoir équat d'hélic — Mais cela n'est pas nécessaire — Il faut calculer $\int dq$. on a

$$\frac{dz}{d\omega} = \alpha = p\,(a\sin\omega - \rho\cos\omega) + q\,(a\cos\omega - \rho\sin\omega)$$

ou
$$\alpha = a(-p\sin\omega + q\cos\omega) - \rho(p\cos\omega + q\sin\omega).$$

$$\beta = -p\sin\omega + q\cos\omega.$$

On pourrait — tirer $\int dq$ pour avoir $\sqrt{1+p^2+q^2}$. Mais cette quant est indép de ω ; faisons donc ω = a, on a

$$\beta = q \quad , \quad \alpha = aq - \beta p \quad , \quad \text{d'où} \quad p = \frac{a\beta - \alpha}{\rho}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{\frac{(1+\beta^2)\rho^2 + (a\beta-\alpha)^2}{\rho^2}} \cdot \rho .$$ L'aire est $\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$

Il faut calculer le déterm fonctionnel ~~de~~ en ρ et ω,

$$\begin{vmatrix} -\sin\omega & -a\sin\omega - \rho\cos\omega \\ \cos\omega & a\cos\omega - \rho\sin\omega \end{vmatrix}$$, en dév. 1re ligne multipliée par α ρ.

on a $$\iint k\,d\rho\,d\omega\,\frac{\sqrt{(1+\beta^2)\rho^2 + (a\beta-\alpha)^2}}{\rho}$$. Faisons varier ω de

0 à φ_1, ω n'entre pas dans l'expr $\int$ on a donc

$$\varphi \int_0^R d\rho \sqrt{(1+\beta^2)\rho^2 + (q\beta - \alpha)^2}$$. Posons $\sqrt{1+\beta^2}\,\rho = \eta$, on a la

formule vue plus haut $\int d\eta \sqrt{1+\eta^2}$. On avait pu prévoir cela

d'après remarque sur surf Hélicoïdales où K est constant

Compositions demandées à la Licence.

1869

On donne l'équat aux dérivées partielles

$$ax^4 \frac{\partial z}{\partial x} + (x^4 z + ax^3 y - a x^2 y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 2a x^2 y z - 2a^2 y^3$$

quelle est celle des intégr qui se réduit à $z=0$ pour $x=a$?

Linéaire en p et q. On a donc à intégrer

$$\frac{dx}{ax^4} = \frac{dy}{x^4 z + ax^3 y - a x^2 y^2} = \frac{dz}{2a x^2 y z - 2a^2 y^3} = \mathcal{E},$$

On appel $\mathcal{E}$ la val commune des rapports.

Ces équat sont homog. en x et y comme étant du 1er degré et z de degré 0. Le 1er rapport est d'ordre -3, le 2ème -1, enfin de même pour le 3ème. C'est ce qui conduit à poser $y = tx$. On a alors $dx = ax^4 \mathcal{E}$,

$$x\,dt = (x^4 z + a x^4 t - a x^4 t^2)\mathcal{E} - t\,dx = x^4 (z + at - at^2)\mathcal{E} - t\,dx$$

$$= x^4 (z + at - at^2 - at)\mathcal{E} \quad \text{F} \qquad dt = x^3 (z - at^2)\mathcal{E},$$

enfin la dernière est $dz = \mathcal{E}(2a x^3 t z - 2a^2 x^3 t^2) = 2at x^3 \mathcal{E}(z - at^2)$

Donc les équat transformées donnent

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dt}{z - at^2} = \frac{dz}{2at(z - at^2)},$$ la dernière donne

$2at\,dt = dz$, $at^2 = z + K_1$, $z - at^2 = K_1$, la 1ère donne donc $\frac{dx}{ax} = \frac{dt}{K_1}$, $Lx = \frac{at}{K_1} + K_2$. Alors on écrit que K_2 est une fonct arbitr de K_1, c.à.d. de $z - at^2$. au lieu de K_2, mettons $L\varphi K_2 + La$. On a alors

$x = a\, f(z - at^2)\, e^{\frac{at}{z-at^2}}$. Pour $x=a$, $z=0$, (elle doit se réduire à une identité)

$1 = f(-at^2)\, e^{\frac{at}{-at^2}}$, ce qui définit f en fonct de $-at^2$.

En effet, donnons à $-at^2$ la val k_1, on a

$at = \sqrt{-a k_1}$, donc $f(k_1) e^{\sqrt{-\frac{a}{k_1}}} = 1$, $f(k_1) = e^{-\sqrt{-\frac{a}{k_1}}}$,

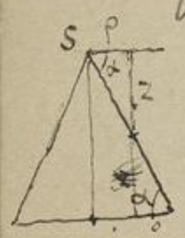
$x = a\, e^{\frac{at}{z-at^2} - \sqrt{\frac{-a}{z-at^2}}}$.

On consid un Cône de révolut — trouver les courbes sur ce cône telles que le plan osculat soit normal à surf

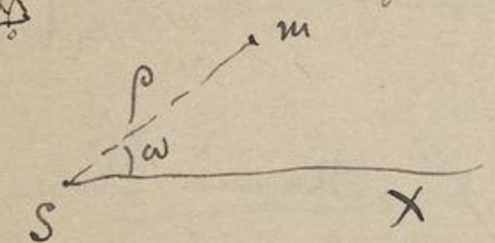
Project sur plan perp à axe

Les courbes tracées sur surf telles que plan osculateur normal à surf sont les lignes géodés. : ce sont le plus court chemin d'un point à un autre sur surf — On peut développer le cône sur un plan existant sur le cône et les long d'arcs de courbe sont conservés. Donc après développ ce sera une ligne droite qui sera la transformée de la ligne cherchée.

Cherchons en l'éq en coord polaires — Proj. sur plan perp à axe du cône — S proj. du sommet, origine des coord polaires, SX et l'axe polaire, proj. d'une génér.,

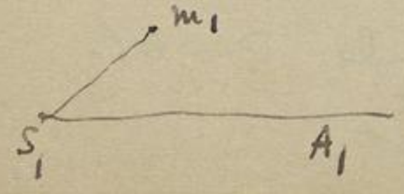


soit un point $m(\rho, \omega)$, project d'un point du cône, il a dans l'espace une 3e coord. z.



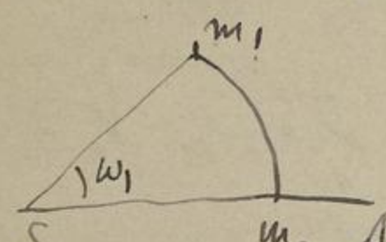
soit α angle const des génér. avec plan de sect droite, $z = \rho \operatorname{tg} \alpha$.

On déroule cône sur un plan, S en S_1, les génér. se déroulent suiv. droites telles que $S_1 A_1$; prenons $S_1 A_1$ comme axe polaire, S_1 pôle, M vient en M_1, dont coord ρ_1 et ω_1. Relat entre ρ et ω.



La génér. vient en $S_1 m_1$, elle se développe en vraie grandeur ; en proj. c'est ρ,

dans l'espace c'est $\frac{f}{\cos\alpha}$, donc $S_1 = \frac{f}{\cos\alpha}$. Evaluons ω_1. On peut remarq que les parallèles de m_1 se lèvel. suiv. arc de cercle de centre S_1. La surf du secteur $m_1 S_1 m_2$ est la surf courbe correspond du cône; ~~c'est en project~~



prenons $\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ $\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{\cos\alpha}$

Car c'est l'éc de l'angle α du plan tang avec xoy, donc surf du sect $S_1 m_1 m_2$ en project étant $\frac{\omega\rho^2}{2}$, la surf courbe du cône est $\frac{\omega\rho^2}{2\cos\alpha}$. Mais surf de $S_1 m_1 m_2$ est $\frac{\omega_1 \rho_1^2}{2}$, donc $\frac{\omega\rho^2}{2\cos\alpha} = \frac{\omega_1\rho_1^2}{2} = \frac{\omega_1\rho^2}{2\cos^2\alpha}$, d'où $\omega = \frac{\omega_1}{\cos\alpha} = m\omega_1$, en posant $m = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\rho = \frac{\rho_1}{m}$. Le lieu de m_1 est une droite: Equat d'une droite en coord polaires $\frac{1}{\rho_1} = A\cos(\omega_1 + \lambda)$, A et λ étant deux const en revenant à ρ et ω, on a $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1\cos\alpha} = A_1\cos\left(\frac{\omega}{m} + \lambda\right)$ en posant $A_1 = \frac{A}{\cos\alpha}$. — ~~L'tant~~

On peut se demander quelle était l'équat différent correspond On élim A_1 et λ ent équat et ses dérivées, on a une équat du 2e ordre or Cette formule est l'intégrale d'une équat linéaire, ~~dont est~~ $\left(\frac{1}{\rho}\right)'' + \frac{1}{m^2}\frac{1}{\rho} = 0$; car cette l'intégrale éq se ramène à $\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{m^2} = 0$, la résolution de $z = \frac{\sqrt{-1}}{m}$ $z = -\frac{\sqrt{-1}}{m}$, donc $\frac{1}{\rho} = Ae^{i\frac{\omega}{m}} + Be^{-\frac{i\omega}{m}}$, d'où $\frac{1}{\rho} = A_1\cos\left(\frac{\omega}{m} + \lambda\right)$, par formule de Moivre —

Analytiquement Cône $z = \rho\,\mathrm{tg}\,\alpha$, ou $z = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Supp sur le cône une courbe dont proj. sur plan xoy est $\rho = \varphi(\omega)$, en ces points on a $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $z = \rho\,\mathrm{tg}\,\alpha$, x, y, z sont exprim en fonct d'un même param. ω, car ρ est fonct de ω. Le plan osculat est

$$\begin{vmatrix} X-x & x' & x'' \\ Y-y & y' & y'' \\ Z-z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

x' x'' —— dérivées de x par rapp à ω.

Le plan tang au cône est

$\star$ $Z-z = p(X-x) + q(Y-y)$, p, q dérivées de z par rapp à x et y. On a $\frac{dz}{dx} = tg\alpha \cdot \frac{dp}{dx} = tg\alpha \cdot \cos\omega$,

$\frac{dz}{dy} = tg\alpha \sin\omega$. Ces 2 plans sont perpend l'un à l'autre

La condit est $AA' + BB' + CC' = 0$, A, B, C sont les coef d'un plan, $A'B'C'$ ceux de l'autre

Exprim cela. Remplacons $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ par quant proport aux cos. direct de l'autre plan $p, q, -1$, on a

$$\begin{vmatrix} tg\alpha\cos\omega & x' & x'' \\ tg\alpha\sin\omega & y' & y'' \\ -1 & z' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

. On rempl ensuite x', x'' et par leur val en ρ et ω et les dérivées du 1er et du second ordre ρ', ρ''. Mais le calcul se simplifie en remarq que l'éq doit être indép de ω, car surf de révolut autour de oz, et équation ne change pas si on change ω en $\omega + \beta$. On peut donc faire dès maintenant $\omega = 0$. On a

$$\begin{vmatrix} tg\alpha & \rho' & \rho'' - \rho \\ 0 & \rho & 2\rho' \\ -1 & \rho' tg\alpha & \rho'' tg\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Car $\begin{cases} x' = \rho'\cos\omega - \rho\sin\omega \\ y' = \rho'\sin\omega + \rho\cos\omega \\ z' = \rho' tg\alpha \end{cases}$, qui

pour $\omega = 0$, donnent $x' = \rho'$, $y' = \rho$, $z' = \rho' tg\alpha$.

et $x'' = \rho'' - \rho$, $y'' = 2\rho'$, $z'' = \rho'' tg\alpha$.

Développons, on a $\rho\rho'' tg^2\alpha - 2\rho'^2 + \rho\rho'' - \rho^2 - 2\rho'^2 tg^2\alpha = 0$

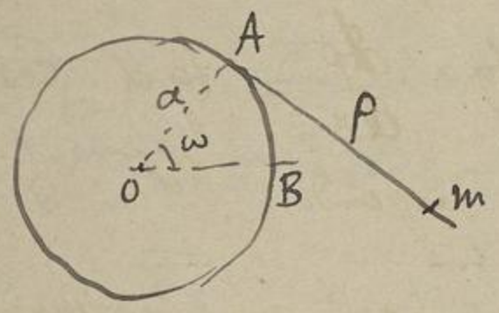
$$m^2\left[\rho\rho''(1+tg^2\alpha) - 2\rho'^2(1+tg^2\alpha)\right] - \rho^2 = 0$$

, diviz par $-m^2\rho^3$, on a

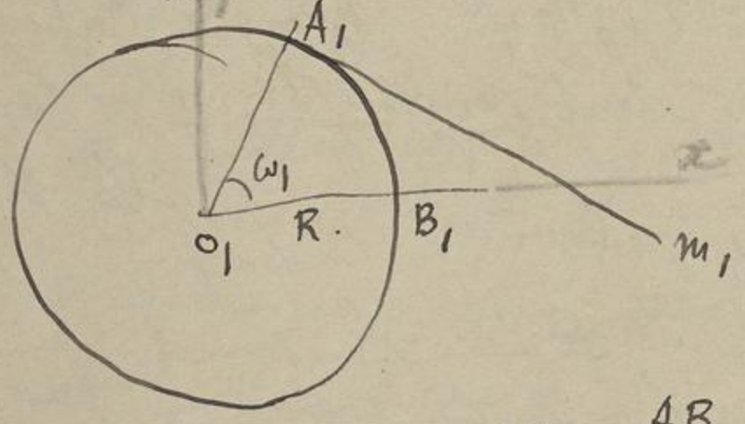
$$\frac{2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{m^2} = 0 \quad , \text{ ou } \left(\frac{1}{\rho}\right)'' + \frac{1}{\rho}\frac{1}{m^2} = 0 \quad ,$$

c'est l'équation trouvée plus haut

La méthode générale vue plus haut est applicable si la surf est une surf <u>développable</u> quelconque. On peut prendre l'hélicoïde développable. Surf engendrée par les tang à une hélice. Figurons proj. sur un plan perp à axe du mouv ± hélicoïdal.



Hélice se proj. sur cercle de rayon a.
Les gén. se proj. suiv. tang à ce cercle.
ω angle de OA avec une droite fixe OB
et ρ dist Am. ρ et ω définissent
la posit du point M de la surf quelle
que soit la courbure reçue - par cette
relat entre ρ et ω, pour que la courbure reçue - par cette relat ait son plan osc. normal ? Il faut qu'en développ hélicoïde, elle se dével suiv. droite. Hélice se développe suivant un cercle de rayon R ; le point qui se proj. en B vient en B_1, celui qui se proj. en A vient en A_1.



. ω_1 est prop. à ω. Car l'arc
de l'hélice qui se proj. en AB vient
en vraie grand en A_1B_1. Or
arc AB est l'arc de hélice × par fact constant
qui dépend du pas. R est le ray de courbure constant
de l'hélice. On a $\omega_1 = K\omega$. Génér. Am se développe
suiv. A_1m_1 en vraie grandeur, A_1m_1 a pour long dist AM,
qui est propor à ρ, soit $A_1m_1 = \rho_1$. On a $\rho_1 = C\rho$, C
étant une constante. Entre ρ_1 et ω_1, une relat telle que η
a pour lieu une droite, puis nous transformerons cette
relat en ρ et ω. Prenons O_1B_1 pour axe des x et une
perp en O_1 pour axe des y. On a $x = R\cos\omega_1 - \rho_1 \sin\omega_1$,
$y = R\sin\omega_1 + \rho_1\cos\omega_1$. Ecrivons la droite $ax + by = Const$
soient k et H des constantes d'intégration on aura

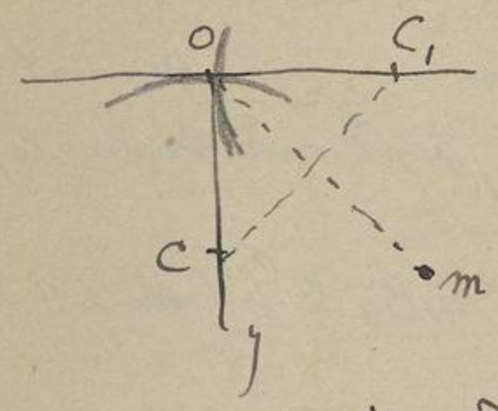
$R\cos(\omega_1+\lambda) - \rho_1 \sin(\omega_1+\lambda) = H$. On transforme en ρ et ω,
$R\left(\cos(K\omega+\lambda) - C\rho\cos(K\omega+\lambda)\right) = H$, 2 constantes arbtes λ et H,
c'est l'éq des courbes demandées.

On demande de trouver les surf qui coupent orthogonalement les sphères dont équat est $x^2+y^2+z^2 = 2az$?

On peut aller rapidement par ray vect récipr. Transfor les sph en plan pour pôle l'origine, ce qui revient à changer $x\ y\ z$ en $\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ / $\frac{y}{x^2+y^2+z^2}$ / $\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$.
Ces sphères se transf en plans parall à xOy $z = \frac{1}{2a}$.
La transf conserve les angles. Donc les surf demandées sont les transf des surfaces qui coup orthogon ces plans. Or celles-ci sont les cylindres parall à Oz, $f(x,y)=0$,
transfon inverse on a $f\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2} / \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0$.
Telles sont les surf demandées. Elles sont engend par les courbes équation par l'ensemble des deux équations
$\frac{x}{x^2+y^2+z^2} = K$ / $\frac{y}{x^2+y^2+z^2} = K'$, la 1ère est sphère tang à yOz, 2ème à xOz, inters est un cercle tang à Oz. Donc ces surf sont engend par les cercles tangents à Oz à l'origine Dieu.
Quant est-il avantag d'empl ray vect récipr pour surf qui se coupent orthogon ? Quand on a sphères passant par un point ? car les transformées par rapport à ce point sont alors des plans.

Autrement : on peut prévoir que les surf cherch sont engend par infin de cercles. Soient les surf S, et les surf S_1 qui les coup orth. Cherch courbe C qui les coupent orthogon ; car les surf S_1 sont engend par les courbes C_1. Donc on cherch les courbes qui coupent orthog les sphères ! Ce sont des courbes planes dont plans par Oz une éq

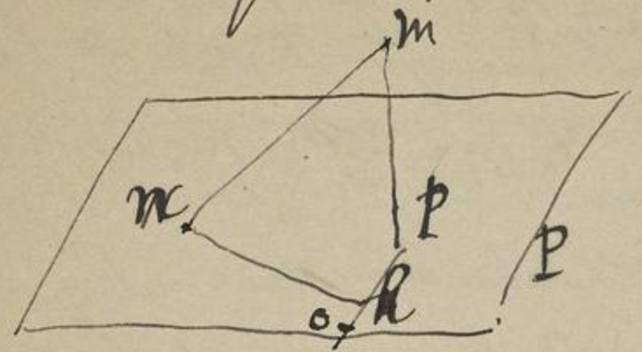
Car, en général, si on donne surf S_1 qui coupe orthogonalement surf S de révolut autour de oz : Il suffit de montrer que tang à courbe C rencontre oz, car courbe C est normale à surf correspondante d'ailleurs C coupe orthogonalement sect méridienne de S. Donc il y a lieu de mener sect méridienne de S et d'en chercher les traj. orthog. Or les traj. orthog sont cercles C tang à ox, et les traj. orth de ces cercles sont cercles C_1 tang à l'orig à oy. Considérons deux courbes dans le plan sécant où nous prenons ox et oy et on a un point, O. L'autre est symétrique de O par rapport à CC_1, on a M. Et en M, C et C_1 se coupent orthog., tout comme en O, par symétrie.



Remarque. Si on suppose que le point du plan x, y repris. $z = x+iy$ décrit une infinité de courbes C, dont égal sont traj. orthog sont parties réelles de $f(x+iy) = \text{const}$, les on a cercles $x^2+y^2 = 2ax$ parties imag de $f(x+iy) = \text{const}$. Ici Const peut être $\frac{1}{x+iy}$ (en prenant la notation en x et y) ou bien $x^2+y^2 = 2ay$ chacun partie réelle, on a $\frac{x}{x^2+y^2}$, partie imag $\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot i$ donc on a les cercles tang à oy et tang à ox à l'orig. Donc ces 2 syst de cercles de coupent à angle droit.

Solut analyt On espère que le plan tang à surf cherchée dont cos direct proport à $p, q, -1$ est normal à plan tang à sphère, on a éq linéaire en p et q; on intègre en posant $\frac{dx}{\quad} = \frac{dy}{\quad} = \frac{dz}{\quad}$. On a une inf de courbes dans l'espace on passe aux coord semi-polaires; on a l'équat $\frac{dx}{dz}(z^2-k^2x^2) = 2zx$, analogue à une équation qui a été donnée plus haut en devoir, et qui représentait cercles tang à oz. (voir la note que M. Poincaré m'a mise sur ce devoir — Voir aussi une solut dans le cahier rouge de licence)

Equat différentielle $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{-x}$. —



proport à mp.

On donne un plan P, un point o dans ce plan. Trouver l'éq gén. des surf telles que si on connaît un point m de cette surf et le pied p de perpend mp abaissée sur le plan et la normale mn, la dist nh de n à op soit Ainsi $\frac{nh}{mp} = K$.

On connaît les rayons de courbure R et R' d'une courbe et de sa développée. Trouver ces courbes telles que $R' = KR^2$. On arrive à équat différ. qu'on peut intégrer par quadratures. Celles-ci ne peuvent être effectuées, mais on peut construire les courbes.

Quest de licence $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x$

Rapprochons cette quest de la suivante :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (ax+b)e^x + Ce^{-x}.$$

Ce sont 2 éq linéaires à second membre 2ème cas, coef const, et polyn entier en x, e^x, e^{-x}, — ; 1er cas, entier en e^{ix}, e^{-ix}, e^x, e^{-x}. Car on a $Ae^x + Be^{-x} + \frac{D-iC}{2}e^{ix} + \frac{D+iC}{2}e^{-ix}$, où $i = \sqrt{-1}$.

On intégre d'abord sans second membre puis on applique méth de variat des constantes. Mais ~~Lorsque~~ Considérons la 2ème équation, cet artifice n'est pas nécessaire, on a presq immédiatement l'intégrale. Car supp qu'on intégre sans second membre, l'intég gén. a pour $C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + \cdots + C_p e^{\alpha_p x}$, p ordre de l'équat linéaire. Pour avoir inte d'éq à second membre on ajoute inté partie H de l'équat totale. Quand 2e membre somme de fonct simples, on prend successivement chaque terme et cherche une intég particul correspond et on les ajoute toutes.

Soit par exemple $A_m\frac{d^m y}{dx^m} + A_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + A_1\frac{dy}{dx} + A_0 y = X$,

Notat abrégée $\Delta y = A_m \frac{d^m y}{dx^m} + \text{---} + A_0 y$. On a donc égal sans second membre $\Delta y = 0$, et à second membre $\Delta y = X$. Quand le polyno $F(z) = A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0$, on a à résoudre $F(z) = 0$.

On trouve immédiatement $\Delta e^{\alpha x} = F(\alpha) e^{\alpha x}$, et, en différ. par rapp à α,

$\Delta x e^{\alpha x} = F'(\alpha) e^{\alpha x} + F(\alpha) x e^{\alpha x}$, encore

$\Delta x^2 e^{\alpha x} = F''(\alpha) e^{\alpha x} + 2 F'(\alpha) x e^{\alpha x} + F(\alpha) x^2 e^{\alpha x}$, enfin p fois,

$\Delta x^p e^{\alpha x} = P_p e^{\alpha x}$, P_p polyn entier d'ordre p. Si α est rac de $F(z) = 0$ et cela d'ordre q, le degré de ce polynom P_p sera $p - q$. Car $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$.— $F^{(q-1)}(\alpha)$ sont nuls ; ces q premiers termes disparaissent, et le polyn restant est de degré $p-q$.

Applicat suppos. que X se réduit à un seul terme $Ae^{\alpha x}$, et que α ne soit pas rac de $F(z) = 0$; et faut une intégr particu de $\Delta y = X$. Il y en a une qui a la forme $Be^{\alpha x}$. Car

$\Delta(Be^{\alpha x}) = B F(\alpha) e^{\alpha x} = Ae^{\alpha x}$, donc intégr particul $y = \frac{A}{F(\alpha)} e^{\alpha x}$.

Supp maintenant α rac de $F(z) = 0$, $F(\alpha) = 0$, cette solut devient illusoire. Alors on a la solut $Bx e^{\alpha x}$. Car

$\Delta(Bx e^{\alpha x}) = B \Delta(x e^{\alpha x}) = B F'(\alpha) e^{\alpha x} = Ae^{\alpha x}$, d'où $y = \frac{Ax}{F'(\alpha)} e^{\alpha x}$.

etc - Si α est rac mult d'ordre p de $F(z) = 0$, l'int partic est $y = \frac{Ax^p}{F^{(p)}(\alpha)} e^{\alpha x}$. Il y a encore à exam le cas où le 2e membre est, non pas $e^{\alpha x}$, mais $e^{\alpha x}(ax + b)$, et supp que α ne soit pas rac de $F(z)$, on prend pour intégr $(a'x + b') e^{\alpha x}$, substituons, $\Delta y = \Delta[(a'x + b') e^{\alpha x}] = a' \Delta x e^{\alpha x} + \ldots$

$= a' F'(\alpha) e^{\alpha x} + a' F(\alpha) x e^{\alpha x} + b' F(\alpha) e^{\alpha x} = (ax + b) e^{\alpha x}$.

D'où $a' = \frac{a}{F(\alpha)}$, $b' = \frac{b}{F(\alpha)} - \frac{a F'(\alpha)}{[F(\alpha)]^2}$.

Si $e^{\alpha x}(a'x^p + \ldots)$, et α rac d'ordre q de $F(z) = 0$, on a

subst $e^{\alpha x} P$, P polyn deg $p+q$, α étant rac deg q, et on identifie

Si on a une somme de paralles exprès, on fait somme des intégr particulières obtenues.

Application aux équat données. On a

$F(z) = z^4 - 2z^2 + 1 = (z^2-1)^2$, deux rac $+1$ et deux rac -1.

Donc intég gén de $\Delta y = 0$ est $G_1 e^x + G_2 e^{-x} + G_3 x e^x + G_4 x e^{-x}$.

Cherch un intég part de $\Delta y = X$, et pour cela prenons les équat

$\Delta y = Ae^x$, $\Delta y = Be^{-x}$, $\Delta y = \frac{D-iC}{2} e^{ix}$, $\Delta y = \frac{D+iC}{2} e^{-ix}$,

cherch intégr particuliers, on a l'inté pour expos α, or c'est rac double de $F(z)=0$. Donc il faut prendr intég partie de la forme $Bx^2 e^x$. En substtt, on a $Be^x F''(1)$, donc l'intég partic est $\frac{Ae^x}{F''(1)} x^2$; pour Be^{-x}, on a $\frac{Be^{-x}}{F''(-1)} x^2$.

Pour $\frac{D-iC}{2} e^{ix}$, i n'est pas rac de $F(z)=0$, on a donc un

terme $\frac{D-iC}{2 F(i)} e^{ix}$, puis pour e^{-ix}, $\frac{D+iC}{2F(-i)} e^{-ix}$. On a 4

intégr particul cherché. Ajoutons-les, On a l'intégr partic

$F''(x) = 12z^2 - 4$, $F''(1) = F''(-1) = 8$, et calcul

$F''(-i) = 12 + 2 + 1 = 4$. On a donc

$$\frac{A}{8} x^2 e^x + \frac{B}{8} x^2 e^{-x} + \frac{D-iC}{8} e^{ix} + \frac{D+iC}{8} e^{-ix} + G_1 e^x + G_2 e^{-x} + G_3 x e^x + G_4 x e^{-x}.$$

Les 2 derm soulignés donnent $\frac{C}{4} \sin x + \frac{D}{4} \cos x$.

Prenons l'autre équation $F(z) = z^3 - 3z + 2 = (z-1)^2 (z+2)$.

$\Delta y = 0$ donne $G_1 e^x + G_2 x e^x + G_3 e^{-2x}$. Cherch une intégr particul H de $\Delta y = X$. Si X est un polyn en $x e^x$ et e^{-x}; on a $e^x (ax+b)$.

1 est rac double de l'éq $F(z)=0$. Donc, on appel α, β, γ les coef inconnus à détermin $H = (\alpha x^3 + \beta x^2) e^x + \gamma e^{-x}$, employon

méth des coef indétermin $\Delta(H) = \alpha \Delta x^3 e^x + \beta \Delta x^2 e^x + \gamma \Delta e^{-x}$.

où a $\Delta x^3 e^{\alpha x} = F'''(\alpha) e^{\alpha x} + 3F''(\alpha) x e^{\alpha x} + 3F'(\alpha) x^2 e^{\alpha x} + F(\alpha) x^3 e^{\alpha x}$.

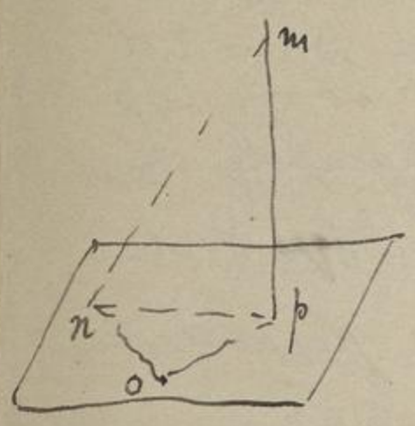
$F(-1) = 4$, $F(1) = 0$, $F'(1) = 0$, puisq 1 est 2ag double . $F''(1) = 6$, $F'''(1) = 6$

$\Delta x^3 e^{x} = 6e^x + 18 x e^x$, $\Delta x^2 e^x = 6e^x$, $\Delta e^{-x} = 4e^{-x}$

Donc $\Delta H = (ax+b)e^x + ce^{-x} = 18\alpha x e^{x} + (6\alpha + 6\beta) e^x + 4\gamma e^{-x}$.

D'où $\alpha = \frac{a}{18}$, $\beta = \frac{b}{6} - \alpha = \frac{b}{6} - \frac{a}{18}$, $\gamma = \frac{c}{4}$. Donc int gén.

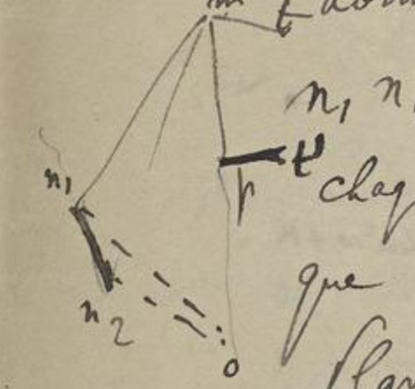
$$G_1 e^x + G_2 x e^x + G_3 e^{-2x} + \frac{a}{18}(x^3 - x^2)e^x + \frac{b}{6} x^2 e^x + \frac{c}{4} e^{-x} .$$



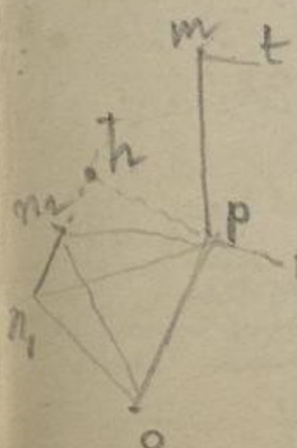
On donne un plan P, un point O dans ce plan, on demande de trouver l'éq génér. des surf S telles que si de M on abaisse Mp perp à P, et Mn normale en M, l'aire du tri. nop est constante a^2. Construire une surf satisf à ces condit et passant par une droite donnée ox du plan.

Coord semi-polaires. oz perp à P, o pôle et ox axe polaire. Alors M a pour coord

$z = mp$, $\rho = op$, $\omega = xop$. Géométriquem : Coord. deux de ces surf S_1 et S_2 par M, soient Mn_1 et Mn_2 les 2 norm. à tri. $n_1 op$, $n_2 op$ ont même aire, donc $n_1 n_2$ paral à op. Coord interv. C de ces 2 surf i par chq point de surf on peut faire passer 1 courbe telle que C. ces surf sont engend par des courbes telles que C.

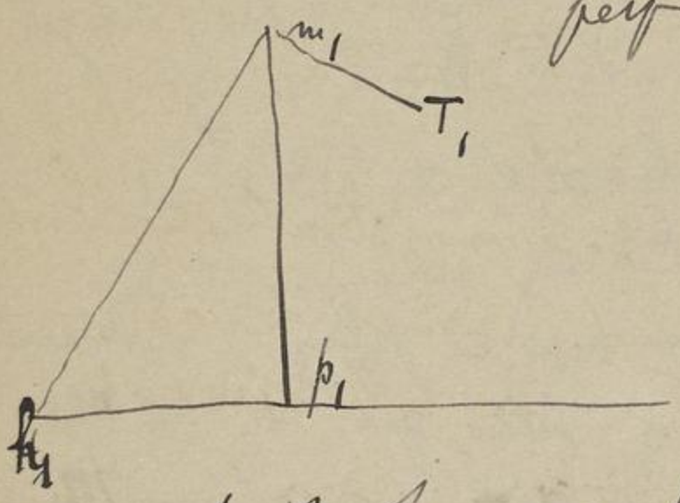


Plan normal à C par M est $n_1 M n_2$, car il passe par les deux normales. La tang à C est perp à ce plan : elle se projette suiv. pt' perpend à $n_1 n_2$. Car Mt perp à plan $M n_1 n_2$. Courb proj. de C sur P, soit c, cette proj. La tang à c est perp au rayon vecteur op, donc ces courbes sont une série de cercles ayant pour centre o, ces courbes sont donc sur cylindres de révolut autour de oz. Que sont ces courbes ? Dérel un de



ces cylindres. Quelle est nature de cette courbe C_1. Prolong pT' jusqu'à $n_1 n_2$ en h. C'est la hauteur du triangle, $op \cdot ph = 2a^2$ car la droite $n_1 n_2$ est, comme on a vu, parallèle à op.

mh est perp à mT. mp paral à oz est une gén. du cylindre elle se déval suiv. $m_1 p_1$. Le cercle (de centre o et tang en p à pt' se dévelop suivant droite perp à $m_1 p_1$. En développ. on aura $m_1 T_1$ qui fait angle $T_1 m_1 p_1$ égal à pmT. Normale mh à C_1 est perpend à $m_1 T_1$. Prolongeons-la en h_1.



$h_1 m_1 p_1 = hmp$, car complém. de $p_1 m_1 T_1$.

Les 2 tri. hmp, $h_1 m_1 p_1$ égaux; donc $p_1 h_1 = ph = \frac{2a^2}{op}$.

Ainsi la sous-normale ph_1 est constante. Donc C_1 est une parabole dont le paramètre est $\frac{2a^2}{op}$. Donc C est un cône dont la développée est une parabole (c'est une hélice parabolique qui a pour plan de symétrie Σ. Les surf demandées sont engendrées par ces hélices parabol——

Equat en coord semi-polaires. C est tracée sur cylindre op $\rho = op$; elle se dével sur un plan suiv. parab de paramètre $\frac{2a^2}{op}$. Le point z, ρ, ω se développe et donne un point de coord. z, $(op \times \omega)$. Entre z et ω, on a relat $z^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{op} \cdot (op \times \omega) + K = 4a^2 \omega + K$.

Il faut ajouter constante K : Car sommet pas déterminé. Pour avoir surf engendrée par ces courbes, $\rho = op$ et $z^2 = 4a^2\omega + K$ on écrit que cette constante est fonct de l'autre $z^2 = 4a^2\omega + f(\rho)$.

Il faut écrire qu'elles passent par axe polaire oy dont équat $z = 0$, $\omega = 0$, donc il faut que z s'annule identiquement pour $\omega = 0$

donc $z^2 = 4a^2\omega$.

Analyse x, y, z coord de M, p et q $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$. La normale mn est $\frac{Z-z}{-1} = \frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q}$.

Cherch coord X et Y de n sur Σ, faisons $Z=0$, on a $X = x + pz$, $Y = y + qz$ (coord de n) ; coord de p sont x et y. Evaluons surface nop. L'un de ses sommets est l'origine les aut- sommets X, Y, x, y double de l'aire est $\begin{vmatrix} X & Y \\ x & y \end{vmatrix}$, on a

$$\begin{vmatrix} x+pz & y+qz \\ x & y \end{vmatrix} = 2a^2, \text{ ou } \begin{vmatrix} pz & qz \\ x & y \end{vmatrix} = 2a^2 .$$

Pour intégrer facilem employ coord semi-polaires dont emploi est tout indiqué, puisque tout est de révolut autour de oz. Le L'équat ne contiendra pas ω, à cause de cette circonstance même. On pose $x = \rho \cos\omega$, $y = \rho \sin\omega$. On a

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{d\rho} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\rho} = p\cos\omega + q\sin\omega$$

$$\frac{dz}{d\omega} = \rho(-p\sin\omega + q\cos\omega).$$

Rempl p, q, ~~x, y~~ par leurs valeurs. Mais ω ne doit pas entrer dans l'équation, il suffit donc de poser $\omega = 0$ et de substituer, $x = \rho$, $y = 0$,

$$\frac{dz}{d\rho} = p, \quad \frac{dz}{d\omega} = q\rho .$$

alors l'équat devient (car le 1er membre n'est connu qu'au signe près, et on peut prendre signe —).

$$qzx = 2a^2, \text{ rempl. } \frac{z\,dz}{\rho\,d\rho} \quad z\frac{dz}{d\omega} = 2a^2, \quad 2z\frac{dz}{d\omega} = 4a^2,$$

intégrons $z^2 = 4a^2\omega + f(\rho)$, car la const est const par rapp à ω ; et pour $\omega = 0$, z se réduit identiquem à 0, donc

$$z^2 = 4a^2\omega .$$

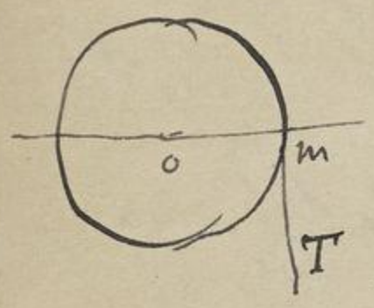
On peut se dispenser de la remarque que ω ne doit pas entrer, et ne pas faire $\omega = 0$. Mais calcul un peu plus long. — On peut aussi intégrer sans passer par les coord. polaires. On a à résoudre l'équat ~~Système~~ $pzy - qzx = 2a^2$, ce qui conduit au système $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{2a^2}$; $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ donne $x\,dx + y\,dy = 0$, $x^2 + y^2 = \text{Const}$, ou, $\sqrt{x^2+y^2} = C$, alors on a $\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{2a^2}$, $\frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \frac{z\,dz}{2a^2}$, ou $\frac{d.(\frac{x}{C})}{\sqrt{1-(\frac{x}{C})^2}} = \frac{1}{4a^2}\,d(z^2)$; d'où par intégrat. $\arccos\frac{x}{C} = \frac{z^2}{4a^2} + C'$, ~~on peut prendre pour intégrale arc cos qui a pour sinus~~ ou $z^2 - 4a^2 \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 4a^2C' = C''$; on sait que l'intégr ~~écrivons $C' = f(C)$, c'est l'intégrale cherchée~~ cherché ~~était~~ est $C'' = f(C)$, c. à. d. $z^2 - 4a^2 \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(\sqrt{x^2+y^2})$. C'est bien l'équat trouvée en coord semi-polaires, puisque $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, d'où $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$ et $\frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\omega$, $\omega = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Il est indifférent d'écrire dans le 1er membre $z^2 - 4a^2\arccos\frac{x}{\sqrt{}}$ ou $z^2 - 4a^2 \operatorname{arctia}\frac{x}{\sqrt{}}$, car quand x et y varient, le second terme de la 1ère peut prendre toutes les valeurs qu'atteint le second terme de la seconde.

Lignes de courbure de la développable enveloppe du plan

$z = \alpha x + y\,\varphi(\alpha) + R\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)}$, α param arbitraire.

Les lg de cont d'une dével se comp des génér. et de leurs traject orthog. Cherch ces traj. orthog. La dist de l'orig à ce plan est $\dfrac{R\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)}}{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)}$. Donc la dist est const. Donc ce plan est tang à sphère de cent O et de rayon R, et les génératr sont toutes tang à cette sphère.

Cela posé, consid une sphère quelc qui coupe suiv. Courbe C, je dis qu'elle est traject orthog des génér. Car la tang à cette courbe est l'inter des plans tang. Le plan tang à surf Dével est tang à sphère R, et il coupe une 2e sphère de rayon $R_1 > R$ suiv. un cercle. Cette sphère coupe la dével suiv une courbe C orthog aux génératr corresp : car plan tang à la dével le long de la caracter est tang à sphère R et il coupe sphère R_1 suiv. cercle, la génér. dans P est tang à sphère R, elle passe par le point de contact, c'est une droite Om. Ce point m appart à dével et à sphère R_1, il appart à C.



La tang en m est dans plan P, et dans le plan tang à sphère (puisq C est sur sphère), donc mT est inter de plan P et de plan tang à sphère R_1, mT est perp à Om qui est la gén. de la dével. Donc le 1er syst de comp des gén, et le 2e se comp des inters de la surface avec les sphères qui ont pour centre l'origine.

Autrem $\dfrac{dx}{dl} = \dfrac{dy}{dm} = \dfrac{dz}{dn}$.

l, m, n cos direct de normales $l^2+m^2+n^2 = 1$; ce sont les cos. du plan tang ; le plan tang est

$\alpha x + \varphi(\alpha)\cdot y - z = -R\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)}$, alors

$l = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)}}$, $m = \dfrac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\quad}}$, $n = -\dfrac{1}{\sqrt{\quad}}$

le plan tang est alors $lx + my + nz = -R$. Donc pour avoir l'envel, on diffère cette équat en α. Soient l, m', n' les déc. de l, m, n, on a $l'x + m'y + n'z = 0$. On a

$dl = l'd\alpha$, $dm = m'd\alpha$, $dn = n'd\alpha$. Alors ces éq s'écrivent

$\frac{dx}{l'd\alpha} = \frac{dy}{m'd\alpha} = \frac{dz}{n'd\alpha}$; on peut y satisf en posant $d\alpha = 0$, $\alpha = \text{const}$, ce qui exprime que la génér. reste la même, on a les génér. qui forment ainsi le 1er syst. On peut encore satisf en posant $\frac{dx}{l'} = \frac{dy}{m'} = \frac{dz}{n'} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{l'x + m'y + n'z}$,

où dénom est nul, d'après équat plus haut. Donc il reste

$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$, c.à.d. $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$ sphères

de centre O : c'est le 2e syst se comp de leur intersn avec la surface.

Rapprochons la quest suivante : à b étant donné d'un même paramètre α, β, γ fonct de ce seul paramètre x, y, z on considère surf réglée engendrée par $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$. A quelle condit doiv. satisf a, b, α, β pour que l'un des syst de ligne de coubure soient des coubes sphériques concentriques. C'est la même quest. Car intersn de l'une de sphères par le plan tang à la surf., cette intersn doit être un cercle normal à la génér. correspond à la génér. dont passe par le centre de cette intersn la dist de l'orig au plan tg et const et envel du plan est sphère.

Sur générat quelle est la condit pour que la développable présente une seule ligne de coubure sphérique ? Il faut plan tang à dist const du centre de la sphère. Car pour qu'elle soit lig de coubure il faut que la dével coupe sphère sous angle const (Joachimstahl). Donc dist du centre à ce plan et const. Alors le plan mobile coupe toutes les sphères concent sous angle const, et l'intersn est toujours une ligne de coubure

Revenu à $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, a, b, α, β fonct de t, leurs dérivées a', b', α', β'. On a

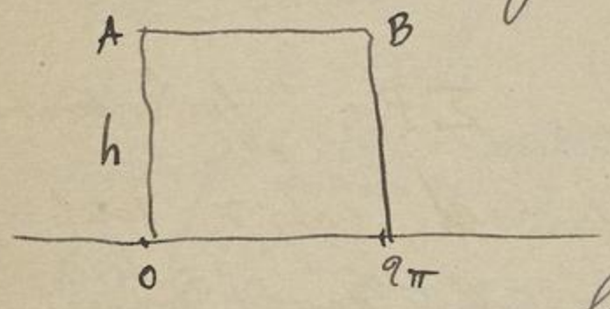
$\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha'}{\beta'}$, Condit pour surf développable

$\beta'(x - az - \alpha) - \alpha'(y - bz - \beta) = 0$; distance au plan tg const

$$\frac{\beta'\alpha - \alpha'\beta}{\sqrt{\beta'^2 + \alpha'^2 + (\beta'\alpha - \alpha'\beta)}} = K .$$

Calcul d'une intégrale définie $\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x - a - b\sqrt{-1}).dx$

Consid le plan dont les points repris. val imag de x,



Figurons les points 0, 2π. Construisons rectangle sur la ligne 0.2π, et sur OA. On fera tendre OA vers $l'\infty$. On va intégrer le long de ce contour. Soit $OA = h$, écrivons $A = ih$, $B = ih + 2\pi$. La quant sous sign $\int$ est uniforme monodrome de x, finie et continue, elle ne présente que des pôles, excepté pour $x = \infty$ (mais ce point est en dehors du contour on n'a pas l'en occuper pas). La val est $2i\pi \sum R$. On a

$$\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{B} + \int_B^A + \int_A^0 = 2i\pi \sum R .$$ Soit X l'intégr définie à calculer. La fonct $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x - a - b\sqrt{-1})$ admet la période 2π, cette fonct ne chang pas on chang x en $x + 2\pi$ Donc

$$\int_0^{ih} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x - a - b\sqrt{-1})dx = \int_{2\pi}^{ih + 2\pi} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x - a - b\sqrt{-1})\,dx ,$$

ou $\int_0^A = \int_{2\pi}^B$, donc $\int_{2\pi}^B - \int_0^A = 0$, ou $\int_{2\pi}^B + \int_A^0 = 0$

Il reste $\int_B^A i$ au lieu de calculer cette intégr., calcul sa limite pour $h = \infty$

servons. nous de la formule de Taylor. h tendant vers l'infini
x aura sa partie réelle finie, et sa partie imag tendra vers l'∞.
Soit $\xi = \frac{1}{2}(x - a - b\sqrt{-1})$, on a la fonct cotg ξ ; quand la partie
imag de ξ tend vers l'∞, on a $\operatorname{cotg}\xi = \frac{\cos\xi}{\sin\xi} = i\,\frac{e^{i\xi}+e^{-i\xi}}{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}$. Soient
$\xi = \alpha + i\beta$, $e^{i\xi} = e^{i\alpha}.e^{-\beta}$, pour $\beta = +\infty$, le 1er fact a pour
module l'unité, le 2e fact a pour limite 0. On a donc
$\lim e^{i\xi} = 0$, $\lim e^{-i\xi} = \infty$, $\lim \operatorname{cotg}\xi =$ en multpl haut
et bas par $e^{i\xi}$, on a ~~cotg~~ $i\,\frac{e^{2i\xi}+1}{e^{-2i\beta}-1}$, $\lim = -i$, donc
$\lim \operatorname{cotg}\xi = -i$. On a à prendre $\int_{ih+2\pi}^{ih} -i\,dx = -i\int_{ih+2\pi}^{ih} dx$

$$= -i\Big[x\Big]_{ih+2\pi}^{ih} = -i(-2\pi) = 2i\pi.$$

Donc $X + 2i\pi = 2i\pi\,\Sigma R$. Evaluons ΣR. Quels sont
les infinis de $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})$? Les infin de cotg x sont les
multples pairs ou impairs de π, ceux de la foret donnée sont
$a + b\sqrt{-1} + 2K\pi$, et ici 2 cas suiv. que $b>0$, ou $b<0$.
Si $b>0$, il y a ~~un seul~~ un infini et un seul dans le Contour
d'intégrat car que faut. il pour que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ soit dans le
Contour, il faut $\beta>0$, et $0<\alpha<2\pi$ (car h infini).
~~Si~~ $b>0$, 1re partie satisf, il faut donc encore $0 < a + 2K\pi < 2\pi$,
ce qui ne peut pour une seule valeur de K entière. Quel est
le résidu correspondant ? On a $\dfrac{\cos\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})}{\sin\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})}$, or
pour avoir le résidu de $\dfrac{X}{Y}$ (X et Y étant fonct holomorphes
de x), correspondant à un zero de Y, on calcule $\left(\dfrac{X}{Y'}\right)_R$, pour
la val k qui corresp à cet infini. Prenons la dérivée du dénom
on a $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})$; le rapport est donc $2\,\dfrac{\cos\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})}{\cos\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})}$
$= 2$, quel que soit le pole. Ce résidu est donc 2.

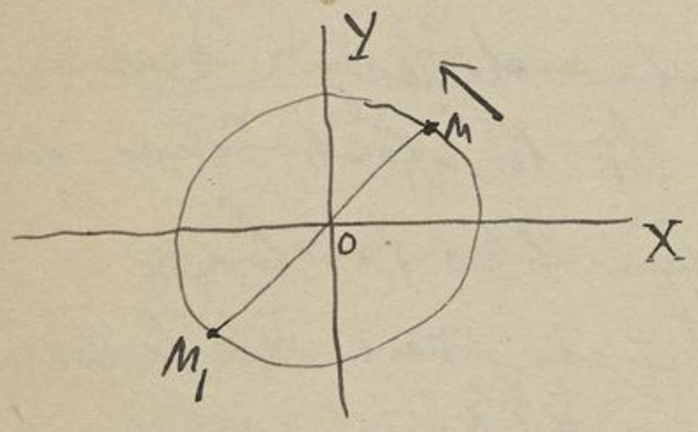
Si $b>0$, on a donc $X = 2i\pi$.

Supposons mainte $b<0$, pas de l'infini dans le Contour. Car il faut $\beta>0$, comme on a vu, or partie imag de nos infinis est $b<0$, donc $\Sigma R = 0$, et $X = -2i\pi$.

On pourrait aussi passer par l'intermédiaire de l'intégrale indéfinie $\int \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})\,dx$; on

$$\int 2\,\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})}{\sin\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})}\,dx = 2L\sin\tfrac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})$$

; il faut substituer les limites 0 et 2π. Le log n'est pas une fonct uniforme, puisqu'il a une infin de valeurs, et on ne peut dire : en substituant 0 et 2π, $\sin\frac{1}{2}(\text{——})$ reprend même val, le L reprend même val, et on a 0. C'est faux. Faisons varier x de 0 à 2π, et voyons comment varie $L\sin(\text{——})$; et étudions pour cela $\sin\frac{1}{2}(x-a-b\sqrt{-1})$, il décrit une courbe fermée dans sens posit si $b>0$, dans sens nég si $b<0$. Dans 1er cas son arg augm de 2π



En chang x en $x+2\pi$, le sin change de signe. Sous $x=0$, supp le sin repré. par M ; pour $x=2\pi$, on a M_1 symét de M si $b>0$, il a décrit un arc au dessous de O ; si $b<0$, il décrit au dessous. Dans 1er Cas, son arg augm de π dans le 2e il diminue de π ; son L augm ou dim de $i\pi$, et le double augm ou dim de $2i\pi$. On a donc $2i\pi$ et $-2i\pi$, suiv. que $b>0$ ou $b<0$.

Equat diff $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 9x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 37x\frac{dy}{dx} - 64y = x^4(\alpha+\beta Lx+\gamma L^2x)$

sans 2e mb

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 9x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 37x\frac{dy}{dx} - 64y = 0$$

. Chang de variable.

$x = e^z$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot e^{-z}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} e^{-2z} - \frac{dy}{dz} e^{-2z}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3} e^{-3z} - 3\frac{d^2y}{dz^2} e^{-3z} + 2\frac{dy}{dz} e^{-3z}$. L'équat devient

$$\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dz} - 9\frac{d^2y}{dz^2} + 9\frac{dy}{dz} + 37\frac{dy}{dz} - 64y = 0$$

ou (1) $\frac{d^3y}{dz^3} - 12\frac{d^2y}{dz^2} + 48\frac{dy}{dz} - 64y = 0$. L'éq à second mbre ast

(2) $\frac{d^3y}{dz^3} - 12\frac{d^2y}{dz^2} + 48\frac{dy}{dz} - 64y = e^{4z}(\alpha + \beta z + \gamma z^2)$.

Prenons (1) : elle est à coef const. $t^3 - 12t^2 + 48t - 64 = 0$,

ou $(t-4)^3 = 0$, 3 rac. égales à 4. L'intégr génér. est

$\lambda e^{4z} + \mu z e^{4z} + \nu z^2 e^{4z}$. Prenons (2). Le 2e mbre est un

polyn de 2e degré en z multé par e^{4z}. L'intégr gén. sera donc

$e^{4z}(\lambda + \mu z + \nu z^2 + az^3 + bz^4 + cz^5)$, a, b, c constantes à déterminer

en fonct de α, β, γ, ~~λ, μ, ν~~ . On a $F(t) = (t-4)^3 = 0$

~~$\Delta(y)$~~ substituons, et exprim que l'équat est satisfaite

$\Delta(y) = \Delta\left[e^{4z}(az^3 + bz^4 + cz^5)\right] = e^{4z}(\alpha + \beta z + \gamma z^2)$.

Reprenons les formules d'une leçon précédente :

$\Delta(e^{\alpha z}) = e^{\alpha z} F(\alpha)$, $\Delta(z e^{\alpha z}) = e^{\alpha z}(z F(\alpha) + F'(\alpha))$

$\Delta(z^2 e^{\alpha z}) = e^{\alpha z}\left[z^2 F(\alpha) + 2z F'(\alpha) + F''(\alpha)\right]$

$\Delta(z^3 e^{\alpha z}) = e^{\alpha z}\left[z^3 F + 3z^2 F' + 3z F'' + F'''\right]$

$\Delta(z^4 e^{\alpha z}) = e^{\alpha z}\left[z^4 F + 4z^3 F' + 6z^2 F'' + 4z F''' + F^{IV}\right]$

$\Delta(z^5 e^{\alpha z}) = e^{\alpha z}\left[z^5 F + 5z^4 F' + 10 z^3 F'' + 10 z^2 F''' + 5z F^{IV} + F^{V}\right]$

Or 4 est rac. triple de $F(t) = 0$, donc $F(4) = 0$, $F'(4) = 0$, $F''(4) = 0$

$F''' = 6$, $F^{IV} = 0$, $F^{V} = 0$. Donc on a

$6a e^{4z} + 24 b z e^{4z} + 60 c z^2 e^{4z}$.

D'où $a = \frac{\alpha}{6}$, $b = \frac{\beta}{24}$, $c = \frac{\gamma}{60}$. Donc l'int. génér. cherch, en revenant à x,

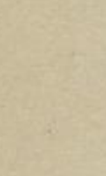
$$x^4\left[\lambda + \mu Lx + \nu L^2x + \frac{\alpha}{6}L^3x + \frac{\beta}{24}L^4x + \frac{\gamma}{60}L^5x\right].$$

Prévoyant immédiatement la forme de l'intégrale on peut par substitution obtenir immédiatement l'intégrale

---

Equat aux dérivées partielles des surfaces engendrées par droites qui rencontrent une droite donnée sous angle constant.

Soit Oz la droite donnée et α la cotang. de l'angle constant donné. On a, en coord polaires, $\omega = const$



$z = \alpha\rho + (const)$ $\quad z = \alpha\rho + f(\omega)$, donc l'éq demandée

S'obt en dérivant : $\frac{dz}{d\rho} = \alpha$. C'est l'éq demandée.

Passons aux coord x, y, z. Posons $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$,

on a $\frac{dx}{d\rho} = \cos\omega = \frac{x}{\rho}$ et $\frac{dy}{d\rho} = \sin\omega = \frac{y}{\rho}$, par suite :

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{dz}{dx}\frac{x}{\rho} + \frac{dz}{dy}\frac{y}{\rho}$$; ce qui donne pour l'équat $\frac{dz}{d\rho} = \alpha$

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = \alpha\sqrt{x^2+y^2}.$$ Telle est l'équat demandée.

D'ailleurs par intégral cette équat redonne aisément $z = \alpha\sqrt{x^2+y^2} + f(\omega)$, voir Esserand.

Transf $\iint dx\,dy$, on subst à x et y les param de 2 familles de coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{b^2 - \gamma^2} = 1.$$

(Cette

A chaque val de x et y corresp un syst de val μ et γ. Donc on change de coord dans un plan. On a

on le sait, $\iint dx\,dy = \iint \mathrm{mod}\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\gamma)}\right] d\mu\,d\gamma$.

μ et γ sont les rac de l'équat

$$x^2(\mu^2 - b^2) + y^2\mu^2 = \mu^2(\mu^2 - b^2)$$

ou $\quad \mu^4 - \mu^2(x^2 + y^2 + b^2) + b^2x^2 = 0$, somme et

prod, donc $\quad \mu^2 + \gamma^2 = x^2 + y^2 + b^2$, $\mu^2\gamma^2 = b^2x^2$.

D'où $\mu\gamma = bx$. Egal $\mu^2+\gamma^2$ à X et $\mu\gamma$ à Y.

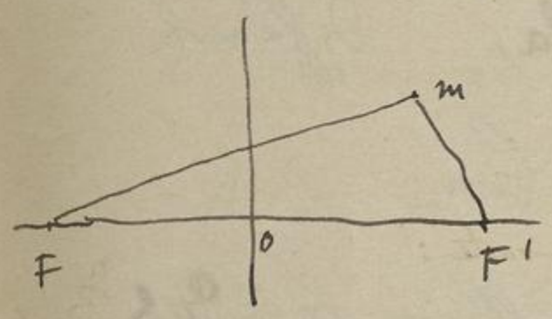
On a, d'après théor sur déterm fonctions $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\gamma)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)} \cdot \frac{\partial(X,Y)}{\partial(\mu,\gamma)}$.

Formons cela : $\begin{vmatrix} 2\mu & 2\gamma \\ \gamma & \mu \end{vmatrix}$, donc $\frac{\partial(X,Y)}{\partial(\mu,\gamma)} = 2(\mu^2-\gamma^2)$.

On a d'ailleurs $\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)} \cdot \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1$, c.à.d. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)} = \frac{1}{\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}}$; or

$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ b & 0 \end{vmatrix} = -2by$. Donc $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\gamma)} = \frac{\gamma^2-\mu^2}{by}$.

Exprimons $\gamma^2-\mu^2$ et by en fonct de γ et μ.



Considr pour cela le point m. L'éq de la 1ère conic est celle d'une ellipse dont foyers sur ox à dist b du centre O : $OF = OF' = b$, le demi-grand axe est μ, donc $\mu = \frac{1}{2}(mF+mF')$

La 2e conq est hyperb ayant pour foyers F et F', et γ est son demi-grand axe, donc $\gamma = \frac{1}{2}(mF-mF')$

by est la surf. du tri. FMM', car b demi-base, γ hauteur

Soit S sa surf, p le demi-périmètre on a

$S = \sqrt{p(p-FF')(p-mF)(p-mF')}$, car quant sont $b+\mu$, $\mu-b$, $b-\gamma$, $b+\gamma$. Donc $S = \sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\gamma^2)} = by$

(Cette valeur de by se trouve d'ailleurs immédiatement par les équat $\mu^2+\gamma^2 = x^2+y^2+b^2$, $\mu^2\gamma^2 = b^2x^2$).

Donc on a $\iint \frac{(\mu^2-\gamma^2)\,d\mu\,d\gamma}{by\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\gamma^2)}}$

car mod $\frac{\gamma^2-\mu^2}{by} = \frac{\mu^2-\gamma^2}{by}$, car $by > 0$ et $\mu^2-\gamma^2$ positif,

d'après les signific ~~de μ et ν~~ géométriques de μ et ν.

On demande les traject orthog des courbes $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, a param arbitr Cissoides. On a $2a = \frac{x(x^2+y^2)}{y^2}$. Ces Cissoides ont pour sommet O et pour tang au sommet Ox, sont homothétiq par rapp à l'origine. La Cissoide est la transf par rayons vecteurs réciproques par rapp. au sommet d'une parabole ayant même axe et même tang de rebroussement que Ox et Oy.

même sommet. Ces parab sont $y^2 = 2px$. Cherch les traj. orth de ces parab $\frac{y^2}{x} = 2p$, prenons les logarithmes: $2Ly - Lx = L2p$, différent $2\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$, c'est l'éq diff des paraboles. L'éq des traj. orth est $x\,dx + y\frac{dy}{2} = 0$, $2x^2 + y^2 = \text{const}$, ce sont des ellipses dont axes suiv. ox et oy, rapp des axes est $\sqrt{2}$, elles sont homoth. Les traj. orth des coniques sont les transf des ~~traj. orth~~ de ces ellipses par 2 ayons tous vecteurs, d'où

Directem: prenons les logarithmes: $Lx + L(x^2+y^2) - Ly^2 = L\,2a$, différent

$$\frac{dx}{x} + \frac{2(x\,dx + 2y\,dy)}{x^2+y^2} - 2\frac{dy}{y} = 0, \text{ ou bien}$$

$$\frac{dx}{x}(3x^2+y^2) - \frac{2x^2\,dy}{y} = 0, \text{ c'est l'éq diff. des coniques de Steiner}$$

Celles des traj. orth est $\frac{x\,dx}{3x^2+y^2} + \frac{y\,dy}{2x^2} = 0$. Equat homog on pose $\frac{y}{x} = t$, on retrouve le résultat de plus haut.

Lignes asympt de surface engendrée par révolut d'une parabole autour d'une tang. au sommet.

Pour l'éq de la surf coord semi-polaires, l'éq de la courbe méridienne parabolique z en fonct de ρ. $z = k\rho^m$. Quand courbe est parabole ordinaire on a $z = k\rho^{\frac{1}{2}}$. Pour parab-quelc $z = \rho^m$, m entier ou fractionn. $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$. Quand on a x, y, z en fonct de 2 param ρ et ω, l'équat est

$A\,d\rho^2 + 2B\,d\rho\,d\omega + C\,d\omega^2 = 0$, où on a

$$A = \rho\frac{\partial^2 x}{d\rho^2} + 2\frac{d^2y}{d\rho^2} - \frac{d^2z}{d\rho^2}, \quad B = \rho\frac{\partial^2 x}{\partial\rho\,d\omega} + 2\frac{d^2y}{d\rho\,d\omega} - \frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,d\omega}$$

$$C = \rho\frac{d^2x}{d\omega^2} + 2\frac{d^2y}{d\omega^2} - \frac{d^2z}{d\omega^2}.$$

on a $\frac{dz}{d\rho} = p\frac{dx}{d\rho} + q\frac{dy}{d\rho}$, $\frac{dz}{d\omega} = p\frac{dx}{d\omega} + q\frac{dy}{d\omega}$

Ecriv. dér. $\frac{dz,x,y}{en}$ ρ , ω , ρ^2 , $\rho\omega$, ω^2 — on a

z	$mK\rho^{m-1}$	0	$m(m-1)K\rho^{m-2}$	0	0
x	$\cos\omega$	$-\rho\sin\omega$	0	$-\sin\omega$	$-\rho\cos\omega$
y	$\sin\omega$	$\rho\cos\omega$	0	$\cos\omega$	$-\rho\sin\omega$.

Les équat qui donn p et q sont

$mK\rho^{m-1} = p\cos\omega + q\sin\omega$,

$0 = -p\sin\omega + q\cos\omega$ ×

$A = -m(m-1)K\rho^{m-2}$

$B = -p\sin\omega + q\cos\omega$, c.à.d. $B = 0$. ×

$C = -\rho(p\cos\omega + q\sin\omega) = -\rho . mK\rho^{m-1} = -mK\rho^m$

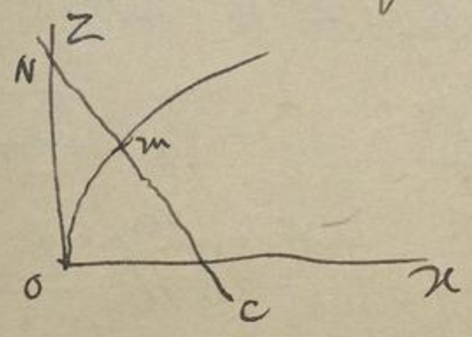
Donc l'équat cherchée est

$m(m-1)K\rho^{m-2}d\rho^2 + mK\rho^m d\omega^2 = 0$; pas de term en $d\rho d\omega$, a priori, en effet, les 2 liz asympt sont sym par rapp à tous plans mérid, car ces plans sont de symétrie. L'éq est

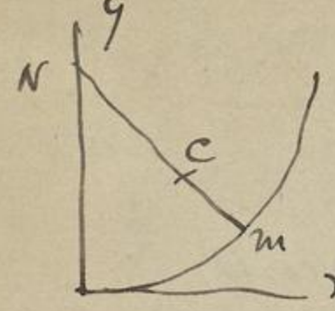
$(m-1)\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\omega^2 = 0$, ou $d\omega = \pm\sqrt{1-m}\,\frac{d\rho}{\rho}$,

d'où $\sqrt{1-m}\,\omega = \pm\rho + C$, $\rho = Ke^{\pm\frac{\omega}{\sqrt{1-m}}}$, spirale logarithmique. Pour qu'elles soient réelles, il faut $1 > m$.

si $1 < m$, pas de liz asympt, c.à.d. que la surf est convexe et l'indic est une ellipse ou peut le prévoir : ~~la surf~~ si $m < 1$, la parab pré. convexité vers OZ, Cherch les 2 centr de courb principaux : l'un de sect est méridienne, son centre est en C, sur la normale MN au-dessous de M. L'autre cent, dans sect norm perp au plan méridien et en N, surf à courb opposées, liz. asympt



Si $1 < m$, les centres sont en C et N d'un même côté,



ces surf convexe ; et par de ligne asympt

Sous $m = \frac{1}{2}$, on a $p = ke^{\pm 2\omega}$.

On donne un paraboloïde ellipt. $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, on construit sur ce parab les courbes déf par const que normale fait angle const γ avec Oz, on demande proj. sur xOy et l'aire de la calotte correspondante découpée par ces courbes sur surf. du paraboloïde

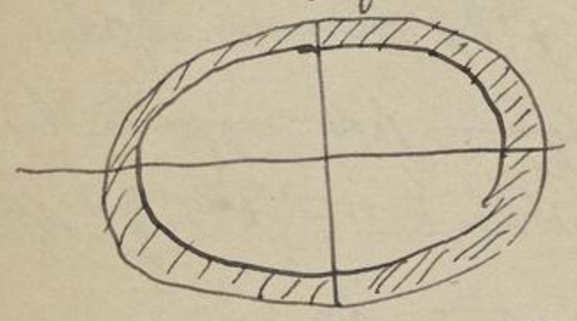
$p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, on a $tg^2\gamma = p^2 + q^2$

$p = \frac{2x}{a}$, $q = \frac{2y}{b}$, donc l'éq cherchée est

$\frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} = tg^2\gamma$, ellipses dont axes sont $\frac{a\,tg\gamma}{2}$, $\frac{b\,tg\gamma}{2}$.

Si on proj. la courbe sur le plan des xy, elle a cette équat

Aire de la calotte. Sous cela, calcul aire de l'ellipse, $\frac{\pi}{4} ab\, tg^2\gamma$. À γ donnons accr inf petit $d\gamma$. Considérons l'ellipse qui correspond à $\gamma + d\gamma$, la surf de cette ellipse



est $\frac{\pi}{4} ab\, tg^2(\gamma + d\gamma)$. Considérons anneau elliptique entre ces surf, quarons-le. On a $\frac{\pi}{4} ab\, d\, tg^2\gamma = \frac{\pi}{4} ab \cdot 2\, tg\gamma \cdot \frac{d\gamma}{\cos^2\gamma}$

$= \frac{\pi}{2} ab \frac{tg\gamma\, d\gamma}{\cos^2\gamma}$. Considérons la portion de surf du parab que se proj. sur cet anneau. En tous ces points le plan tang fait angle inf voisin de γ, donc l'aire projetée est celle de l'espace $\times \cos\gamma$. Donc surf du parab est $\frac{\text{aire corresp projetée}}{\cos\gamma}$, c'est donc

$\pi \frac{ab}{2} \frac{tg\gamma\, d\gamma}{\cos^3\gamma}$. L'aire totale est l'intégrale de cette quant entre 0 et γ : $S = \int_0^\gamma \pi \frac{ab}{2} \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\cos^4\gamma}$; or la dérivée de $\frac{1}{\cos^3\gamma} = -3 \frac{-\sin\gamma}{\cos^4\gamma} = \frac{3\sin\gamma}{\cos^4\gamma}$. Donc $S = \int_0^\gamma \frac{\pi ab}{6} d \cdot \frac{1}{\cos^3\gamma}$

$$= \left(\frac{\pi ab}{6\cos^3\gamma}\right)_0^{\gamma} = \frac{\pi ab}{6}\left(\frac{1}{\cos^3\gamma} - 1\right).$$

On donne 2 fonct de x ~~x~~, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, leurs dérivées sont $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$. Intégrer les équat simultanées

$$\frac{dy}{dx} + \varphi'(x)\, y - \psi'(x)\, z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + \psi'(x)\, y + \varphi'(x)\, z = 0 .$$

Equat linéaires on peut élim z ou ~~les~~ différents par la 1ère obtenue. Donc on a éq linéaire du second ordre. Donc rappr à x ~~y~~, l'int génér. sera $y = A_1 y_1 + A_2 y_2$, $z = A_1 z_1 + A_2 z_2$, $y = y_1$ $z = z_1$, $y = y_2$ $z = z_2$ étant 2 intég particuliers.

Mais cherch à simplif ces 2 équat on a $\frac{dy}{dx} + \varphi'(x).y$ et $\frac{dz}{dx} + \varphi'(x)\, z$. On peut faire disparaître $\varphi'(x)y$, $\varphi'(y)z$, en chang de variable et posant $x = e^{-\varphi} Y$, $z = e^{-\varphi} Z$.

On a $e^{-\varphi}\frac{dY}{dx} - \psi' e^{-\varphi} Z = 0$, la 2e donne

$$e^{-\varphi}\frac{dZ}{dx} + \psi' e^{-\varphi} Y = 0 .$$ On peut diviz par $e^{-\varphi}$,

donc $\frac{dY}{dx} - \psi' Z = 0$, $\frac{dZ}{dx} + \psi' Y = 0$. On peut amener les coef à être const, en divisant par ψ'; prenons pour variable ψ à la place de x, ~~prenons~~ on a

$$\frac{dY}{d\psi} - Z = 0, \quad \frac{dZ}{d\psi} + Y = 0,$$ coef constants, la forme de l'intég est connue; int particulière $Y = \alpha e^{\lambda\psi}$

$Z = \beta e^{\lambda\psi}$, α, β, λ étant const convenables. Substituons

$e^{\lambda\psi}(\alpha\lambda - \beta) = 0$, $e^{\lambda\psi}(\beta\lambda + \alpha) = 0$. Elim α et β on a

éq. en λ : $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$. Alors $\beta = \pm\alpha i$

Donc $Y = A_1 e^{i\psi} + A_2 e^{-i\psi}$, on fait. $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$ successivement
$\lambda = i$ $\lambda = -i$

$Z = A_1 i e^{i\psi} - A_2 i e^{-i\psi}$. Il faut y et z , on a

$y = A_1 e^{-\varphi + i\psi} + A_2 e^{-\varphi - i\psi}$

$z = A_1 i e^{-\varphi + i\psi} - A_2 i e^{-\varphi - i\psi}$.

on peut aller plus vite , connaissant la forme de l'intégrale il suffit de connaître 2 intégrales particulières $y_1 z_1$, $y_2 z_2$.

On a $y = e^{\lambda}$, $z = \beta e^{\lambda}$, β étant une constante, λ une fonction de x à choisir convenablement. Substituons en dif. par e^{λ}.

$\lambda' + \varphi' - \psi'\beta = 0$, $\beta\lambda' + \beta\varphi' + \psi' = 0$. Elim. β

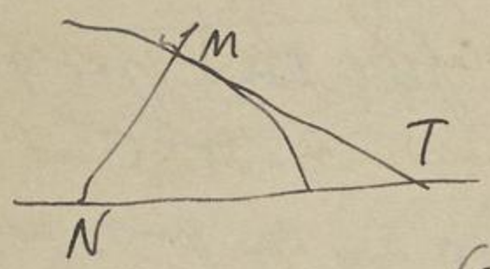
$(\lambda' + \varphi')^2 + \psi'^2 = 0$, d'où $\lambda' + \varphi' = i\psi'$,

$\lambda' + \varphi' = -i\psi'$; d'où $\lambda = -\varphi + i\psi$, $\lambda = \varphi - i\psi$. Cherchons alors β,

$\beta = i$ et $\beta = -i$. On trouve les solutions particulières

---

Détermination la courbe telle que le triangle TMN dont les côtés sont. la tangente la normale et l'axe des x ait une aire constante.



Equations différentielles simultanées :

$du = (3u + 2v)\,dx + (2u + 12v)\,dy$

$dv = (u + 2v)\,dx + (u + v)\,dy$

Trajectoires orthogonales des courbes déf en coord pol-par

$\rho^2 = a^2 \log \operatorname{tg} \omega + c$, c paramètre variable

---

Lignes de courbure de surface $e^z = \cos x \cos y$.

De là on tire $z = L\cos x + L\cos y$; lignes de courbure définies par

$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$. On peut avoir p et q , puisque

" z est " fonction de x + fonction de y . On a $p = \operatorname{tg} x$, $q = \operatorname{tg} y$.

$dp = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $dq = \frac{dy}{\cos^2 y}$, $p\,dz = p^2 dx + pq\,dy$, d'où

$dx + p\,dz = (1+p^2)\,dx + pq\,dy$, et $dy + q\,dz = (1+q^2)\,dy + pq\,dx$.

$$\frac{\frac{dx}{\cos^2 x} + pq\,dy}{\frac{dx}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{dy}{\cos^2 y} + pq\,dx}{\frac{dy}{\cos^2 y}}, \text{ ou}$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x}\cdot\frac{dy}{\cos^2 y} + pq\,\frac{dy^2}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\cos^2 x}\cdot\frac{dy}{\cos^2 y} + pq\,\frac{dx^2}{\cos^2 x}$$

Il reste $pq\left(\frac{dy^2}{\cos^2 y} - \frac{dx^2}{\cos^2 x}\right) = 0$, d'où $\frac{dy^2}{\cos^2 y} = \frac{dx^2}{\cos^2 x}$,

$\frac{dy}{\cos y} = \pm\frac{dx}{\cos x}$, variables séparées. Donc $\int\frac{dy}{\cos y} = \pm\int\frac{dx}{\cos x} + K$.

Si on change x en $-x$, $\int\frac{dx}{\cos x}$ change de signe, donc les 2 syst de liz de courb sont symét par rapp aux plans de Coord. On a un quadrant trié-simple

---

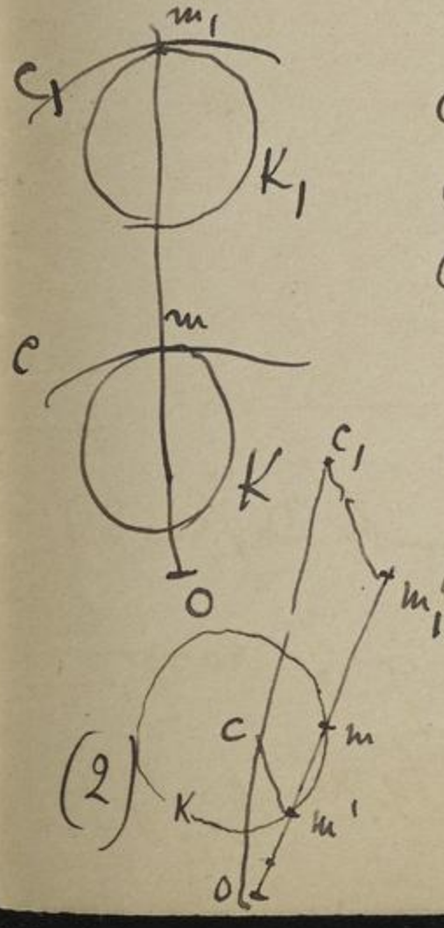
Déform courbe C telle que, en la transf. par ray vect réciproques les rayons de courbure aux 2 points correspondants de C et C_1 soient dans rapp constant

Si on prend un cercle C, sa transf est un cercle, les 2 ray de courb const., leur rapp constant

Cette solut est évid. Y en a-t-il d'autres ? Soient deux courbes C et C_1 répondant à la question, m et m_1 deux points correspondants Const les cercles osculat en m et m_1 : Soient K et K_1,

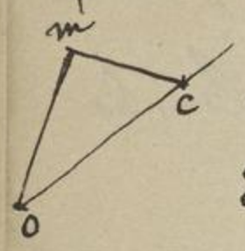
Il faut rapp de leurs rayons const, d'où K et K_1, sont transf. l'un de l'autre par ray vect réciproque. Il faut puis. de O constante : Cas soient C et C_1 les centres des 2 cercles osculat; ils sont m' 2e inters de K avec om. puis. de O par ray à K et $om \cdot om'$,

Or par hypoth $om \cdot om_1 = K^2$; d'autre part les ray de cercles en m, m_1 parall. ont leur extrém en ligne droite avec O. Donc $\frac{om'}{om_1} = K'$, K' étant le rapport donné des rayons de courbure. Leur rapport est constant, d'après l'énoncé.



D'où $om' \cdot om = K^2 K' = const$ K'' Telle est la condit : Or la puiss d'un point est $\rho^2 - r^2$. Il ne peut y avoir que le cercle jouissant de cette propriété

En effet, connaît C centre de courbure relatif au point m de la courbe cherchée Γ (c'est O), le lieu des centres de cercles osculateurs est la développée de la courbe Γ ; si cette courbe Γ n'est pas un cercle, la dével. n'est pas un point et je dis qu'alors la puiss ne peut être constante. En effet on a $OC^2 - mC^2$ pour puissance (Si m' point infiniment voisin de m, normale m'C'. On doit avoir $\overline{OC'}^2 - \overline{m'C'}^2 =$ $\overline{OC'}^2 - \overline{mC'}^2 = K''$. Or $OC' = OC + d.OC$, $mC' = mC - d.mC$, les puiss sont égales donc il faut $OC \cdot d.(OC) = mC\, d.(mC)$. Or de C' menons perp sur OC, AC est $d.OC$; accroissement infiniment petit de mC est CC', Donc il faut



$OC \cdot AC = mC \cdot CC'$, ou $\frac{mC}{OC} = \frac{AC}{CC'} = \cos C$, donc $mC = OC \cdot \cos C$, et le tri. (moc) ou $m'OC$ est rect en m', donc mO doit être perp à la normale, c.à.d. être la tangente en m. Résultat absurde : toutes les tang à la courbe C devraient passer en O. Il n'y a donc que le cercle pour solution

Carrefour de l'Odéon, 4.

Poincaré

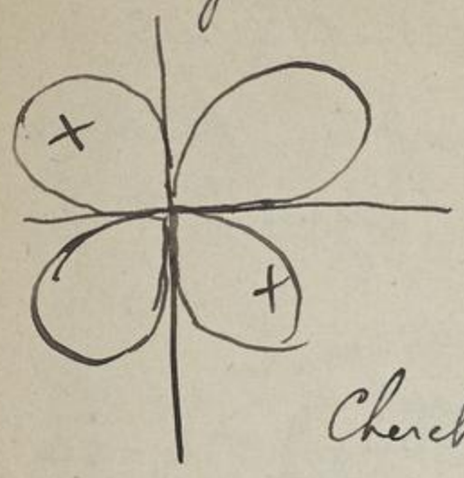
Analyse

M. Poincaré.

IV

M. Müntz.

Trajectoires orthogonales de $(x^2+y^2)^2 = axy$; lemniscates



Les tang en O sont ox et oy ; si a imag, on a les lemn +.

Transf par ray vect récip, leurs transf sont hyperboles équilatères $xy = a^2$, asympt aux axes.

Cherch. en les traj. orth : différentions $x\,dy + y\,dx = 0$, ou $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$, et les traj. orth sont $y\,dy - x\,dx = 0$, $y^2 - x^2 = \text{const}$, hyperboles équilat ayant pour asympt $y = \pm x$. Il faut les transform inversion on trouve une nouvelle série de lemniscates ayant point double en O et dont tang en O sont $y = \pm x$: ce sont $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \text{const}$

Rapproch cela des fonct de var imag. Consid la variable $x+iy$, et consid $(x+iy)^2$, cette fonct peut s'écrire $x^2 - y^2 + 2ixy$, les lign pour lesq partie imag const sont $xy = a^2$, celles pour lesq. partie réelle const sont $x^2 - y^2 = \text{const}$. Ces 2 syst de lignes se coupent à angle droit, on le sait

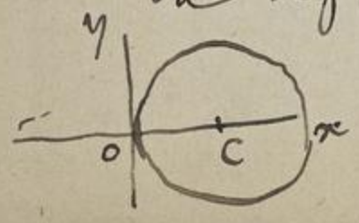
On peut traiter de même $(x^2+y^2)^2 = axy$. Consid

$$\frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - 2i\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},$$

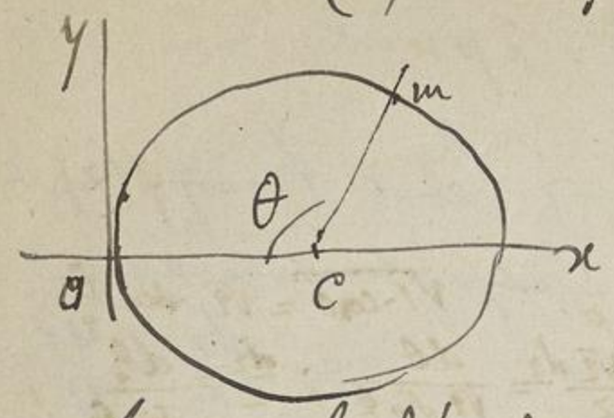
Les coubes $\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} = \text{const}$ et $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \text{const}$ se coupent à angle droit. Ce sont les lemniscates vues plus haut. Par analyt ordin on a équat homog en x et y.

On demande lignes asymptotiques de la surface définie de la façon suiv. On donne coube C dans zox. Une surf S est engend par circonf dont plan paral à xoy, dont centre décrit C et qui rencontre oz.

Soit pour vari. indépen z et θ un angle θ qu'on va définir. Si z est donné, on a une circonf dont centre C en proj. sur xoy est sur ox ; prenons en effet un plan z paral à xoy il coupe surf suiv. circonf (d'après génér. de surf), cette circonf rencontre oz, donc elle passe en O. Son centre est à l'intersection du plan par coube C



Soit (C) $x = \varphi(z)$. Coord un point m de la circonf, et $\theta = \text{ocm}$.



Les coord sont $z = z$, $x = \varphi(z) - \varphi(z)\cos\theta$,
$y = \varphi(z)\sin\theta$. On a les coord en fonct de 2 param z et θ. Les lignes asympt sont

$$A\,dz^2 + 2B\,dz\,d\theta + C\,d\theta^2 = 0$$

formons les dér. des différ. ordres de x, y, z par rapp à z et θ

	z	θ	z^2	$z\theta$	θ^2
x	$\varphi'(1-\cos\theta)$	$\varphi\sin\theta$	$\varphi''(1-\cos\theta)$	$\varphi'\sin\theta$	$\varphi\cos\theta$
y	$\varphi'\sin\theta$	$\varphi\cos\theta$	$\varphi''\sin\theta$	$\varphi'\cos\theta$	$-\varphi\sin\theta$
z	1	0	0	0	0

Cherch à exprim p et q : $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$; ~~par cela, l'équat~~ ~~$\varphi(1-\cos\theta)$ par rapp à z et $\varphi'\sin\theta$ par rapp à θ~~ ~~$x = \varphi(z) - y\sin\theta$~~

$1 = p\,\varphi'(1-\cos\theta) + q\cdot\varphi'\sin\theta$ (car on a $z = f(x,y) = F(z,\theta)$, x et y sont fonct de z et θ, et l'on a $\frac{dz}{dz} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = p\frac{\partial x}{\partial z} + q\frac{\partial y}{\partial z} = p\varphi'(1-\cos\theta) + q\varphi'\sin\theta$). De même

$\frac{dz}{d\theta} = 0 = p\varphi\sin\theta + q\varphi\cos\theta$, on peut div. par φ.

$$A = p\frac{d^2x}{dz^2} + q\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{d^2z}{dz^2} = p\varphi''(1-\cos\theta) + q\varphi''\sin\theta - 0$$

$$B = p\frac{d^2x}{dz\,d\theta} + q\frac{d^2y}{dz\,d\theta} - \frac{d^2z}{dz\,d\theta} = p\varphi'\sin\theta + q\varphi'\cos\theta - 0$$

$$C = p\frac{d^2x}{d\theta^2} + q\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{d^2z}{d\theta^2} = p\varphi\cos\theta - q\varphi\sin\theta - 0$$

ou, d'après les 2 prem équat, $p(1-\cos\theta) + q\sin\theta = \frac{1}{\varphi'}$,

et $p\sin\theta + q\cos\theta = 0$, il vient

$$A = \frac{\varphi''}{\varphi'}\,, \qquad B = 0\,, \qquad C = \frac{-\varphi}{\varphi'(1-\cos\theta)}\,,$$

car $p = \frac{1}{\varphi'} + p\cos\theta - q\sin\theta$, d'où $p\cos\theta - q\sin\theta = p - \frac{1}{\varphi'}$; d'après

en mult par $-\cos\theta$ la 1ère éq. en haut et ajout. $-\cos\theta = -p\varphi'\cos\theta + p\varphi'$,

d'où $p\varphi' = +\frac{\cos\theta}{-1+\cos\theta}$, $p - \frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{\varphi'}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta - 1} - 1\right) = \frac{1}{\varphi'}\frac{1}{\cos\theta - 1}$

Donc $\frac{\varphi''\,dz^2}{\varphi'} = \varphi\frac{d\theta^2}{\varphi'(1-\cos\theta)}$, telle est l'équat séparée des variables

$\sqrt{\frac{\varphi''}{\varphi}}\,dz = \frac{d\theta}{\pm\sqrt{1-\cos\theta}}$. Cas particul où C est une parabole ayant o pour sommet et ox pour axe. $z^2 = 2px$,

$\varphi(z) = \frac{\sqrt{z}}{2p}$, $\varphi' = \frac{1}{4p\sqrt{z}}$, $\varphi'' = -\frac{1}{\sqrt{z^3}}\frac{1}{8p}$ $x = \frac{z^2}{2p} = \varphi(z)$

$\varphi'(z) = \frac{z}{p}$, $\varphi'' = \frac{1}{p}$. $\sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}$.

$\sqrt{\frac{\varphi''}{\varphi'}}$ se réduit à $\frac{k\,dz}{2} = \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}$ Donc $\sqrt{\frac{1}{p}\frac{2p}{z^2}}dz = \frac{\sqrt{2}}{z}dz = \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}$; $\frac{dz}{z} = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$,

$Lz = L\,tg\frac{\theta}{4} + Lc$, $z = c\,tg\frac{\theta}{4}$.

Lignes géodésiques sur une surf de révolution. Plan osculat normal à la surf. Elles sont la plus courte dist d'un point à un autre — on peut partir de l'une ou l'autre définit sur la 1ère. Coord semi-polaires, $z = f(\rho)$. Pour déf une courbe sur cette surf il faut se donn ρ en fonct de ω, ou mieux ici ω en fonct de ρ. Il faut exprim x, y, z en fonct d'un seul param qui ici sera ρ. On a $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $z = f$; x', y', z', ω', ω'' — les dér. de ω par rapp à ρ ; dér. de x, y, z par rapp à ρ. On a tableau des dérivées

$x' = \cos\omega - \omega'\rho\sin\omega$, $y' = \sin\omega + \omega'\rho\cos\omega$, $z' = f'$

$x'' = -\omega'\sin\omega - \omega'\sin\omega - \omega'^2\rho\cos\omega - \omega''\rho\sin\omega$

$x'' = -2\omega'\sin\omega - \omega'^2\rho\cos\omega - \omega''\rho\sin\omega$, $y'' = 2\omega'\cos\omega - \omega'^2\rho\sin\omega + \omega''\rho\cos\omega$ $z'' = f''$.

$$\begin{vmatrix} X-x & x' & x'' \\ Y-y & y' & y'' \\ Z-z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0 .$$ Normale $\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$.

Exprim que normale est dans le plan osculateur

$$\begin{vmatrix} p & x' & x'' \\ q & y' & y'' \\ -1 & z' & z'' \end{vmatrix} = 0 .$$ C'est l'éq différ. des courbes cherchées.

Calcul. p et q. On a

$f' = p\cos\omega + q\sin\omega$, $0 = -p\sin\omega + q\cos\omega$, d'où p et q.

On substitue Mais calcul long on peut le simplifier ; toutes les de révolut autour de oz, équat ne contient pas ω ; elle ne contient que ω', ω'' — faisons donc $\omega = 0$. On a alors

$$\begin{vmatrix} f' & 1 & -\omega'^2\rho \\ 0 & \omega'\rho & 2\omega'+\omega''\rho \\ -1 & f' & f'' \end{vmatrix} = 0 .$$ Développons :

$$f'(\omega'\rho f'' - 2\omega' f' - f'\omega''\rho) + 2\omega'+\omega''\rho+\omega'^3\rho^2 = 0$$

$$-\omega'^3\rho^2 + f'f''\omega'\rho - (2\omega'+\omega''\rho)(1+f'^2) = 0.$$

Il faut intégrer. On a $1+f'^2+\omega'^2\rho^2$ pour différentielle de l'arc.

On est conduit à écrire ainsi

$$(2\omega'+\omega''\rho)(1+f'^2+\omega'^2\rho^2) - 4\omega'^3\rho^2 - \omega''\omega'^2\rho^3 - f'f''\omega'\rho = 0$$

Divisons par $\omega'\rho(1+f'^2+\omega'^2\rho^2)$. Il vient

$$\frac{2}{\rho} + \frac{\omega''}{\omega'} - \frac{\omega'^2\rho + \omega''\omega'\rho^2 - f'f''}{1+f'^2+\omega'^2\rho^2} = 0 .$$ Le numér. du 2e terme

est la moitié de la dérivée du dénominateur par rapp à ρ.

Intégrons $2L\rho + L\omega' - \frac{1}{2}L(1+f'^2+\omega'^2\rho^2) = LK$

ou bien $$\frac{\rho^2\omega'}{\sqrt{1+f'^2+\omega'^2\rho^2}} = K .$$ On n'a plus que ω' et ρ

on peut résoudre par rapp à ω', $\omega' = \varphi(\rho)$, et il

reste $\omega = \int \varphi(\rho)\,d\rho$, simple quadrature

Le même procédé applicable au cas où surf engend par mouvem hélicoïdal

La 2e défin des lig géodés donne immédiatem la 1ère intégrale qu'on vient de voir.

Etant donnée l'égat aux dérivées partielles

$$x\frac{dz}{dx} + xy\frac{dz}{dy} = x+y+xy+y^3 ,$$ trouver l'intégr générale, et celle des intégr particulières qui demeure holomorphe pour $x=y=0$.

On donne l'éq $2abxy\,dx\,dy + b^2y^2\,dy^2 =$
$= (ax^3 + aby^2 + bxy^2 - x - a)\,dx^2$ on demande si cette équation a une intégrale singulière et quelle elle est —

Trouver une surface de révolution telle que l'un des rayons de courbure principaux soit proportionnel au cube de l'autre —

Lignes géodésiques d'une surface de révolution (suite).

$z = f(\rho)$. On a donné les 2 définitions de ces lignes. On est parti de la définition que plan osculateur est normal à surface et on a arrivé en l'éq différentielle — Mais on va plus vite par la 2ème : plus court chemin, on arrive immédiatement à l'éq du 1er ordre en $\frac{dw}{d\rho}$. Il faut pour cela établir lemme utile dans toutes les questions analogues. Soit une fonction y de x assujettie seulement à la condition que $\int_a^b f(x) y\,dx = 0$, $f(x)$ étant une fonction donnée de x : je dis que si $\varphi(x)$ est telle que, alors, on ait $\int_a^b \varphi(x)\, y\, dx = 0$, le rapport $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est une constante. Si nous rapprochons ce théorème du suivant : $y_1 y_2 \cdots y_n$ étant des quantités inconnues, $A_1 A_2 \cdots A_n$, $B_1 \cdots B_n$ des coefficients connus, pour que $\Sigma A y = 0$, $\Sigma B y = 0$ soient équivalentes il faut et il suffit $\frac{A}{B} = \text{const}$ on voit que le théorème précédent en résulte en augmentant indéfiniment le nombre des quantités. Mais voici une démonstration plus rigoureuse. Soient entre a et b des quantités $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \cdots$ telles que $a < \alpha < \beta < \alpha' < \beta' < b$, je dis que $\frac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx} = \frac{\int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx}{\int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(x)\,dx}$; en effet assujettissons y à être constante δ entre a et α,

puis y_1 dans 2e inter, puis 0, dans 3e, y_2 dans 4e, 0 dans 5e, on a $\int_\alpha^\beta f(x)\,y\,dx = y_1 \int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx$

$$y_2 \int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx \quad .$$

Donc la 1ère éq est $y_1 \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + y_2 \int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx = 0$

La 2e est $y_1 \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx + y_2 \int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(x)\,dx = 0$.

Les 2 relat contien donc seulem deux inconnues y_1 et y_2 en dehors du signe somme . 2 éq du 1er degré à 2 incon, elles doivent être équivalentes donc $\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx} = \dfrac{\int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx}{\int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(x)\,dx}$.

Donc le rapp est indépend des limites $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, quelles que soient ces limites, l'égalité des 2 rapp a toujieu donc $\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx} = K$; or, comme on sait, $\dfrac{(\beta-\alpha) f(\xi)}{(\beta-\alpha)\varphi(\xi_1)} = K$

ξ entre α et β ainsi que ξ_1 . Aussi quelles que ~~soient~~ soient α et β, on a cette ~~tout~~ égalité. on en déduit $f(\xi) = K\varphi(\xi_1)$

si f et φ sont continues, quand α et β tendent vers une même limite x, $f(\xi)$ ~~qui est~~ tend vers $f(x)$, et $f(\xi_1)$ également ; on a donc $f(x) = K\varphi(x)$, donc le rapp $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ est une constante . Donc . c.q.f.d.

Cela était presqu évident à l'avance

2e lemme. Suppos fonct y satisfaisant à $\int_a^b F(x,y)\,dx = 0$ purement et simplement, consid.

$\int_a^b F_1(x,y)\,dx$. Quelle est la condt pour que cette 2e intégr soit un maximum ou un minimum ? C'est $\frac{\frac{dF_1}{dy}}{\frac{dF}{dy}} = \text{Const. } K.$

En effet, substituons à y une fonct $\varphi(x,t)$, t paramètre arbitraire quelconque, et supp. que, pour $t=0$, cette fonct φ se réduise à y, et qu'elle satisfasse à $\int_a^b F(x,y)\,dx = 0$ quel que soit t ; considérons $\int_a^b F_1(x,\varphi)\,dx$, cette intégr est fonct de t ; pour $t=0$, φ se réduit à y, donc $\int_a^b F_1(x,y)\,dx$ se réduit à un minimum dont est un max. ou un minim pour $t=0$, c.à.d, en appliq la règle des maxim et minim ce qui se fait ici par un différentiat sous signe $\int \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{dF_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$, pour $t=0$, on a $\frac{dF_1}{dt} = \frac{dF_1}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$; on a donc en différ. sous signe somme, $\int_a^b \frac{dF_1}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\,dx = 0$; φ satisf à $\int_a^b F(x,\varphi)\,dx = 0$, différ. la en t, on a $\int_a^b \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\,dx = 0$. Donc pour un max. ou minim il faut que cette équat. ait lieu quel que soit φ ou $\frac{d\varphi}{dt}$; donc il faut que les 2 équat $\int_a^b \frac{dF_1}{dy}\frac{d\varphi}{dt}\,dx$, et $\int_a^b \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dt}\,dx = 0$ soient équivalentes c.à.d

$$\frac{\frac{dF_1}{dy}}{\frac{dF}{dy}} = K.$$

Cela posé, revenons aux lignes géodés. $\frac{de^2}{2} = f(\rho)$.

Soit ds l'arc infin petit d'une courbe sur surf. 2 points sur surf. ρ_0, ω_0 et ρ_1, ω_1, et une courbe

$\omega = \psi(\rho)$ qui se réduise à ω_0 et ω_1 pour ρ_0 et ρ_1.
Soient m_0, m_1 les 2 points. L'arc inf petit $ds = \frac{ds}{d\rho} d\rho$,
l'arc total $\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{ds}{d\rho} d\rho$. De plus on a $\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\omega}{d\rho} d\rho = \omega_1 - \omega_0$ (constante),
il faut $\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{ds}{d\rho} d\rho = M$(inimum). Posons $\frac{d\omega}{d\rho} = \omega'$. Donc on a
$\int \omega' d\rho = \text{const}$, et il faut $\int s' d\rho = M$, cherch l'expres de s'
en de ds, on a $ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$, donc
$s' = \sqrt{\frac{dz^2}{d\rho^2} + 1 + \rho^2 \omega'^2} = \sqrt{1 + f'^2 + \rho^2 \omega'^2}$, car $z = f(\rho)$, $\frac{dz}{d\rho} = f'$.
Il faut donc $\int \sqrt{1 + f'^2 + \rho^2 \omega'^2}\, d\rho = M$, c'st ω' qu'on veut détermn
Pour cela, écrivons $\frac{\frac{dF_1}{dy}}{\frac{dF}{dy}} = K$, y étant ici la fonct ω',
et F_1 étant $\sqrt{1 + f'^2 + \rho^2 \omega'^2}$. On a donc

$$\frac{\frac{\rho^2 \omega'}{\sqrt{1 + f'^2 + \rho^2 \omega'^2}}}{\frac{d\omega'}{d\omega'}} = K, \quad \text{donc} \quad \frac{\rho^2 \omega'}{\sqrt{1 + f'^2 + \rho^2 \omega'^2}} = A.$$

C'st l'équat obtenue déjà. Poursuivons :

$$\rho^4 \omega'^2 = (1 + f'^2 + \rho^2 \omega'^2) A^2, \quad \rho^2 \omega'^2 (\rho^2 - A^2) = (1 + f'^2) A^2,$$

$$\omega' = \frac{A}{\rho} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{\rho^2 - A^2}}, \quad \omega = \int \frac{A\, d\rho}{\rho} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{\rho^2 - A^2}}$$; la const
étant comprise dans l'intégr indéfinie. Autre la recherche
des lign géodés. et ramenée à une quadrat. Dans le
cas du cône de révolut on a $z = \alpha \rho$, α const
$f' = \alpha$, posons $A\sqrt{1 + \alpha^2} = B$, on a $\omega = B \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - A^2}}$

ou $\omega = \frac{B}{2}\int \frac{2\rho\, d\rho}{\rho^2\sqrt{\rho^2-A^2}} = \frac{B}{2}\int \frac{d(\rho^2)}{\sqrt{\rho^2(\rho^2-A^2)}}$, radic du 2e degré en ρ^2,

on est ramené aux fonct circulaires.

Log géodés. des surf hélicoïdales (on a demandé à la licence pour surf devis à filet carré). Equat de l'hélicoïde $z = f(\rho) + K\omega$, K étant le paramètre, $s' = \sqrt{\frac{dz^2}{d\rho^2} + 1 + \rho^2\omega'^2}$. Cherch $\frac{dz^2}{d\rho^2}$. On a

$\frac{dz}{d\rho} = f' + K\omega'$ donc $s' = \sqrt{(f'+K\omega')^2 + 1 + \rho^2\omega'^2}$. On a la condit

$\int \omega' d\rho = \text{const}$ qui exprim que la courbe est tracée entre 2 points donnés sur la surface. Ecrivons $\int s' d\rho = M$, $\int \sqrt{1+(f'+K\omega')^2+\rho^2\omega'^2}\, d\rho = M$

Diff sous les $\int$ par rapp à ω', il exprim que le rapp des dér. dst const

$$\frac{(f'+K\omega')K + \rho^2\omega'}{\sqrt{1+(f'+K\omega')^2+\rho^2\omega'^2}} = A \quad , \text{ car } \frac{d\omega'}{d\omega'} = 1.$$

C'est là encore une équat différ du 1er ordre où n'entrent que ρ et ω'. Résolv par rapp à ω', $\omega' = \varphi(\rho)$, $\omega = \int \varphi(\rho)\, d\rho$, le problème est ramené à une quadrature.

Si $f' = 0$, on a $z = K\omega$ pour équat de l'hélicoïde. L'éq précéd devient

$$\frac{K^2\omega' + \rho^2\omega'}{\sqrt{1+(K^2+\rho^2)\omega'^2}} = A \; ; \text{ élevon au carré,}$$

$$(\rho^2+K^2)^2\omega'^2 = A^2(\rho^2+K^2)\omega'^2 + A^2 \; , \quad \omega' = \frac{A}{\sqrt{(\rho^2+K^2)(\rho^2+K^2-A^2)}} \; ,$$

$$\omega = A\int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2+K^2)(\rho^2+K^2-A^2)}} \; , \text{ intégrale elliptique ; } \rho = \text{fonct elliptique de } \omega.$$

on a $\rho = \alpha\, sn(\beta\omega+\gamma)$.

~~Pour la~~ On peut chercher log géod de l'autre surf hélicoïdale $z = f(\rho) + K\omega$ en partant de l'autre définition savoir que le plan osculat de ces lignes est constamment normal à la surface $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $z = f(\rho) + K\omega$; suppr. x, y, z pour exprimer en fonct de ρ. Form x'_ρ, x''_{ρ^2}, y'_ρ, y''_{ρ^2} —

$x' = \rho\cos\omega - \rho\omega'\sin\omega = 1$

$y' = \sin\omega + \rho\omega'\cos\omega = \rho\omega'$ pour $\omega = 0$.

$z' = f' + K\omega'$.

Cherch x'', y'', z'', on remarq qu'à l'ég. différ. ne contenant pas ω, supposons immédiatem $\omega = 0$, $\sin\omega = 0$, $\cos\omega = 1$.

$x'' = -\rho\omega'^2$, car $\cos\omega = 1$.

$y'' = 2\omega' + \rho\omega''$

$z'' = f'' + K\omega''$

Cherch p et q $\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)$. La norm

et $\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$; exprim que le plan osculat passe par la normale, il faut p et q.

Remarq $\frac{dz}{d\rho} = f' = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\rho} = p + q\sin\omega$, $\sin\omega = 0$.

$\frac{dz}{d\omega} = K = \qquad\qquad = p + q\rho$, $q = \frac{K}{\rho}$.

Ecriv. la Condit. que la norm et dans le plan osculateur

$$\begin{vmatrix} p & x' & x'' \\ q & y' & y'' \\ -1 & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & 1 & -\rho\omega'^2 \\ \frac{K}{\rho} & +\rho\omega' & 2\omega' + \rho\omega'' \\ -1 & f' + K\omega' & f'' + K\omega'' \end{vmatrix} = 0 ,$$

équat en ω''. On développe

$f'\rho\omega'(f'' + K\omega'') - 2\omega' + \rho\omega'' - K\omega'^2(f' + K\omega') - \rho^2\omega'^3 - f'(f' + K\omega')(2\omega' + \rho\omega'')$

$- \frac{K}{\rho}(f'' + K\omega'') = 0$. On peut intégrer et obtenir forme vue plus haut — Calcul long. Suppr surf de vis à filet carré, alors simplifications. On a $-(2\omega' + \rho\omega'') - K\omega'^2 - \rho^2\omega'^3 - \frac{K^2\omega''}{\rho} = 0$.

Cherch à introd l'arc $(\rho^2 + K^2)\omega'^2 + 1$. On a

(Tout cela est exact et ne doit pas être barré).

$\left[(\rho^2+K^2)\omega'^2+1\right]\omega' + \omega' + \frac{K^2}{\rho}\omega'' + \rho\omega'' = 0$,

$\left[(\rho^2+K^2)\omega'^2+1\right]\rho\omega' + \rho\omega' + K^2\omega'' + \rho^2\omega'' = 0$

ou en multipliant les deux membres par $(\rho^2+K^2)\omega'^2+1$,

ou $\left[(\rho^2+K^2)\omega'^2+1\right]\rho\omega' + \left(\rho\omega' + (\rho^2+K^2)\omega''\right) = 0$

ou en ajoutant et retranch. $\left[\rho\omega' + (\rho^2+K^2)\omega''\right](\rho^2+K^2)\omega'^2$,

$\left[(\rho^2+K^2)\omega'^2+1\right]\rho\omega' + \left[(\rho^2+K^2)\omega'^2+1\right]\left[\rho\omega' + (\rho^2+K^2)\omega''\right] - \left[\rho\omega' + (\rho^2+K^2)\omega''\right](\rho^2+K^2)\omega'^2 = 0$

c.à.d. $\left[(\rho^2+K^2)\omega'^2+1\right]\left[2\rho\omega' + (\rho^2+K^2)\omega''\right] - \left[\rho\omega' + (\rho^2+K^2)\omega''\right](\rho^2+K^2)\omega'^2 = 0$

Divisons tout par $(\rho^2+K^2)\omega' \cdot \left[(\rho^2+K^2)\omega'^2+1\right]$, il vient

$$\frac{2\rho\omega' + (\rho^2+K^2)\omega''}{(\rho^2+K^2)\omega'} - \frac{\rho\omega'^2 + (\rho^2+K^2)\omega'\omega''}{(\rho^2+K^2)\omega'^2+1} = 0 \ .$$

Le numérat. du 1er terme est la dérivée par rapp à ρ de son dénominat.;
le numér. du second terme est la demi-dérivée de son dénominateur

On a donc, en intégrant,

$$\mathrm{L}\,(\rho^2+K^2)\omega' - \frac{1}{2}\mathrm{L}\left[(\rho^2+K^2)\omega'^2+1\right] = \mathrm{L}\,A \ ,$$

d'où $\dfrac{(\rho^2+K^2)\omega'}{\sqrt{(\rho^2+K^2)\omega'^2+1}} = A$; c'est précisément l'équation

obtenue deux pages plus haut.

Puiseux Intégrer $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)$. C'est de la forme

$M\,dx+N\,dy$, M et N étant fonct. de x et de y. Sous que ce soit intégrable, il faut et suffit $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, et alors l'intégrale est

$$\int_{x_0}^{x} M\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy \quad .$$ Ici on a $M=\frac{x^2+xy+y^2}{x(x^2+y^2)}$, $N=-\frac{x^2+xy+y^2}{y(x^2+y^2)}$

ou $M=\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2+y^2}$, $N=-\frac{1}{y}-\frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{x^2+y^2-2y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial N}{\partial x}=$ idem. Or on a

$$\int M\,dx=Lx+\int\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}dx=Lx+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y},$$

$$\int N\,dy=-Ly-\operatorname{arctg}y+C \quad (\text{en faisant } x_0=1);$$

donc on a $Lx-Ly+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C$, en remarq. que $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ et $\operatorname{arctg}y$ ne diffèrent que par une constante.

On peut faire autrem. $\left(1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)$,

ou $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$, ou $Lx-Ly+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C$.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$dx=\frac{\begin{vmatrix} du & \frac{\partial u}{\partial y} \\ dv & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

$$A\,du+B\,dv=0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}dx=\begin{vmatrix} du & \frac{\partial u}{\partial y} \\ dv & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0$$

$u\to v$ Que représente l'équat $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\text{Const}$ quand C varie ? Ces courbes sont sym. par rap à bissectr de l'angle des axes et tang aux axes.

$x+y+2\sqrt{xy}=C$, $(x+y-C)^2=4xy$, $x^2+y^2-2xy-2C(x+y)+C^2=0$

$(x-y)^2-2C(x+y)+C^2=$

paraboles. Leur éq. diffel. est $\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$. On intégre de nouveau

$x^{-\frac{1}{2}}dx + y^{-\frac{1}{2}}dy$, $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = C$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = c$.

Somme de la série $y = \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \cdots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \cdots$.

Dérivons, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \cdots + \frac{x^{n-1}}{n+1}$.

or $L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - +$

$L(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$.

$L\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \cdots$.

~~On voit alors que~~ $dy = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} L\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$y + x\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = L\frac{1}{1-x}$,

donc $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y - \frac{1}{x} L\frac{1}{1-x} = 0$, c'est de la forme $\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y + \frac{1}{x} L(1-x) = 0$, or $y = e^{-\int_{x_0}^{x} P dx}\left(C - \int_{x_0}^{x_1} Q e^{\int_{x_0}^{x} X dx} dx\right)$

Résoudre $du = (3u + 12v)dx + (2u + 12v)dy$

$dv = (u + 2v)dx + (u + v)dy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3u + 12v$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial x} = u + 2v$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2u + 12v$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial y} = u + v$

D'où intégre les 2 dern. en consid. u et v comme fonct seulem de y.

~~$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = u + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = v$~~ Ren les 2 derniers,

multiplions la 2e par λ et ajoutons

$\frac{du}{dy} + \lambda\frac{dv}{dy} = (2+\lambda)u + (12+\lambda)v$. Etablissons un instant u et v (D'Alembert)

comme s'ils ne contenaient que y. On a ici doit avoir

$\frac{2+\lambda}{1} = \frac{12+\lambda}{\lambda} = K$ d'où $\lambda = K - 2$, portons dans 2e équat

$\frac{12 + K - 2}{K - 2} = K$, $K^2 - 3K - 10 = 0$, $K - 2 + 5$, les val. correspdt

sont $\lambda = -4$ - Alors l'équat plus haut devient pour $\lambda = 3$

$\frac{\partial}{\partial y}(u+3v) = 5(u+3v)$. on tirera delà $u+3v$ en fonct de y.

on connaît u et v comm fonct seulem de y; on fera varier la constante arbitraire $\frac{d(u+3v)}{u+3v} = 5\,dy$

$L(u+3v) = 5y$, $u+3v = C_1 e^{5y}$.

4 Pour $\lambda = -4$, $\frac{\partial(u-4v)}{\partial y} = -2(u-4v)$,

3 $u-4v = C_2 e^{-2y}$. D'où u et v ;

$u = \frac{4C_1}{7} e^{5y} + \frac{3C_2}{7} e^{-2y}$ $\quad v = \frac{C_1}{7} e^{5y} - \frac{C_2}{7} e^{-2y}$.

Il faut que u et v satisfass aux 2 prem équat (on peut supposer les dénom 7 dans les const arbtes)

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3u + 12v$, $\frac{\partial v}{\partial x} = u + 2v$. On subst les val précéd

en faisant varier C_1 et C_2.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4}{7} e^{5y} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{3}{7} e^{-2y} \frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{24}{7} e^{5y} - \frac{3}{7} C_2 e^{-2y}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{5}{7} e^{5y} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{1}{2} e^{-2y} \frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{6}{7} C_1 e^{5y} + \frac{1}{7} C_2 e^{-2y}$.

Elim $\frac{\partial C_2}{\partial x}$. on a $\quad = 6 C_1 e^{5y}$

$C_1 = A_1 e^{6x}$. Elim $\frac{\partial C_1}{\partial x}$, on mult la 2e par -4,

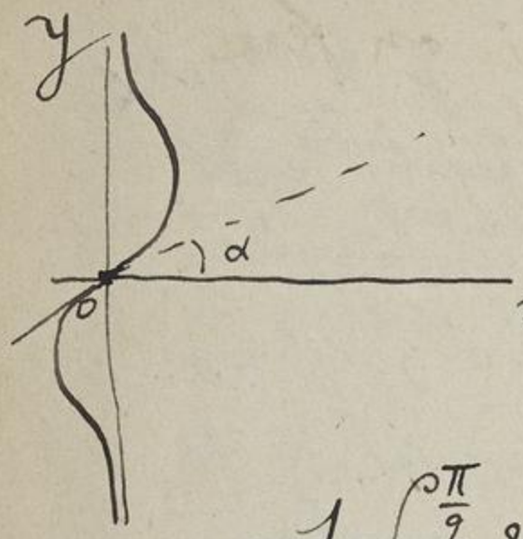
$e^{-2y} \frac{\partial C_1}{\partial x} = -C_2 e^{-2y}$, $\quad C_2 = A_2 e^{-x}$.

Donc $u = \frac{4A_1}{7} e^{6x+5y} + \frac{3}{7} A_2 e^{-x+2y}$

$v = \frac{1}{7} A_1 e^{6x+5y} - \frac{1}{7} A_2 e^{-x+2y}$.

Trajectoire orthog de $\rho^2 = a^2 \log \frac{tg\omega}{tg\alpha}$, il faut $\frac{tg\omega}{tg\alpha} > 1$,

ω entre α et $\frac{\pi}{2}$.



on trouve que la courbe est asympt à oy.

Pour une val de ω, on a 2 val de ρ égales et de sig contr

On demande l'aire entre la courbe et oy.

Est-elle finie ? $\frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\omega$

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} a^2 \log \frac{tg\omega}{tg\alpha} \cdot d\omega = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} a^2 \log tg\omega \, d\omega - \frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} a^2 \log tg\alpha \, d\omega ,$$

La 2e est finie , c'est $\frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

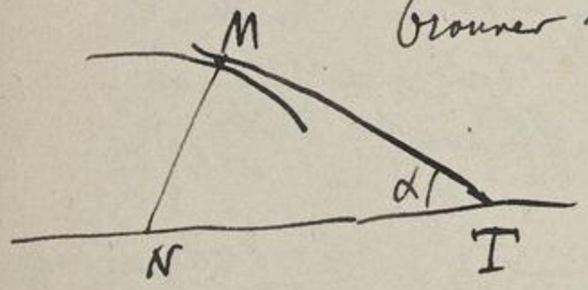
Prenons pour variable $tg\omega = u$, $\omega = \text{arc } tg\, u$, $d\omega = \frac{du}{1+u^2}$

Donc on a $\frac{1}{2} a^2 \int_{tg\alpha}^{\infty} \log u \frac{du}{1+u^2}$, u croît de 0 à l'∞ , $\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}$

tend vers l'unité , il reste fini ; il suffit de prendre $\int \frac{\log u}{u^2} du$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u^2} - \left(\frac{1}{u}\log u\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{u_0} - (\,) \text{ quant fini}$$

Trouver les courbes telles que aire MNT soit const



MN . MT = double de l'aire .

$MN = \frac{y}{\cos\alpha}$, $MT = \frac{y}{\sin\alpha}$; $\frac{y^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{y^2}{\sin 2\alpha}$

est l'aire . $tg\alpha = y'$, $\sin 2\alpha = \pm\frac{2y'}{1+y'^2}$. Donc

$y^2 \frac{(1+y'^2)}{2y'} = \pm K^2$; résolu par rapp à y' .

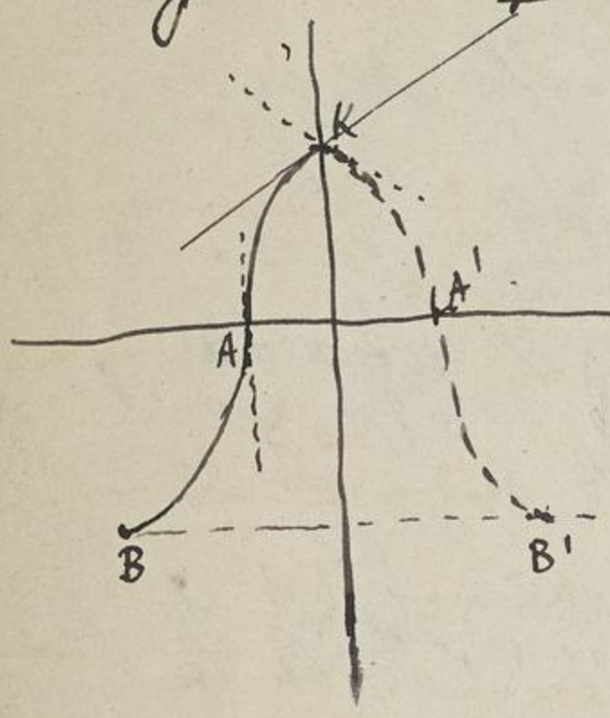
$y^2 y'^2 \mp 2K^2 y' - y^2 = 0$, $y' = \pm\frac{K^2}{y^2} \pm \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}$

Prend les 2 signes + , $y' = +\frac{K^2}{y^2} + \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}$.

Il faut $\frac{K^4}{y^4} > 1$, $y^4 < K^4$, $y^2 < K^2$, y entre $-K$ et $+K$

Faisons passer la courbe par le point arbitraire

$y = +K$, $x = 0$;



En ce point $y' = 1$; y décroît, $dy < 0$

y' positif, donc dx négatif aussi.

La courbe au dessous de la tang et à gauche, ca

y' croît ; pour $y = 0$, $y' = \infty$

on a A. Faisons varier y de

0 à $-\infty$: y^2 croît, ~~donc~~ y' reprend les mêmes valeurs,

il reste > 0 ; la branche de courbe

est exactement semblable à la précédente

mais en sens inverse on a AB.

Prenons $y' = -\frac{K^2}{y^2} - \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}$, ~~pour~~ et même val initiale

$y' = -1$ en K. La courbe est sym de la précéd

par rapp à oy. — Si on avait pris $-K$ pour val

initiales on aurait 2 branch sym des précéd

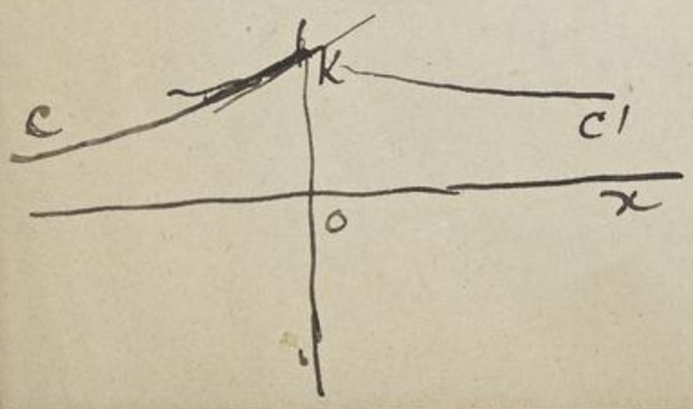
par rapp à ox -

Prenons $y' = -\frac{K^2}{y^2} + \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}$. Partons

de $y = +K$, et faisons décroître y ; mult et div. par

quant conjuguée $y' = \frac{1}{+\frac{K^2}{y^2} + \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}}$, y' décroît

or $dx < 0$, donc courbe au dessus de tang.



pour $y = 0$, $y' = 0$, tang paral à ox

l'axe des x asymptote probablement

on a KC , de même KC' ;

puis 2 autres branches sym par rapp à ox.

Voyons si ox est asympt. Alors on a $dx = dy\left[\frac{K^2}{y^2} + \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}\right]$

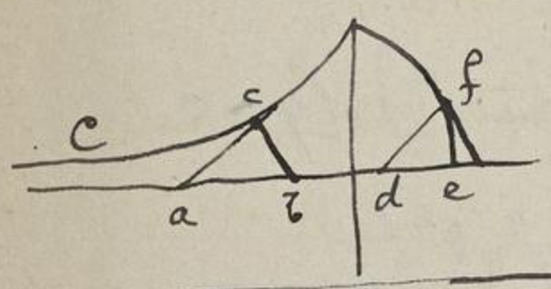
$x = \int_K^0 dy \left[\frac{K^2}{y^2} + \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}\right]$, il faut voir si cette intégrale est finie ou infinie. Partag. en 2 parties de K à ε et de ε à 0

$$\int_K^\varepsilon \left(\frac{K^2}{y^2} + \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}\right) dy + \int_\varepsilon^0 \left(\frac{K^2}{y^2} + \sqrt{\frac{K^4}{y^4} - 1}\right) dy .$$

on peut négliger -1 devant $\frac{K^4}{y^4}$ dans la 2e puisque y tend vers zéro. On a $\int \frac{2K^2}{y^2} dy = -\frac{2K^2}{y}$ qui est infini pour $y = 0$.

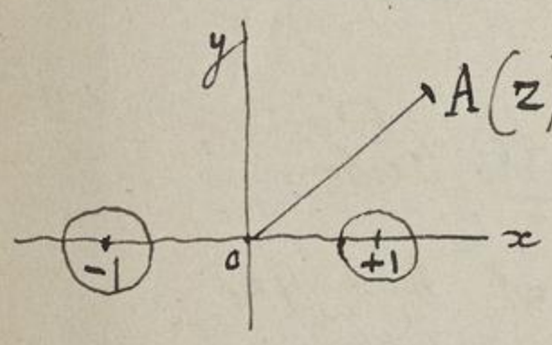
Les branches en K sont orthog, car le prod des y' est -1. —

Prenons 2 points ayant même ordonnée sur KC et KA'.



Les 2 tri. abc, def sont égaux ; et le prod des coef angul en c et f est -1.

$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, $z = \sin u$. Soit (OA) la valeur de l'intégr suivant la droite OA.



Partons de 0, contournons +1, revenons en 0 et allons en A, tout cela est $2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\ }} - (OA) = \pi - (OA)$

Décrivons maintenant 0 +1 −1 0 A (en contournant +1 et −1). On a donc

$\pi + \int_0^{-1} \frac{dz}{-\sqrt{\ }} + \int_{-1}^0 \frac{dz}{\sqrt{\ }} + (OA) = \pi + \pi + (OA)$. Donc si $z = \varphi(u)$, on a $\varphi(u) = \varphi(u + 2\pi)$. —

Intégrer $x^2y^2(dx - bdy) + a(ydx - xdy) = 0$, facteurs intégrants $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$, $\nu = \frac{1}{xy}$, $x = \frac{vu}{v-b}$, $y = \frac{u}{v-b}$,

$\mu = \frac{(v-b)^4}{v^2u^2}$, $\nu = \frac{(v-b)^2}{vu^2}$, $\frac{1}{\mu} du + \frac{a}{\nu}\frac{dv}{v} = 0$.

$\frac{vu^2}{(v-b)^2} du + a\frac{dv}{v} = 0$, cela s'intègre aisément

Intégrer $M\,dx + N\,dy = 0$ par changem de variables.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dx = -r\sin\theta\,d\theta + \cos\theta\,dr$

$dy = r\cos\theta\,.\,d\theta + \sin\theta\,dr$

$r(N\cos\theta - M\sin\theta)\,d\theta + (M\cos\theta + N\sin\theta)\,dr = 0$

$\dfrac{M\cos\theta + N\sin\theta}{N\cos\theta - M\sin\theta}\cdot\dfrac{dr}{d\theta\, r} + d\theta = 0$. On pourra

intégrer quand le 1er fact $\dfrac{M\cos\theta + N\sin\theta}{N\cos\theta - M\sin\theta}$ sera

fonct de r ou de θ, ou le produit de 2 fonct de

de r et de θ ; donc quand $\dfrac{Mx + Ny}{Nx - My} = f(x^2+y^2) = f$

on a $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Ainsi soit $x^8 y(x^2+y^2-1)\,dx + (y^4 + x^2y^2 + x^2)\,dy = 0$.

Formons $\dfrac{Mx+Ny}{Nx-My} = \dfrac{x^2y(x^2+y^2-1) + y(y^4+x^2y^2+x^2)}{x(y^4+x^2y^2-x^2) - xy^2(x^2+y^2-1)}$

$= \dfrac{(x^2+y^2)(x^2y+y^3)}{x(x^2+y^2)} = \dfrac{y}{x}(x^2+y^2)$; substit r et θ,

on a $r^2.\operatorname{tg}\theta$, donc $\dfrac{r\,dr}{r^2} = -\dfrac{d\theta}{\operatorname{tg}\theta}$ $\quad \dfrac{r\,dr}{r^2} + \dfrac{d\theta}{\operatorname{tg}\theta} = 0$,

$\dfrac{r^2}{2} + L\sin\theta = C$, $r^2 = L\dfrac{c^2}{\sin\theta}$, $x^2+y^2 = L\,\dfrac{c^2(x^2+y^2)}{y^2}$.

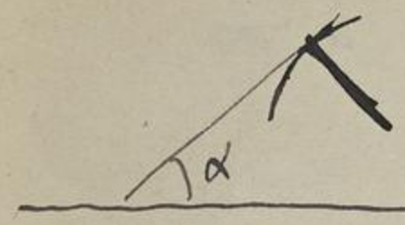
Connd $\dfrac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}$; on posant $k^2 + k'^2 = 1$,

et $k^2z^2 + k'^2x^2 = 1$, on trouve $\dfrac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = \dfrac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$

Posons $P_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(-}}$ et $P'_k = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(\ )}}$, donc on a $P'_k = P_{k'}$.

Posons

Trouver courbe telle que projet de son rayon de courbure sur une droite fixe située dans son plan soit constante.



$$\frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha = a \quad , \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{a\,d\alpha}{\sin\alpha}$$

$$dx^2+dy^2 = \frac{a^2.d\alpha^2}{\sin^2\alpha} \quad , \quad tg\alpha = \frac{dy}{dx} \quad , \quad \sin^2\alpha = \frac{dy^2}{dx^2+dy^2}$$

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)d\alpha = \pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = a$$

$$(1+y'^2)\,y' = ay'' \quad , \quad \text{posons } y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{d'où en mult. par } y',$$

$$2(1+y'^2)\,y'^2 = 2ay'y'' = a\,\frac{d(y'^2)}{dx}\,, \quad \text{posons } y'^2 = u \,,$$

$$2(1+u)\,u = a\,\frac{du}{dx} \quad , \quad 2\,dx = a\,\frac{du}{u(1+u)}$$

$$\frac{A}{u}+\frac{B}{1+u} \quad , \quad 1 = A(1+u)+Bu \quad , \quad \begin{matrix} 1 = A+B, \\ 0 = A+B, \quad B=-1. \end{matrix}$$

$$2\,dx = a\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right] \quad 2(x-x_0) = a\,L\,\frac{u}{1+u}$$

$$\frac{u}{1+u} = e^{\frac{2(x-x_0)}{a}} \quad , \quad u = (1+u)\,e^{\frac{2(x-x_0)}{a}} \quad , \quad u\left(1-e^{\frac{2(x-x_0)}{a}}\right) = e^{\frac{2(x-x_0)}{a}}$$

$$u = y'^2 = \frac{e^{\frac{2(x-x_0)}{a}}}{1-e^{\frac{2(x-x_0)}{a}}} \quad , \text{donc} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x-x_0}{a}}}{\pm\sqrt{1-e^{\frac{2(x-x_0)}{a}}}}.$$

Posons $e^{\frac{x-x_0}{a}} = t$, $\frac{1}{a}\,e^{\frac{x-x_0}{a}}\,dx = dt$. Donc

$$dy = \frac{a\,dt}{\pm\sqrt{1-t^2}} \quad , \quad y-y_0 = \pm a\,\text{arc sin}\,e^{\frac{x-x_0}{a}} \,,$$

$$e^{\frac{x-x_0}{a}} = \sin\frac{y-y_0}{a} \,, \quad \text{d'où en prenant les fameux logarithmes}$$

$$\frac{x-x_0}{a} = L\,\sin\frac{y-y_0}{a} \,. \quad \text{Construisons la courbe définie cette}$$

branche (car il y en a 2 par suite du double signe) ; et faisons

Sur quelques cas de séparat. des variables dans l'équat $M\,dx + N\,dy = 0$; par M. C. Harkema, Prof de Math. au Gymnas. philologique à St. Petersbourg.

Lorsque l'éq. différ. (1) $M\,dx + N\,dy = 0$ dont on se propose de trouver l'intégrale, ne rentre pas dans le nombre des types considérés ordinairement (c.à.d. lorsqu'elle n'est ni une différentielle totale, ni homog. (par rapp. aux variables, ou linéaire)), c'est parfois un changem. convenable de coord., vu la signif. géométr. de l'éq. (1), qui peut rendre des avantages considérables. — Je veux montrer, ici, qu'il est souvent possible de décider à la seule inspection de l'équat. ou bien, par des calculs fort simples, dans quel cas le passage aux coord. polaires peut faciliter l'intégrat. en permett. de séparer les variables. —

Si l'on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, d'où $dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta$, $dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta$, l'éq. (1) devient

$$\left[M(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + N(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right]\frac{dr}{r}$$
$$+\left[N(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - M(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right]d\theta = 0\,;$$

ou bien, en omettant les parenth. intér. et en transformant,

$$(2)\qquad \frac{M\cos\theta + N\sin\theta}{M\sin\theta - N\cos\theta}\,\frac{dr}{r} - d\theta = 0\,.$$

Dans cette équat. les variables pourront être séparées dès que l'expression $\frac{M\cos\theta + N\sin\theta}{M\sin\theta - N\cos\theta}$

sera une fonct d'une seule variable r ou θ, ou bien un produit de deux fonctions, tel que $\varphi(r)\psi(\theta)$.

On voit donc que, en posant, pour abréger, $\frac{M\cos\theta + N\sin\theta}{M\sin\theta - N\cos\theta} = P$, les variables pourront être séparées dans les cas suivants :

1° $P = F(r)$,

2° $P = f(\theta)$,

3° $P = \varphi(r)\psi(\theta)$,

en désign. par F, f, φ et ψ des fonct quelc.

Mais, comme $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, on aura

$$P = \frac{Mx+Ny}{My-Nx},$$

et la séparat des variables pourra s'effectuer dès qu'on aura

1° $\frac{Mx+Ny}{My-Nx} = F_1(x^2+y^2)$,

2° $\frac{Mx+Ny}{My-Nx} = f_1\left(\frac{y}{x}\right)$,

3° $\frac{Mx+Ny}{My-Nx} = \varphi_1(x^2+y^2)\,\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)$,

les fonct F_1, f_1, φ_1 et ψ_1 étant différ. de celles que nous avons désignées par F, f, φ, ψ.

Applicat. Soit proposé de trouver l'intégrale de l'équat

$$xy(x^2+y^2+1)\,dx + (y^4+x^2y^2-x^2)\,dy = 0.$$

Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$P = \frac{x^2y(x^2+y^2+1) + y(y^4+x^2y^2-x^2)}{xy^2(x^2+y^2+1) - x(y^4+x^2y^2-x^2)} = \frac{y}{x}(x^2+y^2)$$

et nous sommes ainsi conduit au 3ème cas.

L'éq. en coord. polaires (2) sera, d'après cela,

$$\operatorname{tg}\theta\, r\,dr - d\theta = 0,$$

et son intégrale

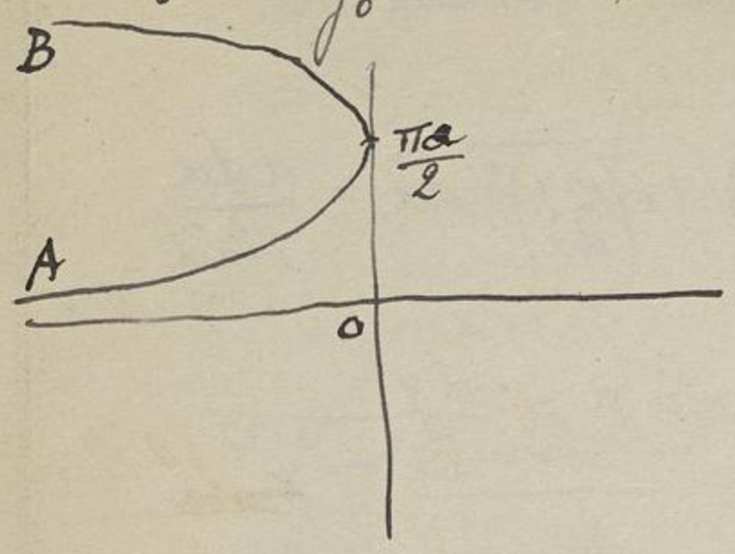
$$\frac{r^2}{2} - \log(C\sin\theta) = 0,$$

C désignant une constante.

L'intégrale de l'éq. proposée sera donc

$$x^2+y^2 - \log\left(\frac{C^2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

x_0 et y_0 nuls. , $x_a = \int_0^{\frac{y}{a}}$ sin .



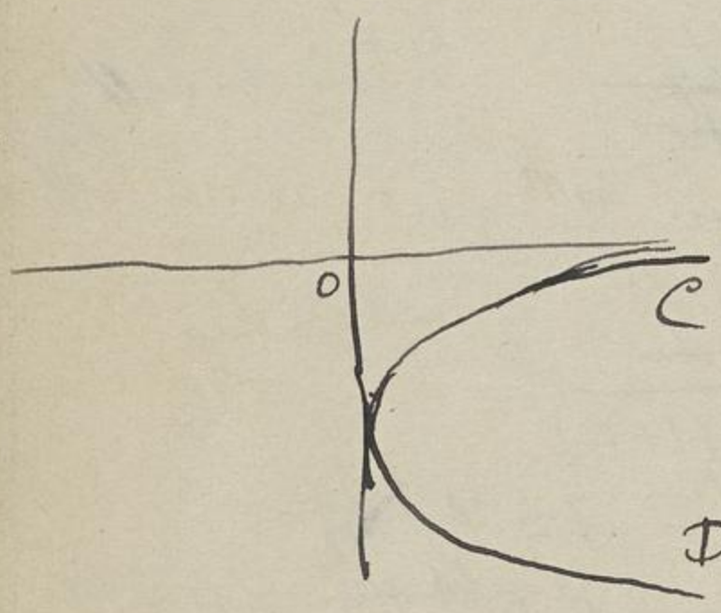
$$\int_0^{\pi} \quad \text{---} \quad \int_0^{a\pi}$$

Pour $x=0$, $y=\frac{\pi a}{2}$, et $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{a}}}{\sqrt{1-e^{\frac{2x}{a}}}}$

$\frac{dy}{dx}$ infini.

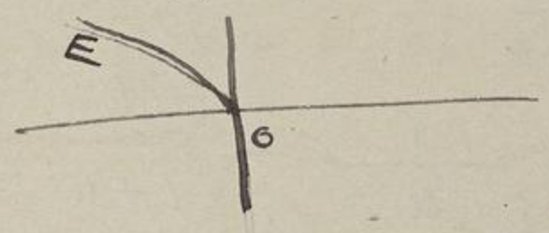
a peut être négatif. Faisons varier y de 0 à $-\pi a$.

On a une branche symét de la précédente par rapport à l'origine, c'est CD.

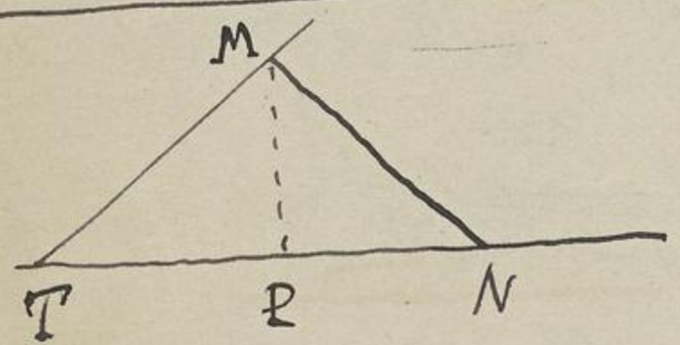


Prenons maintenant $y = a \arccos \frac{x}{a}$

$x = a \cos \frac{y}{a}$. On a OE.



Courbe telle que TN (sur Ox) soit constant



MT tang MN normale

$$y\frac{dx}{dy} + y\frac{dy}{dx} = 2a ,$$

$$y\frac{dx^2}{dy^2} - 2a\frac{dx}{dy} + y = 0 , \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-y^2}}{y} .$$

Prenons le signe + et posons $a + \sqrt{a^2-y^2} = u$,

$\sqrt{a^2-y^2} = u-a$, $a^2-y^2 = (u-a)^2$, $-y\,dy = (u-a)\,du$

$y\frac{dx}{dy} = \int \frac{dx}{a+\sqrt{a^2-y^2}}$, $\int \frac{y\,dx}{u-a}$

$$dx = \frac{u(a-u)\,du}{a^2-(u-a)^2} = \frac{(a-u)\,du}{-u+2a} = \frac{(2a-u)+a}{2a-u}\,du = du + \frac{a}{2a-u}\,du$$

$$x - x_0 = u - a\,L(2a-u), \quad x - x_0 = \sqrt{a^2-y^2} - a\,L\left(a-\sqrt{a^2-y^2}\right).$$

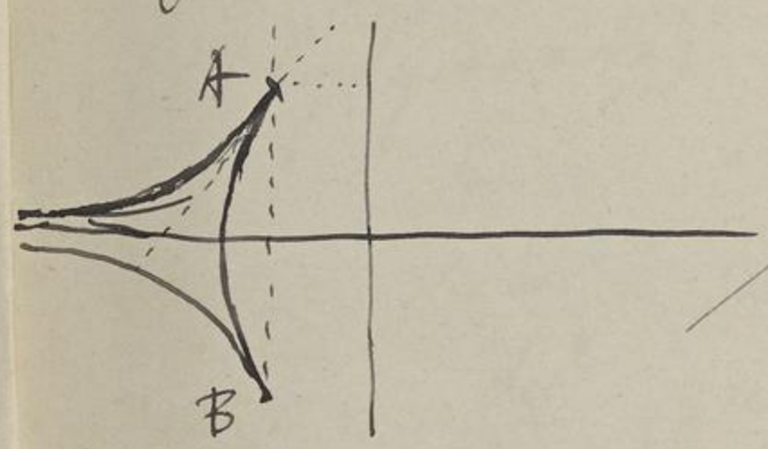
Pour construire, posons ~~$x = a\cos\theta$~~, $y = a\sin\theta$,

$$x - x_0 = a\cos\theta + a\,L\,2a\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{(en mettant le signe +)} ?$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a+\sqrt{}}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y}{a+\sqrt{}} = \frac{a\sin\theta}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$y' = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. Faisons varier θ.

En A, point de rebroussement.



En prenant l'autre ligne on a

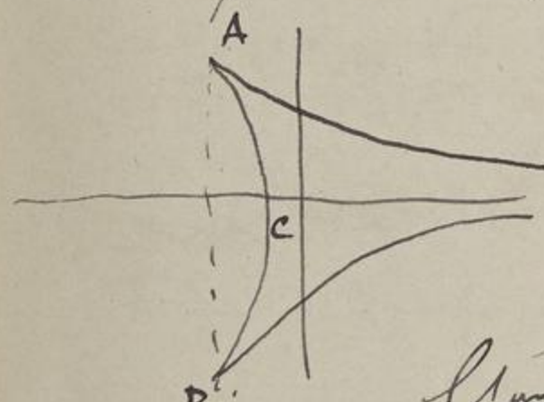
$$du = \frac{-(u+a)\,du}{u+2a}, \quad -dx = du - \frac{a\,du}{u+2a}$$

$$\sqrt{a^2-y^2} = a+u, \quad -y\,dy = (u+a)\,du$$

$$-x = -a + \sqrt{a^2-y^2} = a\,L_1(a+\sqrt{}), \quad x = a - a\cos\theta - a\,L\,2a\cos^2\frac{\theta}{2},$$

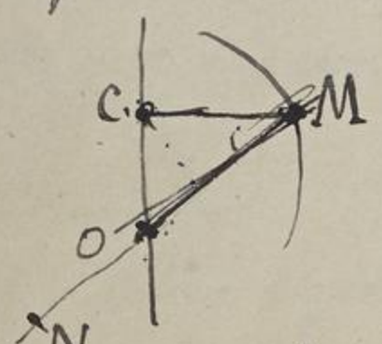
$$y = a\sin\theta, \quad y' = \frac{a\sin\theta}{-a+a\cos\theta} = \frac{-a\sin\theta}{2a\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$$

On a ACB et AD et BE.



Trouver qu'une ~~courbe~~ surface de révolut telle que

~~dans la courbe méridienne~~ dans la surface l'un des rayons de courbure soit proport au cube de l'autre



L'un des ray de courbure est MO, soit MN l'autre

$$MN = K \cdot \overline{MO}^3 \quad \text{ou} \quad MO = K \cdot \overline{MN}^3.$$

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = K\left(y\sqrt{1+y'^2}\right)^3 = K\,y^3(1+y'^2)^{3/2}$$

donc $K y^3 y'' = 1$, $y'' = \frac{1}{Ky^3}$. Multiplier par $2y'$

$$2y'y'' = \frac{2y'}{Ky^3}, \quad y'^2 = -\frac{2}{K}\,\frac{1}{2y^2} + C, \quad y'^2 = C - \frac{1}{Ky^2},$$

$$dx = \frac{\pm dy}{\sqrt{c - \frac{1}{k}y^2}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{c y^2 - \frac{1}{k}}} \qquad x - x_0 = \frac{\pm 1}{c}\sqrt{c y^2 - \frac{1}{k}} \ ,$$

$c^2(x-x_0)^2 = c y^2 - \frac{1}{k}$, <u>conique</u> ; dont l'axe est l'axe de la surface dont la surf est une surf de révolut du 2e degré.

Lont maintenant $MN^3 = K \cdot MO$.

$$\frac{(+y'^2)^{3/2}}{y''^3} = Ky(1+y'^2)^{1/2} \ , \qquad (1+y'^2)^4 = K^2 y^2 y''^3$$

$$y'' = \frac{1}{K^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}} (1+y'^2)^{\frac{4}{3}} \ .$$

x n'entre pas explicitement

$y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy}$, donc

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{K^{\frac{1}{3}} y^{1/3}} (1+p^2)^{\frac{4}{3}} \ .$$ Equat entre p^2 et y

$$\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{4/3}} = \frac{dy}{K^{\frac{1}{3}} y^{1/3}} \ ,$$

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{3}{2}\frac{1}{K^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}}} + C$$

$$\frac{1}{1+p^2} = \left[\frac{1}{K^3 y^{-\frac{2}{3}}} + C\right]^{*3} \ , \qquad p^2 = -1 + \frac{1}{(\quad)^3}$$

x en fonct de y par quadrature On construit la courbe au moyen de cette éq on fait l'hypothèse sur const C et K.

Déterm une courbe C telle que si l'on construit une de ses transform C' par rayon vect réciproq relativem à un pôle donné O, les rayons de courbure en deux points correspondants des 2 courbes soient dans un rapport donné. (1)

Intégrer le syst (1)

$$\frac{dx}{dt} + x f'(t) - y\varphi'(t) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + x\varphi'(t) + y f'(t) = 0 \ .$$

Trouver une courbe telle que la tangente MT soit dans
$\frac{MT}{OT}$ un rapport constant avec le segment OT intercepté par cette
même tangente sur l'axe des ~~ax~~ x.

On donne l'équat $2abxy\,dx\,dy + by^2\,dy^2 = (ax^3 + aby^2 + bxy^2 - x - a)\,dx^2$,
on demande si elle a une intégrale singulière et quelle elle est

L'équat peut s'écrire

$$(by\,dy + ax\,dx)^2 = (ax^3 + a^2x^2 + aby^2 + bxy^2 - x - a)\,dx^2$$

$$(by\,dy + ax\,dx)^2 = \left[ax^2(x+a) + by^2(x+a) - (x+a)\right] dx^2 ,$$

ou

$$\text{ou (A)}\quad (by\,dy + ax\,dx)^2 = \left[ax^2 + by^2 - 1\right](x+a)\,dx^2 .$$

Posons $ax^2 + by^2 - 1 = u$, $x + a = v$,

d'où $2ax\,dx + 2by\,dy = du$ et $dx = dv$

donc $\frac{du^2}{4} = uv\,dv^2$, d'où $\frac{du^2}{u} = 4v\,dv^2$,

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \pm 2\sqrt{v}\,dv^* , \qquad 2\sqrt{u} = \frac{4}{3}v^{\frac{3}{2}} + C ,$$

$$\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} = \sqrt{C} \pm \sqrt{u} .$$

Elevons au carré

Elle est l'intégrale générale. Elev au carré

$$\frac{4}{9}v^3 = C + u \pm 2\sqrt{Cu} , \qquad \text{ou} \quad \left(C + u - \frac{4}{9}v^3\right)^2 = 4Cu$$

Ordonnons par rapp à C:

$$C^2 + 2C\left(u - \frac{4}{9}v^3 - 2u\right) + \left(u - \frac{4}{9}v^3\right)^2 = 0$$

(1) $C^2 + 2C\left(-\frac{4}{9}v^3 - u\right) + \left(u - \frac{4}{9}v^3\right)^2 = 0$. Pour avoir l'intégrale

singul nous éliminer la Constante C entre l'intégrale génér.

(1) et cette équat dérivée ; ce qui donne $B^2 - 4AC = 0$

$$\left(\frac{4}{9}v^3 + u\right)^2 - \left(u - \frac{4}{9}v^3\right)^2 = 0 , \text{ c.à.d.} \quad 2u \cdot \frac{8}{9}v^3 = 0 ,$$

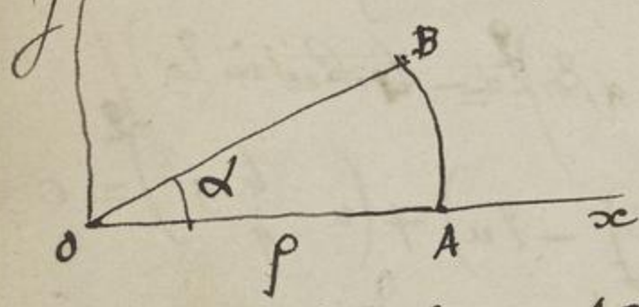
ce qui donne $uv^3 = 0$, qui se décomp en $u = 0$ et $v = 0$.

Or $v=0$ donne $x+a=0$ et $dx=0$; ~~pour ces deux~~
$v=0$ est une solut étrangère, car ces valeurs ne vérifient pas l'équat (A), puisque ~~son premier membre se~~ elle se réduit à $b^2y^2dy^2=0$.

quant à $u=0$, c'est bien une solution de l'éq. donnée, car ~~on en tire~~ $u=0$ donne $ax^2+by^2-1=0$, $axdx+bydy=0$, ~~$\frac{}{}$~~ et l'équat (A) est vérifiée quand on pose ces 2 équat

Mais est-ce une intégrale singul. ou une solut particulière?
Il faut voir si $u=0$ vérifie l'intégrale générale pour une certaine valeur convenable de C et cela quel que soit v,
Or l'hypoth $u=0$ introduite dans (1) la réduit à
$C^2-\frac{8}{9}Cv^3+\left(-\frac{4}{9}v^3\right)^2=0$: on voit donc qu'on ne peut avoir $u=0$ pour une val. de C indépendante de v. On a donc une solut singulière et non particulière.

Démontrer que $\int_0^\infty \frac{(1+x^2)dx}{1+x^4+2x^2\cos 2\alpha} = \frac{\pi}{2\cos\alpha}$.



A cet effet, intégrons $\int \frac{dz}{1+z^2}$ le long du contour OAB formé de la droite OA, de l'arc AB décrit du point O comme centre avec rayon ρ, enfin de BO, en supposant l'angle du secteur AOB = α.
Soit C ce contour. $\int_C$ est nulle, car il n'y a pas de points critiques de cette fonction à son intérieur. & on a donc

(1) $\int_C = \int_0^\rho \frac{dx}{1+x^2} + \int_{AB} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{BO} \frac{dz}{1+z^2} = 0$

Cela a lieu d'ailleurs pour ρ infini. La 1ère intégrale

est arctg ρ, qui, pour $\rho=\infty$, est $\frac{\pi}{2}$. Pour la 2ème posons $z=\rho e^{i\theta}$, ρ étant constant ; $dz=\rho i e^{i\theta}d\theta$, d'où

$$\int_{AB}=\int_0^{\alpha}\frac{\rho i e^{i\theta}\,d\theta}{1+\rho^2 e^{2i\theta}}$$

; pour ρ infini, ~~tout le dénom. de l'intégrale tout la dénominateur de~~ ~~réduit à $\rho^2 e^{2i\theta}$, et la fonct sous signe $\int$ à $\frac{i\,d\theta}{\rho e^{i\theta}}$, dont~~ nulle ~~l'intégrale est $=0$~~ la fonct sous le signe $\int$ est nulle, et l'intégrale est nulle. Calculons $\int_{BO}\frac{dz}{1+z^2}$. Posons encore $z=\rho e^{i\theta}$, seulement ici ρ est variable et θ constant et égal à α, donc $z=\rho e^{i\alpha}$, $dz=d\rho\, e^{i\alpha}$. D'où on a donc

$$\int_{BO}=\int_{\rho}^{0}\frac{e^{i\alpha}\,d\rho}{1+\rho^2 e^{2i\alpha}}=\int_{\rho}^{0}\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\,d\rho}{1+\rho^2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)}.$$

Multpl et divisons par la quant conjuguée du dénomin

$$1+\rho^2\cos 2\alpha-\rho^2 i\sin 2\alpha.$$ Il vient

$$\int_{\rho}^{0}d\rho\cdot\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(1+\rho^2\cos 2\alpha-\rho^2 i\sin 2\alpha)}{(1+\rho^2\cos 2\alpha)^2+\rho^4\sin^2 2\alpha}$$

Le dénom. est $1+2\rho^2\cos 2\alpha+\rho^4$. Le numérateur est

$$(1+\rho^2\cos 2\alpha)\cos\alpha+\rho^2\sin\alpha\sin 2\alpha+i\left[\sin\alpha(1+\rho^2\cos 2\alpha)-\rho^2\cos\alpha\sin 2\alpha\right]$$

$$\cos\alpha+\rho^2(\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha)+i\left[\sin\alpha+\rho^2(\sin\alpha\cos 2\alpha-\cos\alpha\sin 2\alpha)\right]$$

ou

$$\cos\alpha+\rho^2\cos\alpha+i\left[\sin\alpha-\rho^2\sin\alpha\right]$$

ou

$$\cos\alpha(1+\rho^2)+i\sin\alpha\left[1-\rho^2\right].$$ On a donc

ou enfin

$$\cos\alpha\int_{\rho}^{0}\frac{(1+\rho^2)\,d\rho}{1+2\rho^2\cos 2\alpha+\rho^4}+i\sin\alpha\int_{\rho}^{0}\frac{(1-\rho^2)\,d\rho}{1+2\rho^2\cos 2\alpha+\rho^4}+\frac{\pi}{2}=0$$ (d'après (1))

donc et en tenant compte de $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. Enfin faisant $\rho=\infty$,

on a

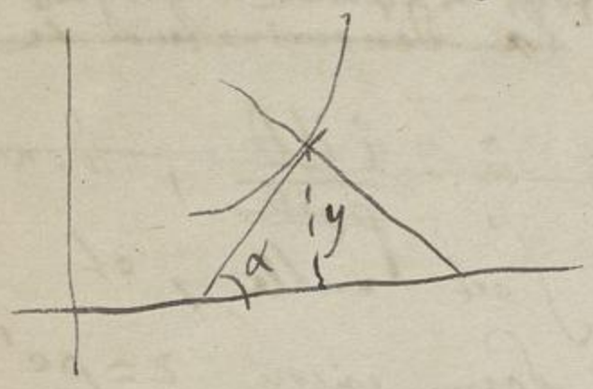
$$\cos\alpha\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2\cos 2\alpha+x^4}dx+i\sin\alpha\int_0^{\infty}\frac{(1-x^2)\,dx}{1+2x^2\cos 2\alpha+x^4}=\frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\cos\alpha\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)\,dx}{1+2x^2\cos 2\alpha+x^4}=\frac{\pi}{2}$$ et

$$\int_0^{\infty}\frac{(1-x^2)\,dx}{1+2x^2\cos 2\alpha+x^4}=0$$

On a vu plus haut l'équat différent d'une courbe telle que la normale soit proport au cube du rayon de courbure. Nous allons la construire.



~~At~~

$$y\sqrt{1+p^2} = \cancel{K(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = K\frac{(1+p^2)^{3/2}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^3}$$

$$y = \frac{K(1+p^2)^{3/2}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^3} \quad . \quad \text{Résolvons en } \frac{dp}{dx}.$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{K^{\frac{1}{3}}(1+p^2)^{\frac{4}{3}}}{y^{1/3}} \quad , \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

$$\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{4}{3}}} = \frac{K^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}dy \quad , \text{ ou } \quad \frac{1}{2}\frac{2p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{4}{3}}}$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{2}\frac{d(1+p^2)}{(1+p^2)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{3}{2}K^{\frac{1}{3}}y^{+\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}C$$

$$(1+p^2)^{-\frac{1}{3}} = C - K^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \quad , \qquad 1+p^2 = \frac{1}{(C-K^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}})^3} \quad ,$$

K peut être positif ou négatif, C aussi.

$$1+p^2 = \frac{\pm a^2}{(\pm H^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^3} \quad . \quad \text{Il n'y a pas de liaison entre les 2 signes.}$$

Soit $1+p^2 = \dfrac{a^2}{(H^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^3}$, $\dfrac{dy}{dx} = +\sqrt{\dfrac{a^2}{(H^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}})^3} - 1}$

Prenons + devant le radical

Voyons si y peut prendre la valeur 0 ; pour cela il faut

$\dfrac{a^2}{H^2} > 1$. Supposons $\dfrac{a^2}{H^2} > 1$. On peut, à la valeur $y=0$, faire

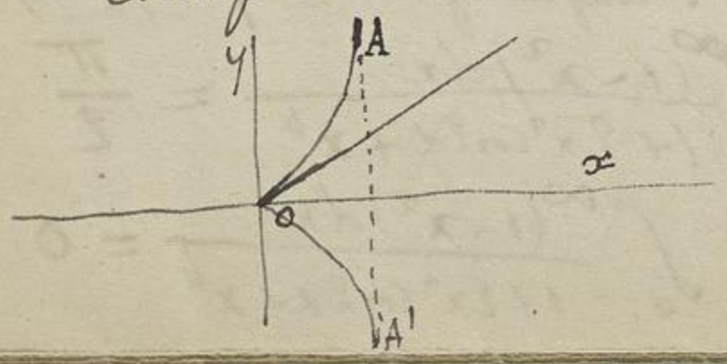
correspondre $x=0$. $\dfrac{dy}{dx}$ pas nul en 0, y croît, $\dfrac{dy}{dx}$ aussi

on est arrêté à $y=H$, et alors $\dfrac{dy}{dx}=\infty$,

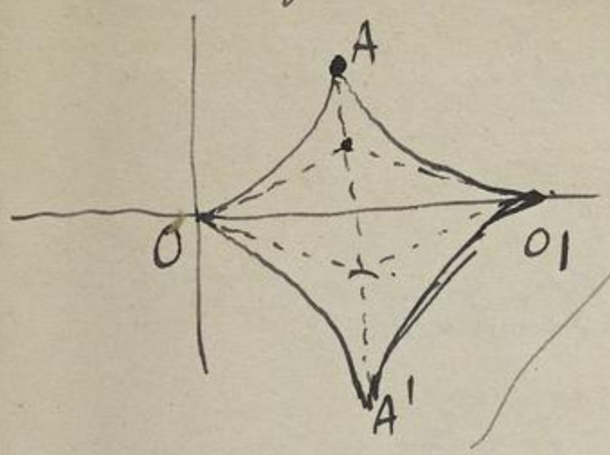
on a A.

En prenant − devant le radical,

on a oA' symétrique.

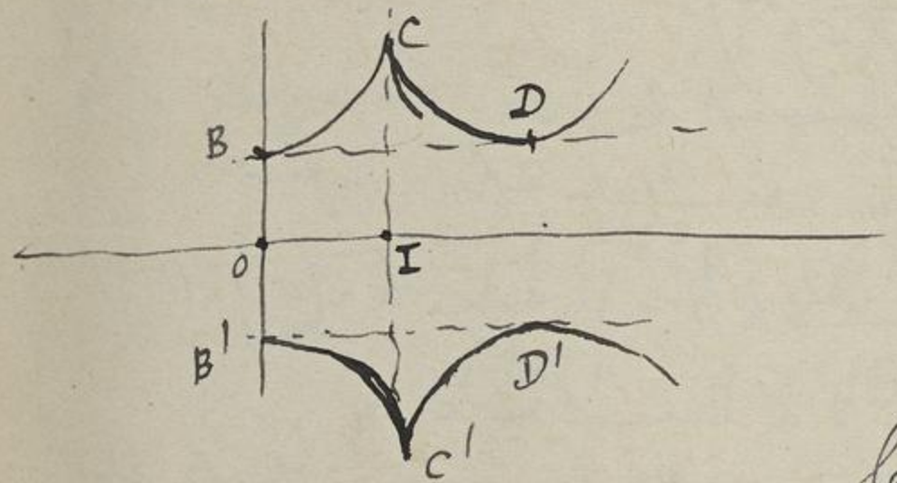


On peut aussi faire décroître y, alors on a deux branches analogues aux précédentes), savoir AO_1 et $A'O_1$,



Soit maintenant $\frac{a^2}{H^2} < 1$.

$H^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $h = \left(H^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. On a comme tout à l'heure la limite supér. H, et il y a une limite inférieure h, pour laquelle $\frac{dy}{dx} = 0$, c'est-à-dire tang horizontale ; on a alors les courbes BCD, B'C'D'. — OI est-il fini ?



$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{\left(H^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^3} - 1}}$$, est-ce fini ?

Il y a doute pour la limite h, car les élém. de l'intégr. deviennent infinis pour $y = h$. Posons $y = h + z$, $y^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} h^{-\frac{1}{3}} z$

$H^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} h^{-\frac{1}{3}} z$,

$\left(H^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{-3} = a^{-2} + 2 a^{-\frac{8}{3}} h^{-\frac{1}{3}} z$, $2a^{-\frac{2}{3}} h^{-\frac{1}{3}} z$

$\int_0^{H-h} \frac{dz}{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)_0^{H-h}$, il faut la limite pour $z = 0$.

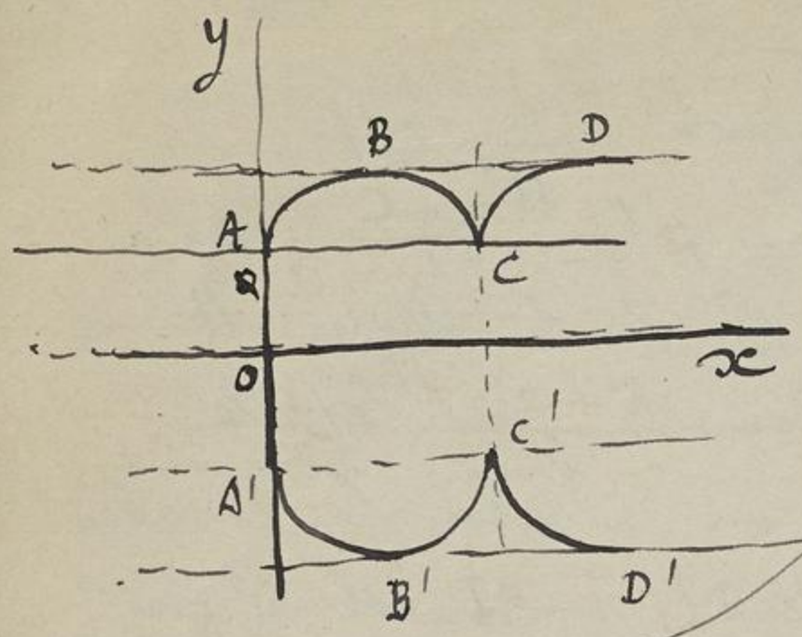
Elle est finie, donc OI est fini.

Prenons $1 + p^2 = \frac{a^2}{\left(H^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^3} = \frac{a^2}{\left(y^{\frac{2}{3}} - H^{\frac{2}{3}}\right)}$

$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{\left(y^{\frac{2}{3}} - H^{\frac{2}{3}}\right)^3} - 1}$. Prenons +. y ne peut être nul ni infini (car la quant. sous radic. serait infinie. H est une limite, on aura $y > H$; $h^{\frac{2}{3}} - H^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$h = \left(H^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, donc $y < h$, ainsi $H < y < h$.

On a AB, (évident que la concavité devait être en sens inverse de la 1ère courbe) ; puis BC, CD ; puis les symétriq par rapp à ox.



Prenons maintenant

$$1+p^2 = \frac{a^2}{\left(H^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^3}$$

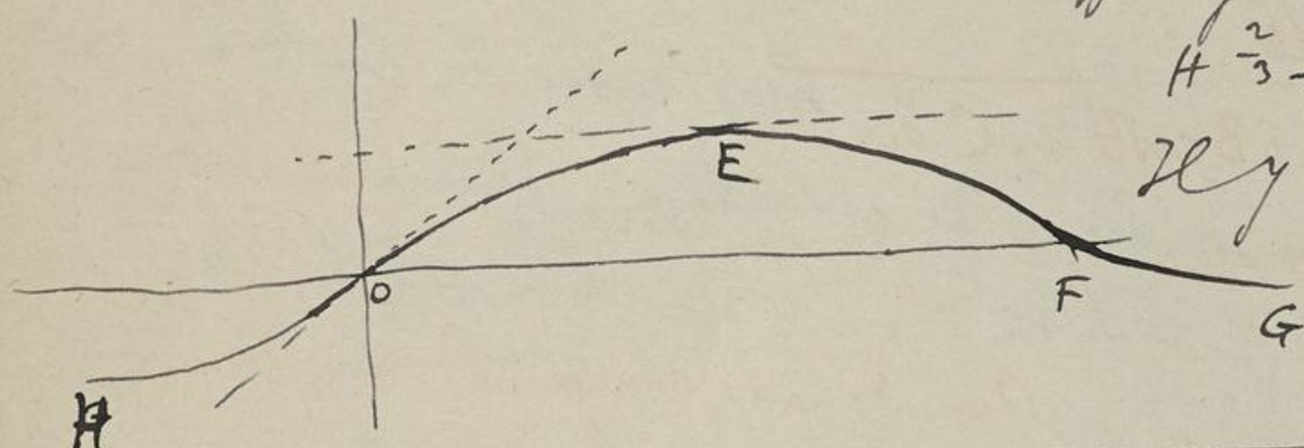
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a^2}{\left(H^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^3} - 1}$$

Soit $a^2 > H^2$. La courbe est au dessous de sa tangente. En effet y ne peut être infini.

$$H^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad h = \left(a^{\frac{2}{3}} - H^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Il y a une limite.

On a une sorte de sinusoïde HEFG.



Intégrer $x^2 y'' + xy' - y = 0$. L'équat est homog par rapport à y, y', y''. Posons $y = e^z$, $y' = e^z \cdot z'$, $y'' = e^z \cdot z'^2 + e^z z''$. On a, en divis. par e^z,

$x^2(z'^2 + z'') + x z' - 1 = 0$, l'éq est encor du second ordre ; on aperçoit la quant xz', cherch à l'introduire partout ; multipl l'équat par $\frac{dx}{x}$,

$$x\,dx\left(z'^2 + \frac{dz'}{dx}\right) + xz'\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$x\,dx\,z'^2 + dx\,dz' + z'\,dx - \frac{dx}{x} = 0.$$

ou $$\left(xz'^2 - \frac{1}{x}\right)dx + d(xz') = 0$$

ou $$\left(x^2 z'^2 - 1\right)\frac{dx}{x} + d(xz') = 0, \text{ ou } \frac{dx}{x} = \frac{d(xz')}{-x^2 z'^2 + 1}$$

or

$\frac{1}{1-u^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u}$, donc $\int x^2 = \frac{1}{2} \int \frac{1+xz'}{1-xz'} + \int C$,

$x^2 = C \frac{1+xz'}{1-xz'}$. D'où $x^2(1-xz') = C(1+xz')$.

$x^2 - C = z'(x^3 + Cx) = z' x (x^2 + C)$, $z' = \frac{x^2 - C}{x(x^2+C)}$,

$dz = \frac{x^2-C}{x(x^2+C)} dx = \left(\frac{1}{x} - \frac{2C}{x(x^2+C)}\right) dx = \left(\frac{1}{x} - \frac{2C + x^2 - x^2}{x(x^2+C)}\right) dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+C)}\right) dx$

Donc $z = \int \frac{1}{x} - \int (x^2+C) + \int K$, $z = \int K \frac{x^2+C}{x}$,

$y = e^{\int -} = K \frac{x^2+C}{x}$.

Intégrer $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + iB\cos\theta + iC\sin\theta}$.

Posons $B = H\cos\alpha$, $C = H\sin\alpha$. On a alors

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + iH\cos(\theta - \alpha)}$. Quand on change θ en $\theta + \alpha$, on remplace les élém. entre 2π et $2\pi + \alpha$ par ceux entre 0 et 2π; donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + iH\cos\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta\,(A - iH\cos\theta)}{A^2 + H^2\cos^2\theta}$

On peut négliger le 2ème terme au numér., comme on le voit en décomp. l'intégrale en 2, de 0 à π, et de π à 2π, les élém. sont égaux et de signes contraires. Donc

$= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A^2 + H^2\cos^2\theta} = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{(A^2+H^2) + A^2\operatorname{tg}^2\theta}$.

$= \frac{1}{\sqrt{A^2+H^2}} \left(\frac{\sqrt{A^2+H^2}}{A\sqrt{A^2+H^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{A}{\sqrt{A^2+H^2}} \cdot \operatorname{tg}\theta \right)_0^{2\pi} = \frac{1}{A^2+H^2}$

or $H^2 = B^2 + C^2$, donc on a $= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

On peut évaluer cette intégrale en posant $e^{i\theta} = z$,

~~+ d~~ $ie^{i\theta} d\theta = dz$, $\quad iz\, d\theta = dz$, $\quad i\, d\theta = \frac{dz}{z}$,

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\quad i\sin\theta = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

En posant $z = e^{i\theta}$, on intègre le long d'un cercle de rayon 1 et cela de 0 à 2π. On a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(c)} \frac{\frac{dz}{z}}{Ai + Bi\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + C\,\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{2\,dz}{(iB+C)\,z^2 + 2Az + (iB - C)} = \frac{H}{z-\zeta} + \frac{H'}{z-\zeta'},$$

soient H et H' les résidus, on a

l'un des résidus est nul car l'autre < 1, la fonction correspondant à > 1 n'est pas intégrale nulle par rapport au contour. Donc il y a un seul résidu H.

Les racines sont $z = -\dfrac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{iB + C}$; en prenant +, on a une quantité dont le module est < 1, le module de l'autre est > 1.

Calculons le résidu de la 1ère ; $z = -\dfrac{A + \sqrt{\quad}}{iB + C}$

$$\frac{1}{(iB+C)\left(-A + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right) + (iB + C)A} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Intégrer $\dfrac{dx}{dt} + x f'(t) - y\varphi'(t) = 0$

$$\frac{dy}{dt} + x\varphi'(t) + y f'(t) = 0.$$

Elim. $f'(t)$. $\quad x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} + (y^2 + x^2)\varphi' = 0$

$$y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt} + (x^2 + y^2)\varphi' = 0.$$

Posons $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. On a alors

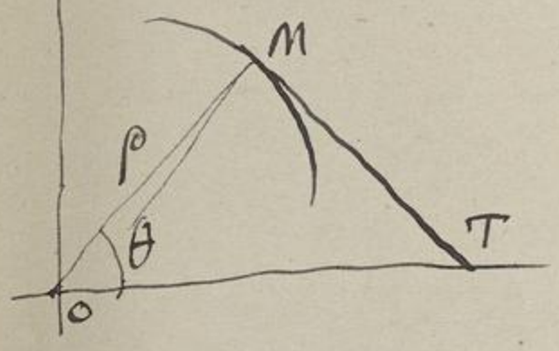
$$\rho^2\frac{d\theta}{dt} + \rho^2\varphi'(t) = 0 \quad , \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho^2 f' = 0$$

$$d\theta = -\varphi'\,dt \quad , \quad \theta = \theta_0 - \varphi(t) \quad ; \quad \frac{d\rho}{\rho} = -f'\,dt \quad , \quad \rho = Ce^{-f}$$

$$x = \rho\cos\theta = Ce^{-f}\cos(\theta_0 - \varphi(t)) \quad , \quad y = \rho\sin\theta = Ce^{-f}\sin(\theta_0 - \varphi(t)).$$

Chercher Courbe telle que MT soit dans un rapport constant avec OT.

$$\frac{MT}{OT} = a \quad , \quad tgV = \frac{\rho}{\rho'} \quad , \quad \frac{\sin\theta}{\sin V} = a$$



$$\frac{\sin\theta}{a} = \sin V = \frac{tgV}{\sqrt{1+tg^2V}} \quad ,$$

$$\frac{tg^2V}{1+tg^2V} = \frac{\sin^2\theta}{a^2} \quad , \quad tg^2V = \frac{\sin^2\theta}{a^2-\sin^2\theta} \quad ,$$

$$tgV = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin\theta}{\pm\sqrt{a^2-\sin^2\theta}} \quad , \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta\sqrt{a^2-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

Prenons pour variable $\cos\theta$, $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta\sin\theta\sqrt{\quad}}{\sin^2\theta}$ ~~?~~

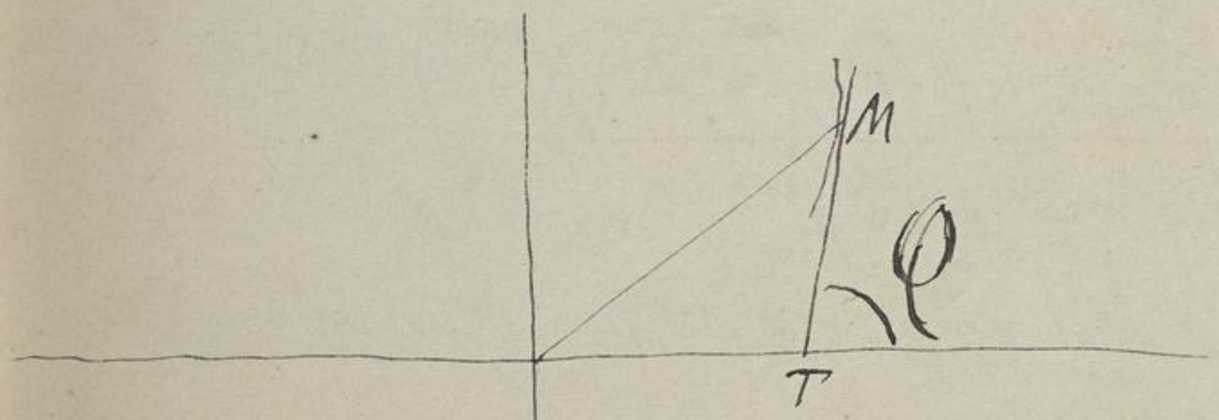
Posons $\cos\theta = u$, $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{du\sqrt{a^2-1+u^2}}{1-u^2} = \frac{du(a^2-1)}{(1-u^2)\sqrt{a^2-1+u^2}} + \frac{u^2\,du}{(1-u^2)\sqrt{\quad}}$

Soit $a > 1$, on a $a^2 - \sin^2\theta > 0$, θ peut prendre toutes les valeurs 0 , π , 2π —— on a $L\rho = \int_0^\theta \frac{d\theta\sqrt{a^2-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

Pour $\theta = 0$, on a $\int \frac{d\theta}{\theta}$

$= L\theta = \infty$ pour $\theta = 0$,

donc $L\rho$ est ∞ : donc ρ est nul ou infini : Mais lequel des deux ?



Posons $x\sin\varphi - y\cos\varphi = u$,

$+x\cos\varphi + y\sin\varphi = u'$

$x = u\sin\varphi + u'\cos\varphi$, $y = -u\cos\varphi + u'\sin\varphi$.

~~$MT = u - u' \cot g \varphi$~~ $\quad MT = \frac{y}{\sin\varphi}$, $\quad OT = \frac{u}{\sin\varphi}$,

$$\frac{MT}{OT} = a = \frac{y}{u} = -\cos\varphi + \frac{u'}{u}\sin\varphi \ ,$$

$$\frac{u'}{u}\sin\varphi = a + \cos\varphi \ , \quad \frac{du}{u} = \frac{(a+\cos\varphi)\,d\varphi}{\sin\varphi} \ ,$$

$$\mathrm{L}\,u = a\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} + \int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin\varphi} \ ,$$

Or la 1ère est $a\int\frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = a\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = a\,\mathrm{L}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$

La 2e est $\mathrm{L}\sin\varphi$.

$$\mathrm{L}\,u = a\,\mathrm{L}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \mathrm{L}\sin\varphi + \mathrm{L}\,c \ .$$

$$u = c\sin\varphi\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]^a = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^a c$$

$$u = 2\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{1+a}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{1-a} c \ , \text{ posons } \sin\frac{\varphi}{2} = p \ ,$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = q \ , \quad u = 2cp^{1+a}q^{1-a} \ ,$$

$$\frac{du}{d\varphi} = u\,\frac{a+q^2-p^2}{2pq} \ ; \quad \text{~~$y = 2p^{1+a}q^{1-a}c(q^2-p^2)$~~}$$

$$\frac{du}{d\varphi} = c\,p^a q^{-a}(a+q^2-p^2) \ .$$

$$y = -u\cos\varphi + u'\sin\varphi = -2p^{1+a}q^{1-a}c(q^2-p^2) + 2cp^a q^{-a}(a+q^2-p^2)pq$$

$$y = 2c\,p^{1+a}q^{1-a}\left[-q^2+p^2+a+q^2-p^2\right] = 2c\,p^{1+a}q^{1-a}\,a$$

$$x\sin\varphi = x\cdot 2pq = 2p^{1+a}q^{1-a}\cdot c + 2cp^{1+a}q^{1-a}\,a\,(q^2-p^2) \ .$$

$$= 2cp^{1+a}q^{1-a}\left[1+a(q^2-p^2)\right] = 2cp^{1+a}q^{1-a}\left[p^2(1-a)+q^2(1+a)\right]$$

$$x = c\,p^a q^{-a}\left[p^2(1-a)+q^2(1+a)\right] \ .$$

on peut en déduire la courbe en coord polaires.

Calculons $\cot g\,\theta$ en fonct de p et q , puis on aura $y = \rho\sin\theta$,

$\cot g\theta = \frac{x}{y} = \frac{p^2(1-a)+q^2(1+a)}{2pqa}$, équat du second degré en $\frac{p}{q}$.

$q^2(1+a) - 2pqa\cot g\theta + p^2(1-a) = 0$, $\frac{q}{p} = \frac{a\cot g\theta \pm \sqrt{a^2\cot g^2\theta - (1-a^2)}}{1+a}$

$a\cot g\theta \pm \sqrt{\quad} = \frac{p}{1+a} = \frac{1}{\sqrt{(1+a)^2}}$

$\frac{q}{p} = \frac{a\cot g\theta \pm \sqrt{\quad}}{1+a} = \frac{a\cot g\theta \pm \sqrt{\frac{a^2}{\tan g^2\theta} - 1}}{1+a} = \frac{a\cos\theta \pm \sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}{(1+a)\sin\theta}$

$\frac{q}{a\cos\theta + \sqrt{a^2-\sin^2\theta}} = \frac{p}{(1+a)\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + (a^2-\sin^2\theta) + (1+a)^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta\sqrt{a^2-\sin^2\theta}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2a^2 + 2a^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta\sqrt{a^2-\sin^2\theta}}}$

$y = \rho\sin\theta = \frac{2C\alpha \left[a\cos\theta + \sqrt{a^2-\sin^2\theta}\right]^{1+a} (1+a)^{1-a}(\sin\theta)^{1+a}}{a^2 + 2a\sin^2\theta + 2a\cos\theta\sqrt{a^2-\sin^2\theta}}$

Soit $a=1$, $y = \frac{C\cdot 4\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta} = 2C\sin^2\theta$,

$\rho = 2C\sin\theta$, cercle tangent à oy : En prenant + devant le radical

Prenons — . Soit $\left[a\cos\theta - \sqrt{a^2-\sin^2\theta}\right]^{1-a} = m$,

Cherch la limite pour $a=1$, posons $a = 1+\varepsilon$

$\log m = (1+\varepsilon)\, L\left[(1+\varepsilon)\cos\theta - \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - \sin^2\theta}\right]$

$= +\varepsilon L\left[(1+\varepsilon)\cos\theta - \left[\cos^2\theta - 2\varepsilon\right]^{1/2}\right]$;

$= +\varepsilon L\left[(1+\varepsilon)\cos\theta - \left[\cos\theta - \frac{\varepsilon}{\cos\theta}\right]\right] = -\varepsilon L\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)$

$= \varepsilon L\varepsilon$, dont limite est 0 . , donc $\log m = \varepsilon L\varepsilon$,

et limite de m est 1 . Alors on a

$y = \frac{C\cdot 4\cdot \sin^2\theta}{1+\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \rho\sin\theta$, $\rho = \frac{2C\sin\theta}{\sin\theta}$, droite

On trouve les formes

~~Trans~~ Courbes transformées par rayons vect réciproques et dont les rayons de courbure sont dans un rapport constant

On obtient ainsi $R = \frac{K}{r\,d\theta}\,\frac{(dr^2+r^2d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{[r^2+r\,d^2r]}$

$$R_1 = \frac{(dr^2+r^2d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{d\theta\,(r^2d\theta^2+2dr^2-r\,d^2r)}\,,\quad \text{d'où}$$

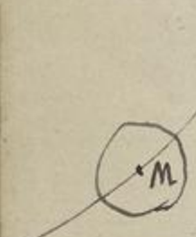
$$\frac{r^2d\theta^2+2dr^2-r\,d^2r}{r^3\,(r\,d\theta^2+d^2r)} = \lambda\,,$$

$$r^2+2\frac{dr^2}{d\theta^2}-r\frac{d^2r}{d\theta^2} = \lambda r^4+\lambda r^3\frac{d^2r}{d\theta^2}\,,$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}(\lambda r^2+1)\,r-2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2(\lambda r^2-1)=0\,.\qquad \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=u$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dr}(\lambda r^2+1)r-2u-r^2(\lambda r^2-1)=0$$

Soit r le rayon vecteur d'une surface p la perpend abaissée de l'origine sur le plan tang, M l'extrém de cette perpend, P la perpend abaissée de l'orig sur le plan tang en M à la surf lieu du point M, démontrer l'égalité $P = \frac{p^2}{r}$.



D'un point quelc M d'une courbe AB on décrit une circonfér dont le rayon r est une fonct donnée de la long σ de l'arc AM. Les cercles ainsi tracés ont une double enveloppe. Prouver que la somme des longueur des 2 courbes enveloppes ne change pas, lorsque l'arc AB se déforme sans changer de longueur.

On a trouvé page précédente :

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2c^2}{r(r^2+c^2)}\cdot\frac{dr^2}{d\theta^2} + \frac{2(r^2-c^2)}{r^2+c^2} = 0$$

Posons $\frac{dr^2}{d\theta^2} = u$, ~~$\frac{d^2r}{d\theta^2}$~~ $2\frac{dr}{d\theta}\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\theta}$,

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{1}{2}\frac{du}{dr} \quad ; \quad \frac{du}{dr} - \frac{1}{r}\frac{c^2}{r^2+c^2}u + 2r\frac{r^2-c^2}{r^2+c^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0 \quad , \quad y = e^{-\int_{x_0}^{x} X\,dx}\left[C - \int_{x_0}^{x} X_1 e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}\,dx\right]$$

$$\int X\,dx = \int -\frac{4c^2}{r(r^2+c^2)}\,dr = -4\int\frac{dr}{r} + 4\int\frac{r\,dr}{r^2+c^2}$$

$$= -4Lr + 2L(r^2+c^2) = L\frac{(r^2+c^2)^2}{r^4} \quad ,$$

$$e^{\int X\,dx} = \frac{(r^2+c^2)^2}{r^4} \quad , \quad X_1 e^{\int X\,dx} = \frac{2(r^2-c^2)(r^2+c^2)}{r^3} = 2\frac{r^4-c^4}{r^3}$$

$$\int X_1 e^{\int X\,dx} = 2\int r\,dr - 2c^4\int\frac{dr}{r^3} = r^2 + \frac{c^4}{r^2} = \frac{r^4+c^4}{r^2}$$

$$u = \frac{r^4}{(r^4+c^4)^2}\left[C - \frac{r^4+c^4}{r^2}\right]$$

$$d\theta = \pm\frac{dr(r^2+c^2)}{r\sqrt{Cr^2 - r^4 - c^4}} \,.$$

Résoudre $4xy'^2(y-2xy')^2 = 1$.

$$L4 + 2Lx + 2Ly' + 2L(y-2xy') = 0$$

Dérivons $\frac{dx}{x} + 2\frac{y''}{y'} + 2\frac{y'-2xy''-2y'}{y-2xy'} = 0$.

$$y'(y-2xy') + 2x(y-2xy')y'' - 2xy'(y'+2xy'') = 0$$

$$y'(y-4xy') + 2xy''(y-4xy') = 0$$

$$y-4xy' = 0 \quad , \quad y'+2xy'' = 0 \,.$$

Ces 2 éq sont elles solut singul ? Prenons la 1ère on a $y - 4x\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4x}$, $Ly + \frac{1}{4}Lx + Lc$, $y = cx^{1/4}$,

$y' = \frac{1}{4}cx^{-\frac{3}{4}}$ $y'^2 = \frac{1}{16}c^2x^{-\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{4}c^4x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{1/4} - \frac{1}{2}x^{1/4}\right)^2$,

d'où (pour qu'elle vérifie l'équat) $c = 2$; on voit que ce n'est une solut que pour une valeur particul de c à savoir $c=2$.

Prenons la 2ème . $y'dx + 2x\,dy' = 0$, $\frac{dy'}{y'} = -\frac{dx}{2x}$,

$Ly' = -\frac{1}{2}Lx$, $y' = +\frac{c}{\sqrt{x}}$, $dy' = \frac{2c\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}}$

$y + c_1 = 2c\sqrt{x}$. Il faut $4c^2\left[2c\sqrt{x} - c_1 - 2c\sqrt{x}\right]^2 = 1$

$4c^2c_1^2 = 1$, $c_1 = \pm\frac{1}{2c}$, $y = \frac{1}{2c} + 2c\sqrt{x}$, solut qui contient une const arbtr , c'est la solut générale.

Voyons la 1ère intégrale, est-elle singul ou particul

Elim c entre l'intégrale et l'éq. dérivée :

$\frac{y}{2} = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2c^2}$, d'où $2c^2\left(\frac{y}{2} - 2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2c^2 = \frac{1}{2\sqrt{x}\,\frac{y}{2}}$, $c = \frac{1}{2x^{\frac{1}{4}}}$, d'où

$y = \left(\frac{1}{2x^{1/4}} + \frac{\sqrt{x}}{x^{1/4}}\right)^2$ — c'est bien la 1ère intégrale obtenue

Donc celle-ci était bien une intégrale singulière.

$\frac{dx}{ax+by+cz+h} = \frac{dy}{a'x+b'y+c'z+h'} = \frac{dz}{a''x+b''y+c''z+h''}$

Egalons à dt . Si multpl par λ, μ, ν

$= dt = \frac{\lambda dx + \mu dy + \nu dz}{(a\lambda + a'\mu + a''\nu)x + (b\lambda + \text{——})y + (\text{——})z}$

$(ax+by+cz+h)\frac{\partial z}{\partial x} + (a'x+b'y+c'z+h')\frac{\partial z}{\partial y} = a''x+b''y+c''z+h''$

Déter λ, μ, ν de façon que le numér. soit la différent du dénomin. Il faut $\frac{a\lambda+a'\mu+a''\nu}{\lambda} = \frac{b\lambda+b'\mu+b''\nu}{\mu} = \frac{c\lambda+\dots}{\nu} = K$

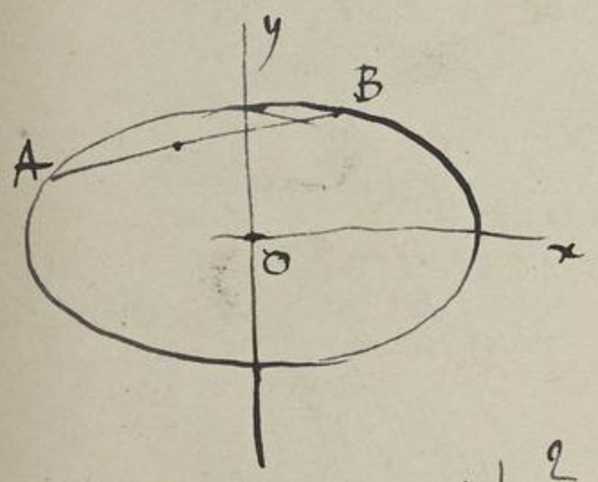
$$(a-K)\lambda + a'\mu + a''\nu = 0$$
$$b\lambda + (c'-\lambda)\dots = 0$$
$$\dots = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a-K & a' & a'' \\ b & b'-K & b'' \\ c & c' & c''-K \end{vmatrix} = 0,$$

On pose $\lambda x+\mu y+\nu z = u_1$, $\dots = u_2$, $\dots = u_3$. — Les 3 éq deviennent $\frac{\lambda}{\dots} = \frac{\mu}{\dots} = \frac{\nu}{\dots}$ on intègre, on $\frac{u}{q}$ q const ; $F(C_1, C_2) = 0$. etc est la solut

voir la suite à la page suivante.

Aire comprise entre ellipse et courbe engendrée par le milieu d'une corde de long const



$x = a\cos\varphi$; $y = b\sin\varphi$; $x' = a\cos\varphi'$; $y' = b\sin\varphi'$.

$x = \frac{a}{2}(\cos\varphi + \cos\varphi')$; $\varphi+\varphi' = 2\mu$

$y = \frac{b}{2}(\sin\varphi + \sin\varphi)$; $\varphi-\varphi' = 2\lambda$

$a^2(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + b^2(\sin\varphi - \sin\varphi')^2 = 4l^2$.

$x = a\cos\mu\cdot\cos\lambda$, $y = b\sin\mu\cos\lambda$.

$a^2\sin^2\lambda\sin^2\mu + b^2\sin^2\lambda\cos^2\mu = l^2$, $\sin\mu = \frac{y}{b\cos\lambda}$, $\cos\mu = \frac{x}{a\cos\lambda}$.

$\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\lambda\, y^2 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\lambda\, x^2 = l^2$.

$(a^4y^2 + b^4x^2)\sin^2\lambda = a^2b^4l^2\cos^2\lambda$.

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2\cos^2\lambda$.

$-(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)\cos^2\lambda = (a^2y^2 + b^2x^2)\sin^2\lambda$.

$(a^4y^2 + b^4x^2)(a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2) = a^2b^2l^2(a^2y^2 + b^2x^2)$.

Telle est la courbe.

$(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)(a^2b^2 - (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)r^2) = a^2b^2r^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)$

$r^2 = \frac{a^2b^2(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} - \frac{a^2b^2l^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}{a^4\sin^2\theta + b^4\sin^2\theta}$ ⊄.

2 cas suiv. le signe de $a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta - a^2l^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) \gtrless 0$.

$\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{b^4 - b^2l^2}{a^2l^2 - a^4} = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{b^2 - l^2}{l^2 - a^2}$. Si $l < b$, on a une courbe fermée ou < 0.
enveloppant l'origine. Si $l > b$, on a une boucle

$\int r^2 d\theta$.

Aire cherchée $= \pi ab - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta$

$= \pi ab - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2b^2l^2 \dfrac{d\theta}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}$.

Cette intégrale de celle qui donne l'aire de l'ellipse en
Change α en a^2 et b en b^2, on a $\dfrac{a^4b^4}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}$!

on a $\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d\theta}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta} = \dfrac{1}{a^4b^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{a^4b^4 d\theta}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}$

$= \dfrac{1}{a^4b^4} \cdot \pi a^2b^2$. (car cette intég est πab où on
Change a et b en a^2 et b^2). Donc $\pi ab - \pi l^2$.

Si $l > b$, on prend intégrale entre α et $\dfrac{\pi}{2}$.

On a $\displaystyle\int \frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \int \frac{\frac{d\theta}{b^2\cos^2\theta}}{\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\theta + 1} = \frac{1}{ab}\frac{\frac{a}{b}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\theta + 1}$

$= \dfrac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}\theta$.

Voir plus haut λ page précédente en haut

$\dfrac{\lambda}{a'b'' - a''(b' - K_1)} = \dfrac{\mu}{\quad} = \dfrac{\nu}{\quad}$

2 type de val λ, μ, ν

$\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z = u_1$
$\lambda_2 x \quad\quad = u_2$
$\lambda_3 \text{——} \quad = u_3$

$\dfrac{du_1}{\lambda_1 K_1 x + \mu_1 K_1 y + \nu_1 K_1 z + g_1} = \dfrac{du_2}{\text{——}} = \dfrac{du_3}{\text{——}}$
ou $Ku_1 + g_1$

$\lambda_1 h + \mu_1 h' + \nu_1 h'' = g_1 \quad\quad = g_2 \cdot g_3$.

on obtient $(K_1 u_1 + g_1)^{\frac{1}{K_1}} = C (K_3 u_3 + g_3)^{\frac{1}{K_3}}$

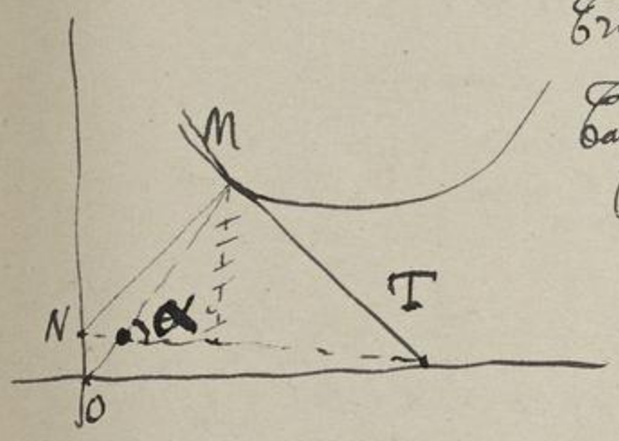
$(K_2 u_2 + g_2) = C_1 ($ idem $)$

donc $F(K, C_1) = 0$.

Si une des rac en K nulle, on a

$$\varphi\left(\frac{e^{\frac{u_1}{g_1}}}{(K_2 u_2 + g_2)^{\frac{1}{K_2}}} , \frac{e^{-\frac{u_1}{g_1}}}{(K_3 u_3 + g_3)^{\frac{1}{K_3}}} \right) = 0$$

Trouver une courbe telle que l'angle α de NT et oM soit constant.



$\tan g \frac{dx}{X-x} = \frac{dy}{Y-y}$, norm. $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X-x)$

$\frac{dx}{-dx} = \frac{dy}{Y-y}$ $\quad Y - y = -\frac{dy}{dx} x$

$X = 0$ dans la normale donne

$$X = \frac{y\,dx - x\,dy}{dx}$$

$$Y = y + \frac{dx}{dy} x = \frac{y\,dy + x\,dx}{dy} = oN .$$

$Y = 0$ dans la tang. donne $\quad X - x = -\frac{dx}{dy} y$, $X = \frac{x\,dy - y\,dx}{dy} = oT$

Le coef angul de NT est $-\frac{oN}{oT} = -\frac{y\,dy + x\,dx}{x\,dy - y\,dx}$. Le coef de oM est $\frac{y}{x}$; l'angle est θ , $tg(\theta - \theta') = \frac{tg\theta - tg\theta'}{1 + tg\theta + tg\theta'} = \frac{\frac{y}{x} + \frac{y\,dy + x\,dx}{y\,dx - x\,dy}}{1 - \frac{y}{x} \cdot \frac{y\,dy + x\,dx}{y\,dx - x\,dy}}$

$= K$, d'où $y(x\,dy - y\,dx) + xy\,dy + x^2\,dx = K(x^2\,dy - xy\,dx - y^2\,dy - xy\,dx)$

$[2xy - K(x^2 - y^2)]\,dy + [x^2 - y^2 + 2Kyx]\,dx = 0$, équation homog ; séparer les variables en pos $y = tx$, $dy = t\,dx + x\,dt$

$[2t - K(1 - t^2)](t\,dx + x\,dt) + [1 - t^2 + 2Kt]\,dx = 0$.

$dx[2t^2 - Kt(1 - t^2) + 1 - t^2 + 2Kt] + x(2t - K(1 - t^2))\,dt = 0$

$$\frac{dx}{x} + \frac{[2t - K(1-t^2)]}{t^2 + Kt + Kt^3 + 1}\,dt = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{[2t - K(1-t^2)]}{(Kt+1)(t^2+1)}\,dt = 0 \quad . \quad K(t^2+1-2) + 2t \text{ ou } K(t^2+1) - 2K + 2t \text{ , donc}$$

La seconde fraction est $\dfrac{K}{Kt+1} + \dfrac{2(t-K)}{(K\cancel{+}t+1)(t^2+1)}$

$\neq$ or $\dfrac{t-K}{(Kt+1)(t^2+1)} = \dfrac{A}{Kt+1} + \dfrac{Bt+C}{t^2+1}$,

$$t - K = A(t^2+1) + (Bt+C)(Kt+1) \,.$$

$$A + C = -K \quad , \quad 1 = B + CK \quad , \quad 0 = A + BK \,.$$

On trouve $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{\cancel{K\,dt}}{\cancel{Kt+1}} - \dfrac{\cancel{2}K\,dt}{Kt+1} + \dfrac{2t\,dt}{t^2+1} = 0$

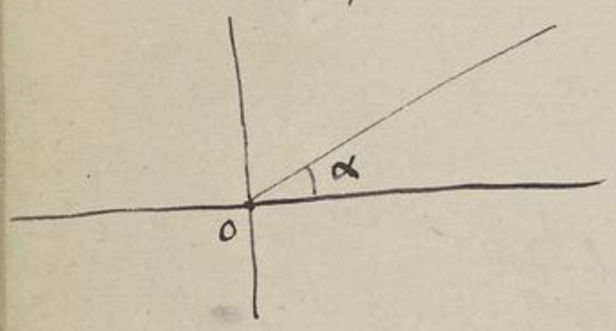
$$\mathrm{L}x + \mathrm{L}(t^2+1) - \mathrm{L}(Kt+1) = \mathrm{L}c \,,$$

~~$\mathrm{L}x =$~~ $x = \dfrac{c(Kt+1)}{t^2+1}$, ou $x^2(t^2+1) = cx(Kt+1)$,

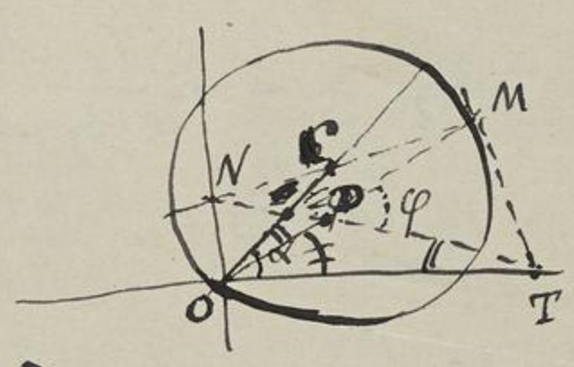
et on revenant à ~~$t =$~~ x et y , $x^2 + y^2 = c(Ky + x)$,

cercle qui passe à l'origine ; son centre est $y = \dfrac{cK}{2}$, $x + \dfrac{c}{2}$

~~et~~ de là on tire $\dfrac{y}{x} = K = \mathrm{tg}\,\alpha$.



Le centre est sur cette droite.

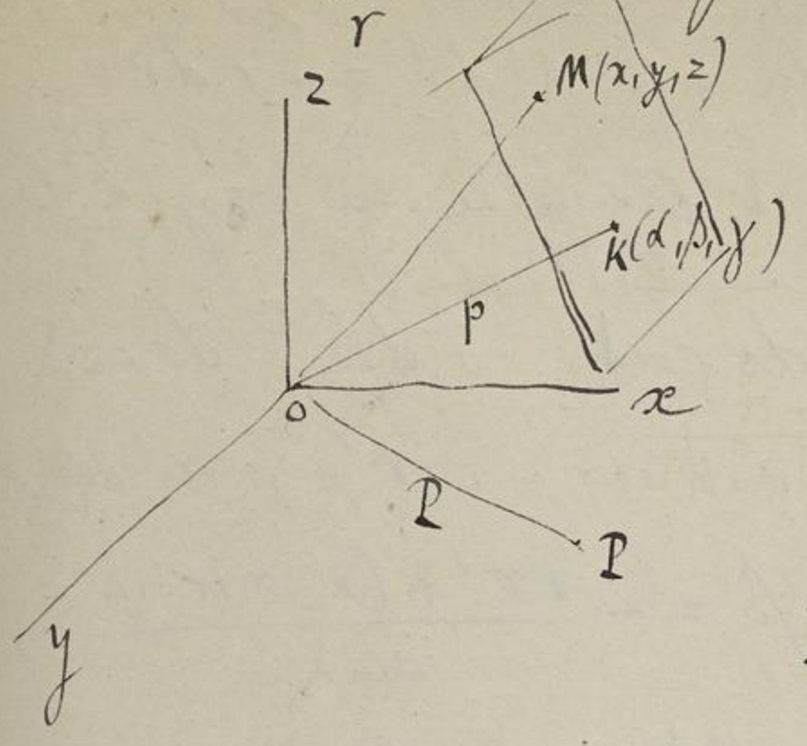


On peut montrer que les diag du quadril OTMN se coupent sous angle constant

$\varphi = \widehat{DOx} + \widehat{OTD}$, tri. OMN , OTN semblables , donc

$DTO = COD$. Donc $\varphi = \alpha$. ——

$P = \frac{p^2}{r}$. Voir plus haut.



Plan tang en α, β, γ est

$$(X-\alpha)\frac{\partial V}{\partial \alpha} + (Y-\beta)\frac{\partial V}{\partial \beta} + (Z-z)\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0$$

où $V = 0$ est l'équat de la surf. au pied K

$p^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

$$P = \frac{\alpha \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial V}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial V}{\partial \gamma}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma}\right)^2}}$$

Donn un petit accroiss à x, y, z sur la surface

Le déplacem est normal à la normale $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$; donc

$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$. On a d'ailleurs pour le plan tang

$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, d'où en déplac. α, β, γ

$x\,d\alpha + y\,d\beta + z\,d\gamma = 2\alpha\,d\alpha + 2\beta\,d\beta + 2\gamma\,d\gamma$.

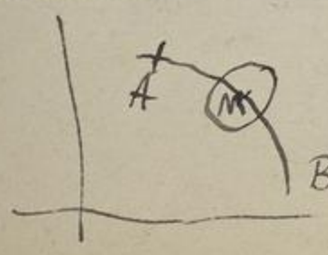
$\frac{dV}{d\alpha} d\alpha + \frac{dV}{d\beta} d\beta + \frac{dV}{d\gamma} d\gamma = 0$. Il en résulte

$$\frac{2\alpha - x}{\frac{dV}{d\alpha}} = \frac{2\beta - y}{\frac{dV}{d\beta}} = \frac{2\gamma - z}{\frac{dV}{d\gamma}}$$, alors

droite.

$$P = \frac{\alpha(2\alpha - x) + \beta(2\beta - y) + \gamma(2\gamma - z)}{\sqrt{(2\alpha - x)^2 + \text{—}}}$$. Alors on voit que

$$P = \frac{2p^2 - p^2}{\sqrt{4p^2 + r^2 - 4p^2}} = \frac{p^2}{r}$$.



Arc de courbe AB. De M (sur AB) on décrit cercle dont le rayon est fonct de l'arc σ (sur AB). Somm des 2 enveloppes ne change pas quand AB se déform sans changer de longueur .

Soient α et β les coord de M en fonct de l'arc.

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, différ. $(x-\alpha)d\alpha+(y-\beta)d\beta=-r\,dr$.

~~$d\beta=\dfrac{-(x-\alpha)d\alpha-r\,dr}{y-\beta}$~~. Soit λ l'angle de la tang à la courbe avec ox. On a $d\alpha=ds\cos\lambda$, $d\beta=ds\sin\lambda$.

On a $(x-\alpha)\cos\lambda+(y-\beta)\sin\lambda=-r\,r'$, r' dér. de r par rapp à s. On a $y-\beta=-\dfrac{rr'+(x-\alpha)\cos\lambda}{\sin\lambda}$,

D'où $\dfrac{(x-\alpha)^2}{\sin^2\lambda}+2rr'(x-\alpha)\operatorname{cotg}\lambda+\dfrac{r^2r'^2}{\sin^2\lambda}=r^2$

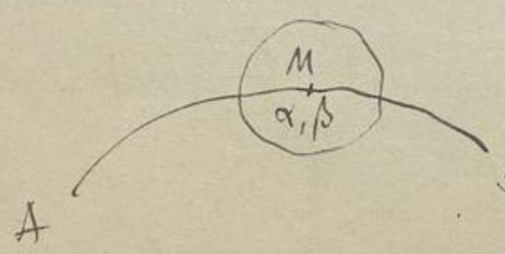
$(x-\alpha)^2+2rr'(x-\alpha)\cos\lambda\sin\lambda+r^2(r'^2-\sin^2\lambda)=0$, D'où

$x-\alpha=\dfrac{-rr'\cos\lambda\sin\lambda\pm\sqrt{r^2r'^2\cos^2\lambda\sin^2\lambda-r^2(r'^2-\sin^2\lambda)}}{1}$ etc.

Déterm toutes les surf qui satisf à la condition $OP.MN=\lambda.\overline{OM}^2$, dans laq λ désig une Const. donnée, O l'orig des coord, M un point quelc de l'une des surf, P le pied de la perp abaissée de O sur le plan tang en M et N la trace de la normale sur le plan des xy.

Déterm la fonct. φ de telle façon qu'en chaque point de la surf conoïde représ. en coord rectang par l'équat $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ la somm des proj. sur l'axe des z des deux rayons de courbure principaux soit proport au carré x^2 de l'abscisse du point.

Problème de l'enveloppe d'un cercle dont centre décrit une courbe (énoncé en bas de la page précédente).



$d\alpha=d\sigma\cos\lambda$, $d\beta=d\sigma\sin\lambda$,

α, β coord du centre du cercle

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$, $R=f(\theta)$. Dérivons le cercle :

$(x-\alpha)\cos\lambda+(y-\beta)\sin\lambda + RR'=0$. ; d'où

$(x-\alpha)^2+\dfrac{(RR'+(x-\alpha)\cos\lambda)^2}{\sin^2\lambda} = R^2$, d'où

$(x-\alpha)^2+2RR'(x-\alpha)\cos\lambda+R^2R'^2=R^2\sin^2\lambda$, et par suite

$x-\alpha = \dfrac{-RR'\cos\lambda \pm \sqrt{R^2R'^2\cos^2\lambda-R^2R'^2+R^2\sin^2\lambda}}{1}$

$x=\alpha \mp RR'\cos\lambda \pm R\sin\lambda\sqrt{1-R'^2}$

$y-\beta=-\dfrac{RR'}{\sin\lambda}+\dfrac{RR'\cos^2\lambda}{\sin\lambda} \mp R\cos\lambda\sqrt{1-R'^2}$;

$y=\beta \mp RR'\sin\lambda \mp R\cos\lambda\sqrt{1-R'^2}$.

Posons $R'=\cos\varphi$. On a

$x=\alpha - R\cos(\lambda\mp\varphi)$, $y=\beta - R\sin(\lambda-\varphi)$.

Nous cherchons l'arc d'enveloppe Il faut dx et dy

On a $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\lambda-\cos\varphi\cos(\lambda+\varphi)-R\sin(\lambda-\varphi)\times(\lambda'-\varphi')$

$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\lambda-\sin\varphi\sin(\lambda+\varphi)+R\cos(\lambda-\varphi)\cdot(\lambda'-\varphi')$

Faisons la somme des carrés. On a

$\dfrac{ds^2}{d\theta^2}=1+\cos^2\varphi+R^2(\lambda'+\varphi')^2-2\cos\varphi+2R(\lambda'+\varphi')\sin\varphi$.

$=\sin^2\varphi+R^2(\lambda'+\varphi')^2-2R(\lambda'+\varphi')\cdot\sin\varphi$

$\dfrac{ds_1}{d\theta}=\pm\left[\sin\varphi-R(\lambda'+\varphi')\right]$. Pour l'autre arc de l'enveloppe

on change φ en $-\varphi$; $\dfrac{ds_2}{d\theta}=\mp\left[\sin\varphi+R(\lambda'-\varphi')\right]$.

$\dfrac{d(s_1+s_2)}{d\theta}=2(\sin\varphi-R\varphi')$, cette expression ne dépend pas de λ

Donc $\delta_1 + \delta_2$ ne dépend que de σ et non de λ.

Considérons $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_m Q^{\frac{m^2}{K}} e^{2mi\pi\frac{x}{a}}$, où $Q = e^{i\pi\frac{b}{a}}$.

Quand est-elle convergente ? Nous allons chercher $\sqrt[m]{u_m}$; si à partir d'un certain terme le module de cette quant est constamment moindre que 1, la série est convergente.

Le ~~Coef~~ A_m se reproduit de K en K, on a $A_m = A_{m+K}$.

$$\sqrt[m]{u_m^m} = \sqrt[m]{A_m}\, Q^{\frac{m}{K}} e^{2i\pi\frac{x}{a}} = \sqrt[m]{A_m}\, e^{\frac{m}{K}\cdot i\pi\frac{b}{a} + 2i\pi\frac{x}{a}}.$$

Posons $\frac{b}{a} = \alpha + i\beta$, le mod de $e^{\frac{m\pi i}{K}(\alpha+i\beta)} + 2i\pi\frac{x}{a}$ est

$e^{-\frac{m}{K}\pi\beta}$, qui tend vers 0 en supp $\beta > 0$ (pour $m = +\infty$).

Soit $m = -\infty$, chang m en $-m'$. On a $u_m = A_{m'} Q^{\frac{m'^2}{K}} e^{-2m'i\pi\frac{x}{a}}$.

$$\sqrt[m]{u_m^m} = \sqrt[m']{u_{m'}} = \sqrt[m]{A_{m'}}\, Q^{\frac{m'}{K}} e^{-2i\pi\frac{x}{a}} = \sqrt[m]{A_{m'}}\, e^{\frac{m'i\pi}{K}(\alpha+\beta i) - 2i\pi\frac{x}{a}} = \text{[illegible]}$$

$e^{-\frac{m'}{K}\pi\beta}$ tend vers zéro pour m' positif infini.

Posons $\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{---}$. Changeons x en $x+a$.

$$\Pi(x) = \Pi(x+a).$$

On a $\Pi(x) = \Pi(x+a)$.

$$\Pi(x+b) = \sum A_m e^{\frac{2mi\pi}{K}\frac{b}{a}} e^{2mi\pi\frac{x+b}{a}}$$; pour voir ce que cela est

posons $\varphi(x) = e^{Ki\pi\frac{x^2}{ab}}$, on a $\Pi(x)\varphi(x) = \sum A_m e^{Ki\pi\frac{x^2}{ab} + \frac{m^2}{K} i\pi\frac{b}{a} + 2mi\pi\frac{x+b}{a}}$

$$= \sum A_m e^{\frac{Ki\pi}{ab}\left[x^2 + \frac{mb}{K}\right]^2} = \sum A_m \varphi\left(x + \frac{mb}{K}\right).$$

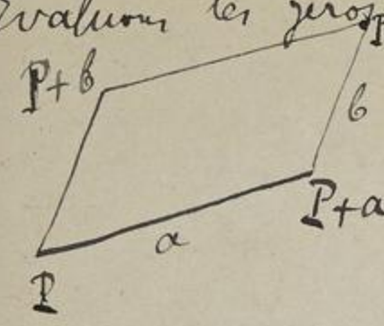
On peut changer m en $m+K$ sans changer le second membre

Donc $A_m = A_{m+K}$, donc $\Pi(x)\varphi(x) = \sum A_m \varphi\left[x+b+\frac{mb}{K}\right]$

$$= \Pi(x+b)\varphi(x+b).$$ Donc $\Pi(x+b) = \Pi(x)\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+b)}$

$\Pi_1(x+b) = \Pi_1(x)\,\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+b)}$, donc $\frac{\Pi(x)}{\Pi_1(x)} = \frac{\Pi(x+b)}{\Pi_1(x+b)}$.

Evaluons les zéros dans un parallélogramme de côtés a et b. Intégrons $\int \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} dz$



soit $f(z) = \frac{\Pi'}{\Pi}$; on a $\int_0^1 a f(p+at)\,dt$

en posant $z = p+at$, $dz = a\,dt$; puis $z = p+a+bt$,

$dz = b\,dt$, donc $b\int_0^1 f(p+a+bt)\,dt$; puis $z = p+b+at$,

$dz = a\,dt$, $a\int_1^0 (p+b+at)\,dt$, enfin $b\int_1^0 f(p+bt)\,dt$, la

somme des 4 intégr est $2i\pi\mu$, μ étant le nombre des zéros

$f(z) = D_z L\Pi(z)$, donc $f(z+a) = f(z)$. Donc la 2ème et la

4ème intégr se détruisent. D'autre part $f(z+b) = D_z L\Pi(z+b)$, or

$L\Pi(z+b) = L\Pi(z) + K i\pi \frac{x^2}{ab} - K i\pi \frac{(x+b)^2}{ab} = L\Pi - K i\pi \frac{2bx+b^2}{ab}$

$= L\Pi - \frac{K\pi i}{a}(2x+b)$. La dérir. $f(z+b) = f(z) - \frac{2K i\pi}{a}$. Donc

dernier intégr est $a\int_1^0 f(p+at)\,dt + 2K i\pi$; donc en ajoutant à la

1ère intégrale, il reste $2K i\pi$. Et par suite $2K i\pi = 2i\pi\mu$,

donc $K = \mu$. Le nombre des zéros est K.

Pour $K=1$, on a $\mu=1$, quelle est cette racine ? C'est le

Centre du parallélogr. On a alors $A_m = A_0$, donc $\Pi = A_0 \Sigma e^{m^2 i\pi \frac{b}{a} + 2mi\pi \frac{x}{a}}$.

$= A_0 \Sigma e^{mi\frac{\pi}{a}(2x+mb)}$; elle s'annule pour le centre $\frac{a+b}{2}$ du parallélogr

avec les valeurs de m $0, -1$, 1 et -2, 2 et -3,

m et $-m-1$. On a $e^{mi\frac{\pi}{a}(2x+mb)}$ et pour $-(m+1)$

$e^{-(m+1)i\frac{\pi}{a}[2x-(m+1)b]}$; ou en rempl x par $\frac{a+b}{2}$ $e^{mi\frac{\pi}{2a}\{(2m+1)b+a\}}$ et $e^{-(m+1)\frac{\pi i}{2a}\{2a-(2m+1)b\}}$

ou $e^{-(m+1)i\frac{\pi}{2}\{1-(2m+1)\frac{b}{a}\}}$. $e^{-(m+1)i\frac{\pi}{a}(a-mb)}$. Ou enfin :

$(-1)^m e^{m(m+1)i\pi\frac{b}{a}}$, $(-1)^{m+1} e^{m(m+1).i\pi\frac{b}{a}}$. Ces

termes se détruisent

$\frac{d^2x}{dt^2} + 5x + y = \cos 2t$ $\quad \frac{d^2y}{dt^2} - x + 3y = 0$. Considé x comme constant.

Soit Δy le 1er membre de la 1ère. Elle est $\Delta y = \cos 2t$,

d'où $y = e^{rt}$ — Mais prenons les éq sans second membre

$\frac{d^2x}{dt^2} + 5x + y = 0$, $\quad \frac{d^2y}{dt^2} - x + 3y = 0$. Substit. de e^{rt} à x et e^{rt} à y }

$r^2 - \lambda + 3 = 0$. Elimin λ , (1)

$\lambda r^2 + 5\lambda + 1 = 0$,

$(r^2+3)(r^2+5) + 1 = 0$. , $\quad r^4 + 8r^2 + 16 = 0$ ou $(r^2+4)^2 = 0$,

$r = \pm 2i$, $r = \pm 2i$; prenons $2i$, on a comm intégrales correspond

$y = e^{2it}$, $\quad x = -e^{2it}$. $y = e^{-2it}$ $\quad x = -e^{-2it}$.

Cela ne suffit pas. Comm $+2i$ est double on substit $e^{2it}(at+b)$; on trouve

On a $(x = e^{2it}(-t+4i)$ on a

$y = te^{2it}$, puis $y = te^{-2it}$, $x = e^{-2it}(\pm t - 4i)$.

La solut. des éq sans second membre s'obt en mult ces solut par des const arbtes et ajoutant. Revenons mainnt à l'éq à second membre On a $\cos 2t = \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}$

Quand on a $\Delta y = e^{\alpha t}$, une solut partic est $Ae^{\alpha t}$; si α est race de l'éq caract, on prend $Ate^{\alpha t}$; si double $At^2e^{\alpha t}$.

Ainsi ici substit $At^2e^{2it} + Bt^2e^{-2it}$ à la place de x

et de même une val analogue à la place de y

Licence Examen Bonnet : Intégrer $rt - s^2 = 0$. On cherche à la ramener à $f(x, y, p, q) = 0$. On a $\frac{r}{s} = \frac{s}{t}$,

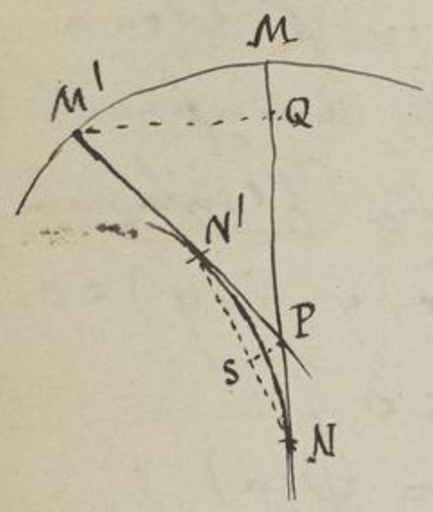
c. à. d. $\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial q}{\partial x}}{\frac{\partial q}{\partial y}}$, ou $\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$,

équat qui exprime que le Jacobien des fonct. p et q de x et y est nul. Donc p est fonct de q. Et l'on a

(1) $p = f(q)$. C'est l'équat cherchée. Il suffit maintenant d'en trouver une intégrale complète pour en déduire l'intégrale générale. Rappelons la théorie : Ayant (2) $f(x, y, p, q) = 0$, et une intégrale complète (3) $\varphi(x, y, z, a, c) = 0$, on écrit que c est fonct de a, savoir $c = \psi(a)$; on élimine c, ce qui donne (4) $\varphi(x, y, z, a, \psi(a)) = 0$, on dérive cette dernière en a, soit (5) $\varphi' = 0$, et l'intégrale générale est représ. par le syst (4) et (5) : autrement dit, l'intégr. peut être considérée comme la surface enveloppe de la surf représ. par l'intégrale complète. Or dans le cas actuel, on a l'équat $p = f(q)$; on y satisfera évidemment par une fonction z dont les dérivées p et q seront des constantes + a et b, telles que a soit fonction de b, or il est évident que $z = ax + by + c$ jouit précisément de cette propriété si a est fonction de b, ~~autrement dit et alors une intégrale complète est évidemment~~ $z = f(b)x + b f(a) y + c$ est évidemment une intégrale complète de (1), comme contenant 2 Const arbitraires b et c. On écrit alors à la place de c, une fonct $\psi(b)$, ce qui donne (6) $z = f(b)x + by + \psi(b)$ et l'on dérive par rapport à b, (7) $o = f'(b)x + y + \psi'(b)$. Les 2 équat (6) et (7) qui forment l'intégrale générale représentent l'envel. du plan mobile (6), dont les coeff dépendent d'un seul

paramètre et par Conséq une surface développable
L'éq $rt - s^2 = 0$ est donc l'éq. aux dérivées partielles des
surf développables.

L'arc de développée est la différ. des longueurs des normales.

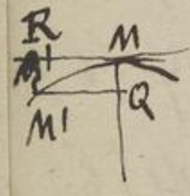


Il faut démontrer arc $NN' = MN - M'N'$
ou $MN - M'N' - \text{arc } NN' = 0$ ou plutôt que
cette fonct est du second ordre Car lorsqu'une
différence ~~fonct~~ de deux quantités peut être considér
Comm l'accroissem d'une fonction, cette différence,
si elle est du second ordre, est rigoureusement nulle
Ainsi soit ~~soit~~ $f(\alpha+h) - f(\alpha)$, suppos que cette différ.
sort du second ordre, quel que soit α, c'est dire que
quel que soit α, la dérivée première $f'(\alpha)$ est nulle,
et que par conséquent la fonct $f(\alpha)$ est une constante,
son accroissem est donc rigoureusement nulle

Or ici, MN, M'N' et NN' sont évidemm fonctions d'un
même paramètre, savoir le paramètre t qui définit la position
du point M sur la courbe. ~~On a~~ Donc le théorème
~~MM~~ précédent est applicable à la différ $MN - M'N' - \text{arc } NN'$
il suffit donc de démontrer qu'elle est du second ordre.

Or $MN - M'N' - \text{arc } NN' = MP + PN - (M'P - N'P) - \text{arc } NN'$.

$= MP - M'P + PN + PN' - \text{arc } NN'$. La 1ère partie est



du second ordre, puisque MP et M'P sont les normales en
2 points infin voisins (Du reste, abaiss la perp M'Q sur MP,
MQ est du second ordre comm égal à la dist du point M'
à la tang en M, et ~~PQ est égal~~ ~~M~~ la différ entre M'P et la
proj. QP sous l'angle infin petit MPM' est du second ordre)

Enfin $PN + PN'$ — arc NN' < $PN + NN'$ — corde NN' ;
or, ~~PN~~ — si l'on projette P' en S sur NN', ~~on~~ la dérivée.
entre PN et NS est du second ordre, car l'angle en N est
infiniment petit, puisque N' est infiniment voisin de N sur la
développée, et que NM est la tang en N. De même la dérivée
entre $N'S$ et $N'P$ est du 2e ordre. Donc enfin la dérivée.
$PN + PN'$ — corde NN' est du 2e ordre. Donc enfin la
dérivée considérée $MN - M'N'$ — arc NN' est du 2e ordre, et
comme elle est l'accroissement d'une fonction, elle est ~~du 2e ordre~~
rigoureusement nulle

10 février 1850.

Monsieur et ami

Je pensais vous voir peut être ce soir
chez ma mère ce qui m'aurait ajourner
jusqu'à ce moment à vous envoyer
vos demander quelques renseignements
sur le meilleur mode d'application des
affusions d'eau froide que m'a ordonné
de céder à employer pour ma femme.
Je voudrais commencer dès demain matin
pour ne pas en retarder les bons effets
sur les quels ma chère malade
compte beaucoup.

pourrez vous me dire s'il est preferable
de donner cette eau le matin avant
tout repas ou dans la journée
après une première digestion accomplie.

Il faut donc être employé à la température
extérieure de 6 à 8°. ou à celle de l'appartement
de 12 à 15° au plus.

Si on doit preferer ou des lotions avec
une eponge. - ou une plumé aucune
assoloir - ou une affusion en nappe
en versant de l'eau en assez grande quantité
il n'est pas question pour à présent de
Douches proprement dites.

enfin combien on doit en commencant
faire durer ces affusions chez une
malade encore très faible.

Si vous avez été libre de venir dès
le matin me donner vos conseils à ce
sujet j'en serais très reconnaissant

Votre tout devoué en affectionné
ad Bourgeois

Dimanche soir

Monsieur

Monsieur Le Dr Guettet

Paris -

Mon cher Monsieur

M.r Serres et Michel qui viennent
demain voir ma femme à 4 ½
seraient très aise de causer avec
vous du mode d'application le meilleur
de l'eau froide dans l'état de santé
de ma femme.

J'espère que rien ne vous empêchera
de vous trouver chez moi à l'heure
indiquée ci dessus demain jeudi car
vous me feriez très reconnaissant
Votre bien affectueux

Ad. Vuaqueur

Mercredi 20 février 1850.

Bellevue le 23 Juin 95

Mon cher Monsieur

Je vous remercie beaucoup de l'intérêt que vous prenez au rétablissement de ma nièce. Depuis qu'elle fait régulièrement le traitement hydrothérapique elle va tous les jours littéralement de mieux en mieux. elle a depuis des forces, de l'appétit, enfin elle est mieux maintenant, qu'elle n'a été depuis trois ans. Elle prend une douche le matin et le soir; puis souvent elle se prend une au milieu de la journée lorsque elle sent la tête lourde; elle fait presque tous les jours

une ou deux) promenades et cette fatigue
quelquefois les personnes qui sont avec elle.
Nous prenons tous les jours le traitement
hydrothérapique et Mr. Fleury qui l'a
appliqué avec tant de zèle et de bienveillance
sur notre bonne mère, lorsque nous
commencions à désespérer de la voir reprendre
les forces et sa vie habituelle.
Mon père, mon frère sont en très bonne
santé, ainsi que tout le reste de ma famille.
Ma cousine Noelie est une parfaite image de l'héroïne
mondaine qu'elle a eu cette année; je crois
que si elle peut passer quelque temps à
la campagne elle se remettra tout à fait
mon frère fait son théâtre avec
moment; il a de très bonnes places et
va au concours en trois facultés; quoi

à moi je me prépare à l'admission
à l'école des beaux arts ; j'ai malheureusement pas plus ennuyeux à porter,
c'est à dire deux examens de matières abjectes
à la fin de cette année scolaire ; après, viendront
les études d'art qui rachèteront ce mauvais
moment. Voilà quatre mois que nous
habitons Bellevue ; nous sommes à 3 ou 4
minutes de l'établissement hydrothérapique de
Mr. Fleury où maman suit le traitement et
nous sommes à la même distance du chemin
de fer qui nous mène à Paris ; c'est une
position très agréable, d'autant plus que
nous sommes à la porte des bois.

Voilà, mon cher Monsieur, les quelques
détails, sur notre séjour à la campagne
et sur la santé de ma mère, que vous
aviez eu la bonté de me demander et que

je suis très heureux de pouvoir
vous donner aussi satisfaisants.
J'espère que vous serez de votre
santé et je vous prie, Monsieur
de vouloir bien agréer l'expression de
mon profond respect, de votre tout dévoué

Edouard Bonjean